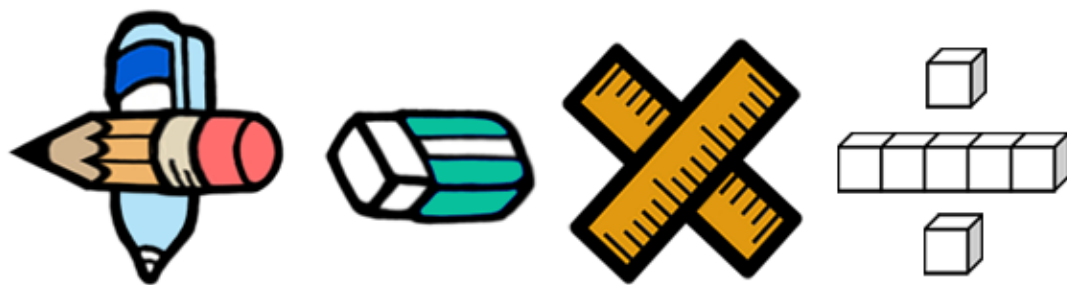


基本學習內容：NC-7-1-1

質數和合數

【教師版】





基本學習內容：NC-7-1-1

學習內容：

N-7-1 100 以內的質數：質數和合數的定義；質數的篩法。

基本學習內容：

NC-7-1-1 質數和合數。

基本學習表現：

NCP-7-1-1-1 理解質數、合數的名稱和意義。

NCP-7-1-1-2 理解質數的因數只有 1 和自己。

NCP-7-1-1-3 理解 1 不是質數，也不是合數。

NCP-7-1-1-4 理解偶數中只有 2 是質數，其他偶數皆不是質數。

NCP-7-1-1-5 熟記 20 以內的質數。

NCP-7-1-1-6 判斷 100 以內的數是否為質數。

NCP-7-1-1-7 認識質數的篩檢法。



概要說明：

- 本基本學習內容 NC-7-1-1 為 NC-6-1-1 之後續學習概念，故學生應已學過小於 20 的質數與合數以及 2、3、5 的倍數判別法。

本基本學習內容幫助學生判斷 100 以內的質數。

- 教師可以透過分類的活動，將正整數區分成因數只有 1 個、因數只有 2 個、以及因數有 3 個或比 3 個多的數等三類，幫助學生區分 1、質數與合數。例如列出 1~12 各數的所有因數，幫助學生認識：

因數只有 1 個的數：1

因數只有 2 個的數：2、3、5、7、11

因數有 3 個或比 3 個多的數：4、6、8、9、10、12

(1) 2 的因數是 1 和 2；3 的因數是 1 和 3；5 的因數是 1 和 5，...

因數只有 2 個的數，它們的因數都是 1 和本身，數學上稱這些數為質數。

也可以說，除了 1 和自己之外，沒有其它因數的整數稱為質數。

(2) 4 的因數除了 1 和 4 之外還有 2；6 的因數除了 1 和 6 之外還有 2

和 3；8 的因數除了 1 和 8 之外還有 2 和 4，...

因數有 3 個或比 3 個多的數，它們的因數除了 1 和本身以外，還有其他的數，

數學上稱這些數為合數。

(3) 1 的因數只有 1 個，所以 1 不是質數也不是合數。

- 教學活動舉例或評量宜以實際數字為原則。不適合評量例子如下：甲是質數，甲+2 是否為質數？

- 針對小於 100 的質數之判斷，教導學生認識只須檢查是否為 2、3、5、7 的倍數即可，而不強制要求學生理解原因。例如：若某合數 a 的最小質因數為 11，那麼，該數一定大於 100，理由如下： $a = 11 \times b \geq 11 \times 11 = 121 > 100$ 。



基本學習內容：NC-7-1-1 質數和合數

◎質數與合數

國小的時候我們學過，一個整數如果恰有兩個因數，也就是1和自己本身兩個因數，稱為質數。一個整數如果有三個因數以上(包括三個)，也就是除了1和自己本身以外，就稱為合數。1只有一個因數，所以1不是質數也不是合數。

(1) 在下面表格中，將1到12每個數的因數列表，找找看。

①哪些是質數？

②哪些是合數？

解：

數	乘積	因數	因數個數	判斷
1	$1 = 1 \times 1$	1	1	<input type="checkbox"/> 質數 <input type="checkbox"/> 合數
2	$2 = 1 \times 2$	1, 2	2	<input checked="" type="checkbox"/> 質數 <input type="checkbox"/> 合數
3	$3 = 1 \times 3$	1, 3	2	<input checked="" type="checkbox"/> 質數 <input type="checkbox"/> 合數
4	$4 = 1 \times 4 = 2 \times 2$	1, 2, 4	3	<input type="checkbox"/> 質數 <input checked="" type="checkbox"/> 合數
5	$5 = 1 \times 5$	1, 5	2	<input checked="" type="checkbox"/> 質數 <input type="checkbox"/> 合數
6	$6 = 1 \times 6 = 2 \times 3$	1, 2, 3, 6	4	<input type="checkbox"/> 質數 <input checked="" type="checkbox"/> 合數
7	$7 = 1 \times 7$	1, 7	2	<input checked="" type="checkbox"/> 質數 <input type="checkbox"/> 合數
8	$8 = 1 \times 8 = 2 \times 4$	1, 2, 4, 8	4	<input type="checkbox"/> 質數 <input checked="" type="checkbox"/> 合數
9	$9 = 1 \times 9 = 3 \times 3$	1, 3, 9	3	<input type="checkbox"/> 質數 <input checked="" type="checkbox"/> 合數
10	$10 = 1 \times 10 = 2 \times 5$	1, 2, 5, 10	4	<input type="checkbox"/> 質數 <input checked="" type="checkbox"/> 合數
11	$11 = 1 \times 11$	1, 11	2	<input checked="" type="checkbox"/> 質數 <input type="checkbox"/> 合數
12	$12 = 1 \times 12 = 2 \times 6 = 3 \times 4$	1, 2, 3, 4, 6, 12	6	<input type="checkbox"/> 質數 <input checked="" type="checkbox"/> 合數

答：質數：2, 3, 5, 7, 11

合數：4, 6, 8, 9, 10, 12



教材內容說明：

1. 本教材第 1 頁的教學重點是複習質數與合數的意義。
2. 第(1)題給定 1 到 12 的因數列表，請學生找出質數與合數。

本教材說明一個整數如果恰有兩個因數，也就是 1 和自己本身兩個因數，稱為質數。

一個整數如果有三個因數以上(包含三個)，也就是除了 1 和自己本身以外，還有其他因數，就稱為合數。

1 只有一個因數，所以 1 不是質數也不是合數。

基本學習內容：NC-7-1-1 質數和合數



【質數】

如果一個大於 1 的整數只有 1 和本身兩個因數，稱此數為質數，例如：2、3、5、7、11 的因數只有 1 和本身，所以 2、3、5、7、11 都是質數。

【合數】

如果一個大於 1 的整數，除了 1 和本身之外，還有其他的因數，稱此數為合數。例如：4 的因數除了 1 和本身 4 以外，還有因數 2，所以 4 是合數。

【重要觀念】

- (1) 1 既不是質數，也不是合數。
- (2) 2 是最小的質數，也是質數中唯一的偶數
(因為若有其他的偶數是質數，則它必被 2 整除)。



- (2) 在下面表格中，將 13 到 25 每個數的因數列表，找找看。
那些數是質數？有哪些是合數？找找看。

數	乘積	因數	因數個數	判斷
13	$13 = 1 \times 13$	1, 13	2	<input checked="" type="checkbox"/> 質數 <input type="checkbox"/> 合數
14	$14 = 1 \times 14 = 2 \times 7$	1, 2, 7, 14	4	<input type="checkbox"/> 質數 <input checked="" type="checkbox"/> 合數
15	$15 = 1 \times 15 = 3 \times 5$	1, 3, 5, 15	4	<input type="checkbox"/> 質數 <input checked="" type="checkbox"/> 合數
16	$16 = 1 \times 16 = 2 \times 8 = 4 \times 4$	1, 2, 4, 8, 16	5	<input type="checkbox"/> 質數 <input checked="" type="checkbox"/> 合數
17	$17 = 1 \times 17$	1, 17	2	<input checked="" type="checkbox"/> 質數 <input type="checkbox"/> 合數
18	$18 = 1 \times 18 = 2 \times 9 = 3 \times 6$	1, 2, 3, 6, 9, 18	6	<input type="checkbox"/> 質數 <input checked="" type="checkbox"/> 合數



教材內容說明：

1. 本教材第 2～5 頁的教學重點是幫助學生學習質數篩檢法。

2. 本頁教師提示重點幫助學生理解下列要點：

質數: 如果一個大於 1 的整數只有 1 和本身兩個因數，稱此數為**質數**

合數: 如果一個大於 1 的整數，除了 1 和本身之外，還有其他的因數，稱此數為**合數**。

1 既不是質數，也不是合數。

2 是最小的質數，也是質數中唯一的**偶數**。

3. 本頁教學重點整理質數與合數的判別方法，並利用因數列表找出 25 以內的質數。

4. 第(2)題要求學生利用因數列表，找出 13-25 中，質數與合數有哪些？



基本學習內容：NC-7-1-1

基本學習內容：NC-7-1-1 質數和合數

19	$19 = 1 \times 19$	1, 19	2	<input checked="" type="checkbox"/> 質數 <input type="checkbox"/> 合數
20	$20 = 1 \times 20 = 2 \times 10 = 4 \times 5$	1, 2, 4, 5, 10, 20	6	<input type="checkbox"/> 質數 <input checked="" type="checkbox"/> 合數
21	$21 = 1 \times 21 = 3 \times 7$	1, 3, 7, 21	4	<input type="checkbox"/> 質數 <input checked="" type="checkbox"/> 合數
22	$22 = 1 \times 22 = 2 \times 11$	1, 2, 11, 22	4	<input type="checkbox"/> 質數 <input checked="" type="checkbox"/> 合數
23	$23 = 1 \times 23$	1, 23	2	<input checked="" type="checkbox"/> 質數 <input type="checkbox"/> 合數
24	$24 = 1 \times 24 = 2 \times 12 = 3 \times 8 = 4 \times 6$	1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24	8	<input type="checkbox"/> 質數 <input checked="" type="checkbox"/> 合數
25	$25 = 1 \times 25 = 5 \times 5$	1, 5, 25	3	<input checked="" type="checkbox"/> 質數 <input type="checkbox"/> 合數

(3) 在下列表格中，

有哪些數是 2 的倍數？請將 2 的倍數劃掉。

剩下的數有哪些數是 3 的倍數，這些數都是合數嗎？也劃掉。

剩下的數有哪些是 5 的倍數，這些數都是合數嗎？也劃掉。

最後剩下的是不是都是質數？

答：

13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

步驟一：將 2 的倍數劃掉。

13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
----	---------------	----	---------------	----	---------------	----	---------------	----	---------------	----	---------------	----

步驟二：將 3 的倍數劃掉。

13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
----	---------------	---------------	---------------	----	---------------	----	---------------	---------------	---------------	----	---------------	----

步驟三：將 5 的倍數劃掉。

13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
----	---------------	---------------	---------------	----	---------------	----	---------------	---------------	---------------	----	---------------	---------------

最後剩下的 11, 13, 17, 19 都是質數。



教材內容說明：

1. 本教材第 2～5 頁的教學重點是幫助學生學習質數篩檢法。
2. 第(3)題幫助學生除了用因數列表外，可以試著用質因數篩檢法，找出 13-25 中的質數與合數。



基本學習內容：NC-7-1-1 質數和合數

到目前為止沒有快速的方法可以產生由 2 開始的第幾個質數，接下來我們要用古希臘的數學家埃拉托賽尼（Eratosthenes，西元前 276-西元前 194）所發現的方法，這個方法稱為「埃拉托賽尼篩法」，我們以篩選 1~100 的質數為例介紹他的想法：

步驟 1：因為 1 不是質數，也不是合數，所以刪去 1。

步驟 2：剩下的數最小是 2，圈出 2 並刪去其餘 2 的倍數，其中刪去的數最小是_____。

步驟 3：剩下的數最小是 3，圈出 3 並刪去其餘 3 的倍數，其中刪去的數最小是_____。

步驟 4：剩下的數最小是 5，圈出 5 並刪去其餘 5 的倍數，其中刪去的數最小是_____。

步驟 5：剩下的數最小是 7，圈出 7 並刪去其餘 7 的倍數，其中刪去的數最小是_____。

步驟 6：將剩下的數全部圈起來。

請問此時所有圈出來的數是否都是質數？☐是 ☐否

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

【深入討論】

- (1) 由步驟 2~步驟 5 中，每個步驟圈出的數與所刪去的最小數，有什麼關係呢？
- (2) 利用埃拉托賽尼篩法找出小於 100 的質數，為何只需使用質數 2、3、5、7 篩檢即可，而不需使用 11 或更大的質數篩檢？



教材內容說明：

1. 本教材第 2~5 頁的教學重點是幫助學生學習質數篩檢法。

2. 本頁教師提示重點幫助學生理解下列要點：

利用埃拉托賽尼篩法篩檢小於 100 的質數，只需使用 2、3、5、7 篩檢即可，且 100 以內的質數有 2、3、5、7、11、13、17、19、23、29、31、37、41、43、47、53、59、61、67、71、73、79、83、89、97，共 25 個。

3. 本頁深入討論答案：

(1) 每個步驟所刪去的最小數是圈出的數的平方。

(2) 步驟 5 完成後，剩下的數最小的是 11，圈出 11 並刪去其餘 11 的倍數，而由第一題可知，刪去的數最小是 $11^2 = 121$ ，已經超過 100。

因為 11 的倍數中，除了 11 以外，11 的 2、3、4、5、6、7、8、9 倍在前面的步驟中已經全被刪除，而 11 的 10、11、... 以上的倍數會超過 100。

基本學習內容：NC-7-1-1 質數和合數

(4) 請利用剛剛的百數表，列出 1~100 的質數，數數看有幾個？

答：

質數有 2、3、5、7、11、13、17、19、23、29、31、37、41、43、47、53、59、61、67、71、73、79、83、89、97，共 25 個。

(5) 欲將 n ($n > 1$) 個邊長為 1 的小正方形緊密排列拼成長方形，且不會剩下任何小正方形，則：

- (1) 若 $n=11$ ，可以拼出幾種不同形狀的長方形？
- (2) 若 $n=12$ ，可以拼出幾種不同形狀的長方形？
- (3) 說說看，如果只能夠排出一種長方形， n 一定是質數嗎？

答：

(1) $n=11=1 \times 11$ ，所以只能拼成長寬為 1 和 11 的長方形，1 種長方形。

(2) $n=12=1 \times 12=2 \times 6=3 \times 4$ ，所以可以排成 3 種矩形。



(3) 若 n 為質數，則長方形只有一種拼法；

若 n 為合數，則長方形不只有一種拼法。



- (1) 請將 20 以內的質數列出來。
- (2) 請將 24 用兩個質數相加來表示，並列出來。

答：(1) 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19

(2) $24=5+19=7+17=11+13$



教材內容說明：

1. 本教材第 2～5 頁的教學重點是幫助學生學習質數篩檢法。
2. 第(4)題要求學生整理出 100 以內的質數共有 25 個。
3. 第(5)題為因數的應用問題，利用正方形拼出長方形，發現因數相乘之間的不同關係。
4. 本頁隨堂練習檢查學生能否活用質數解題。



基本學習內容：NC-7-1-1 質數和合數



小試身手

1. 回答下列問題：

- (1) 最小的質數是 2。
- (2) 最小的合數是 4。
- (3) 奇數中，最小的質數是 3。
- (4) 91 是質數還是合數？答：合數。

2. 20 的因數中，有哪些為質數？答：2、5。

3. 欲使 n 個邊長為 1 的小正方形緊密排列拼成矩形，且不會剩下任何小正方形，則：

- (1) 若 $n=15$ ，可以拼出 2 種不同形狀的矩形。
- (2) 若 $n=17$ ，可以拼出 1 種不同形狀的矩形。
- (3) 若 $n=18$ ，可以拼出 3 種不同形狀的矩形。
- (4) 若 $n=36$ ，可以拼出 5 種不同形狀的矩形。



教材內容說明：

本教材第 6 頁是小試身手。



教育部國民及學前教育署 編

國民中學

7 年級數學

學生學習扶助教材

