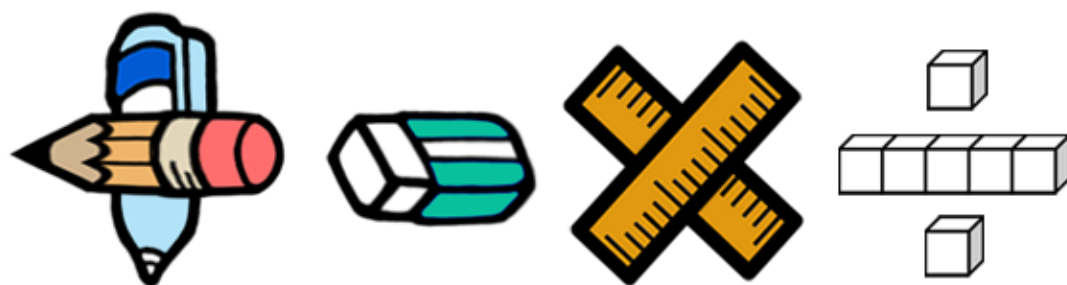


基本學習內容：NC-7-7-1、2

乘法指數律

除法指數律

【教師版】





基本學習內容：NC-7-7-1、2

學習內容：

N-7-7 指數律：以數字例表示「同底數的乘法指數律」($a^m \times a^n = a^{m+n}$ 、 $(a^m)^n = a^{mn}$ 、 $(a \times b)^n = a^n \times b^n$ ，其中 m, n 為非負整數)；以數字例表示「同底數的除法指數律」($a^m \div a^n = a^{m-n}$ ，其中 $m \geq n$ 且 m, n 為非負整數)。

基本學習內容：

NC-7-7-1 乘法指數律。

NC-7-7-2 除法指數律。

基本學習表現：

NCP-7-7-1-1 理解 $a^m \times a^n = a^{m+n}$ 。

NCP-7-7-1-2 理解 $(a^m)^n = a^{mn}$ 。

NCP-7-7-1-3 理解 $(a \times b)^n = a^n \times b^n$ 。

NCP-7-7-2-1 理解 $a^m \div a^n = a^{m-n}$ ，其中 $m \geq n$ 。

NCP-7-7-2-2 理解 $a^0 = 1 (a \neq 0)$ 。



概要說明：

- 本基本學習內容為 NC-7-6-1 之後續學習概念，故學生應該已經能理解指數的意義及其運算。本基本學習內容探討同底數的乘法指數律及同底數的除法指數律。
- 本基本學習內容運算前、後的指數次方、運算結果的指數次方皆限制在非負整數的範圍內。例如 $4^2 \div 4^5 = 4^{-3}$ 也不在此討論。
- 本基本學習內容宜包含底數為分數及負數之 n 次方，但教學活動建議先以底數為正整數、正分數進行探討，再擴展至負整數、負分數的範疇。
- 若從指數的意義來談 $a^0 = 1 (a \neq 0)$ ，學生可能較難理解，因此可於學生理解除法指數律之後，引導學生思考次方不為正整數的可能性。

例如：

若是遇到 $8^3 \div 8^3$ 這類問題，依照指數律規則我們應該將其記為 $8^3 \div 8^3 = 8^{3-3} = 8^0$

若是實際進行除法，則是 $8^3 \div 8^3 = \frac{8 \times 8 \times 8}{8 \times 8 \times 8} = 1$

因此我們知道 $8^0 = 1$ ；故 $a^0 = 1$ 的出現，可視為是 $a^n \div a^n$ 的結果，所以 $a^0 = 1$ ，但是 0 不能當除數，故排除 $a \neq 0$ 的情況。

基本學習內容：NC-7-7-1、2 乘法指數律、除法指數律

指數律(乘法與除法)(1)請你算算看，下列各式的 x 是多少？

① $5^2 \times 5^4 = 5^x$

② $(-4)^3 \times (-4)^5 = (-4)^x$

解：

①



方法一：

$$5^2 \times 5^4 = (5 \times 5) \times (5 \times 5 \times 5 \times 5) \\ = 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^6$$

答： $x = 6$

方法二：



$$5^2 \times 5^4 = \underbrace{(5 \times 5)}_{\text{2 個 } 5} \times \underbrace{(5 \times 5 \times 5 \times 5)}_{\text{4 個 } 5} \\ = 5^{2+4} = 5^6$$

答： $x = 6$ 由方法二我們可以知道， $5^2 \times 5^4 = 5^{2+4} = 5^6$

②

$$(-4)^3 \times (-4)^5 = \underbrace{[(-4) \times (-4) \times (-4)]}_{\text{3 個 } (-4)} \times \underbrace{[(-4) \times (-4) \times (-4) \times (-4) \times (-4)]}_{\text{5 個 } (-4)} \\ = (-4)^{3+5} = (-4)^8$$

答： $x = 8$ 

由上面的兩個例題，我們可以發現

$5^2 \times 5^4 = 5^{2+4} = 5^6$

$(-4)^3 \times (-4)^5 = (-4)^{3+5} = (-4)^8$

**隨堂練習**請你算算看，下列各式的 x 是多少？

① $7^6 \times 7^2 = 7^x$

② $(-6)^6 \times (-6)^{15} = (-6)^x$

答：①8 ②21



教材內容說明：

1. 本教材第 1 頁的教學重點是認識乘法指數律。
2. 第(1)題給定 $5^2 \times 5^4 = 5^x$ 及 $(-4)^3 \times (-4)^5 = (-4)^x$ ，要求學生算出 x 的值。

本教材提供兩種解題的方法：

方法一：直接利用指數的定義算出。

方法二：判斷底數 5 與 (-4) 相乘的個數來解題。

- 本題學生常常使用方法一得到 $x=6$ ，雖然一樣可以得到正確答案，但並未看到指數間的關係。透過方法二，幫助學生看到 $5^2 \times 5^4 = 5^x$ 為 2 個 5 及 4 個 5 相乘，一共有 $(2+4)$ 個 5 相乘。
- 比較方法一及方法二答案皆相同，但方法一必須利用乘法算出答案，才能求出 x 的值。方法二只要利用加法算出指數的和，就能求出 x 的值。教師應幫助學生看到 $5^2 \times 5^4$ 時，指數為 $(2+4)$ 兩數相加的關係。
- 為了區分運算符號(減號)和性質符號(負號)，建議教師應幫助學生養成數字前面有負號的性質符號時，要加上括號。
例如將 -4×-4 記成 $(-4) \times (-4)$ ，將 $-4 - -4$ 記成 $(-4) - (-4)$ 。
- 教師也可以舉例分數的例子，幫助學生熟悉 $a^m \times a^n = a^{m+n}$ 。

基本學習內容：NC-7-7-1、2 乘法指數律、除法指數律

(2) 請你算算看，下列各式的 x 是多少？

① $5^7 \div 5^4 = 5^x$

② $(-4)^7 \div (-4)^3 = (-4)^x$

解：

①



方法一：

$$5^7 \div 5^4 = \frac{5^7}{5^4} = \frac{5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5}{5 \times 5 \times 5 \times 5} = 5 \times 5 \times 5 = 5^3$$

答： $x = 3$

方法二：



$$5^7 \div 5^4 = \frac{5^7}{5^4} = \frac{\overbrace{5 \times 5 \times 5 \times 5}^{4 \text{ 個 } 5} \times \overbrace{5 \times 5 \times 5}^{3 \text{ 個 } 5}}{\underbrace{5 \times 5 \times 5 \times 5}_{4 \text{ 個 } 5}} = 5^{7-4} = 5^3$$

答： $x = 3$

由方法二我們可以知道， $5^7 \div 5^4 = 5^{7-4} = 5^3$

②

$$\begin{aligned} (-4)^5 \div (-4)^3 &= \frac{(-4)^5}{(-4)^3} = \frac{\overbrace{(-4) \times (-4) \times (-4) \times (-4) \times (-4)}^{3 \text{ 個 } (-4)} \times \overbrace{(-4) \times (-4)}^{2 \text{ 個 } (-4)}}{\underbrace{(-4) \times (-4) \times (-4)}_{3 \text{ 個 } (-4)}} \\ &= (-4)^{5-3} = (-4)^2 \end{aligned}$$

答： $x = 2$



由上面的兩個例題，我們可以發現

$$5^7 \div 5^4 = 5^{7-4} = 5^3$$

$$(-4)^5 \div (-4)^3 = (-4)^{5-3} = (-4)^2$$



隨堂練習

請你算算看，下列各式的 x 是多少？

① $9^5 \div 9^3 = 9^x$

② $(-5)^8 \div (-5)^2 = (-5)^x$

答：①2 ②6



教材內容說明：

1. 本教材第 2 頁的教學重點是認識除法指數律。
2. 第(2)題給定 $5^7 \div 5^4 = 5^x$ 及 $(-4)^7 \div (-4)^3 = (-4)^x$ ，要求學生算出 x 的值。

本教材提供兩種解題的方法：

方法一：利用指數的定義與除法的運算規則得到答案。

方法二：判斷底數 5 與 (-4) 相除的個數來解題。

- 本題學生常常使用方法一直接算出得到 $x=3$ ，雖然一樣可以得到正確答案，但並未看到相除時，指數相減的關係。方法二透過 $5^7 \div 5^4 = 5^x$ 中 5^7 為 4 個 5 及 3 個 5 相乘，利用除法運算規則分子中的 4 個 5 與分母的 4 個 5 抵消，得到答案為 $5^{7-4} = 5^3$ 。
- 方法一必須利用除法算出答案，才能求出 x 的值。方法二只要利用減法算出指數的差，就能求出 x 的值。教師應幫助學生看到 $5^7 \div 5^4 = 5^x$ 時，指數為 $(7-4)$ 兩數相減的關係。
- 為了區分運算符號(減號)和性質符號(負號)，建議教師應幫助學生養成數字前面有負號的性質符號時，要加上括號。
例如將 -4×-4 記成 $(-4) \times (-4)$ ，將 $-4 - -4$ 記成 $(-4) - (-4)$ 。
- 教師也可以舉例分數的例子，幫助學生熟悉 $a^m \div a^n = a^{m-n}$ 。

基本學習內容：NC-7-7-1、2 乘法指數律、除法指數律

(3)請你算算看，下列各式的答案。

① $8^3 \div 8^3$

② $(-2)^4 \div (-2)^4$

解：

①



方法一： $8^3 \div 8^3 = \frac{8^3}{8^3} = \frac{8 \times 8 \times 8}{8 \times 8 \times 8} = 1$

答： $8^3 \div 8^3 = 1$



方法二： $8^3 \div 8^3 = 8^{3-3} = 8^0$

答： $8^3 \div 8^3 = 8^0$

②



方法一： $(-2)^4 \div (-2)^4 = \frac{(-2)^4}{(-2)^4} = \frac{(-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2)}{(-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2)} = 1$

答： $(-2)^4 \div (-2)^4 = 1$



方法二： $(-2)^4 \div (-2)^4 = (-2)^{4-4} = (-2)^0$

答： $(-2)^4 \div (-2)^4 = (-2)^0$



由上面的兩個例題，我們可以發現 $8^0 = 1$ 及 $(-2)^0 = 1$

因此我們可以發現除了 0 以外，任何數的零次方皆等於 1。



教材內容說明：

1. 本教材第 3 頁的教學重點是理解 $a^0 = 1 (a \neq 0)$ 。

2. 第(3)題包含兩個子問題，

子題①要求學生算出 $8^3 \div 8^3$ 的值。本教材提供兩種解題方法，

方法一：利用除法運算規則得到 $8^3 \div 8^3 = 1$ 。

方法二：利用除法指數律得到 $8^3 \div 8^3 = 8^0$ 。

● 由方法一及方法二，可幫助學生發現 $8^3 \div 8^3 = 1 = 8^0$ ，即 $8^0 = 1$ 。

子題②要求學生算出 $(-2)^4 \div (-2)^4$ 的值。本教材提供兩種解題方法，

方法一：利用除法運算規則得到 $(-2)^4 \div (-2)^4 = 1$

方法二：利用除法指數律得到 $(-2)^4 \div (-2)^4 = (-2)^0$

● 由方法一及方法二，可幫助學生發現 $(-2)^4 \div (-2)^4 = 1 = (-2)^0$ ，即 $(-2)^0 = 1$ 。

● 透過一個子題①及子題②，幫助學生理解 $a^0 = 1$ 的出現，可視為是 $a \neq 0$ 時 $a^n \div a^n$ 的結果，所以 $a^0 = 1$ 。但是 0 不能當除數，故排除 $a \neq 0$ 的情況。



基本學習內容：NC-7-7-1、2

基本學習內容：NC-7-7-1、2 乘法指數律、除法指數律

(4)請你算算看，下列各式的 x 是多少？

① $(2^5)^2 = 2^x$

② $[(-4)^2]^3 = (-4)^x$

解：

①



方法一：

$$\begin{aligned}(2^5)^2 &= 2^5 \times 2^5 = (2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2) \\ &= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \\ &= 2^{10}\end{aligned}$$

答： $x=10$ 

方法二： $(2^5)^2 = 2^5 \times 2^5 = 2^{5+5} = 2^{5 \times 2} = 2^{10}$

答： $x=10$ 由方法二我們可以知道， $(2^5)^2 = 2^{5 \times 2} = 2^{10}$

②

$$\begin{aligned}[(-4)^2]^3 &= (-4)^2 \times (-4)^2 \times (-4)^2 \\ &= (-4)^{2 \times 3} = (-4)^6\end{aligned}$$

答： $x=9$ 

由上面的兩個例題，我們可以發現

$$(2^5)^2 = 2^{5 \times 2} = 2^{10}$$

$$[(-4)^2]^3 = (-4)^{2 \times 3} = (-4)^6$$



隨堂練習

請你算算看，下列各式的 x 是多少？

① $(3^4)^2 = 3^x$

② $[(-3)^5]^4 = (-3)^x$

答：①8 ②20



教材內容說明：

1. 本教材第 4 頁的教學重點是理解 $(a^m)^n = a^{m \times n}$ 。
2. 第(4)題給定 $(2^5)^2 = 2^x$ 及 $[(-4)^2]^3 = (-4)^x$ ，要求學生算出 x 的值。

本教材提供兩種解題的方法：

方法一：直接利用指數的定義算出。

方法二：判斷底數 2 與 (-4) 相乘的個數來解題。

- 本題學生常常使用方法一得到 $x=10$ ，雖然一樣可以得到正確答案，但並未看到指數間的關係。透過方法二，幫助學生看到 $(2^5)^2 = 2^x$ 為 2 個 2^5 相乘，一共有 5×2 個 5 相乘。
- 比較方法一及方法二答案皆相同，但方法一必須利用乘法算出答案，才能求出 x 的值。方法二只要利用乘法算出指數的和，就能求出 x 的值。教師應幫助學生看到 $(2^5)^2$ 時，指數為 5×2 兩數相乘的關係。
- 為了區分運算符號(減號)和性質符號(負號)，建議教師應幫助學生養成數字前面有負號的性質符號時，要加上括號。
例如將 -4×-4 記成 $(-4) \times (-4)$ ，將 $-4 - -4$ 記成 $(-4) - (-4)$ 。
- 教師也可以舉例分數的例子，幫助學生熟悉 $(a^m)^n = a^{m \times n}$ 。

基本學習內容：NC-7-7-1、2 乘法指數律、除法指數律

(5)請你比較看看，下列各題中兩式的大小。

① $2^3 \times 5^3 \square (2 \times 5)^3$

② $(-4)^2 \times (-3)^2 \square [(-4) \times (-3)]^2$

解：

①



方法一：

$$2^3 \times 5^3 = (2 \times 2 \times 2) \times (5 \times 5 \times 5) = 8 \times 125 = 1000$$

$$(2 \times 5)^3 = (2 \times 5) \times (2 \times 5) \times (2 \times 5) = 10 \times 10 \times 10 = 1000$$

由上面兩個答案我們可以知道 $2^3 \times 5^3 = (2 \times 5)^3$

答： $2^3 \times 5^3 = (2 \times 5)^3$

方法二：

$$2^3 \times 5^3 = (2 \times 2 \times 2) \times (5 \times 5 \times 5)$$

$$= 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5$$

$$= (2 \times 5) \times (2 \times 5) \times (2 \times 5)$$

$$(2 \times 5)^3 = (2 \times 5) \times (2 \times 5) \times (2 \times 5)$$

$$\text{因此 } 2^3 \times 5^3 = (2 \times 5)^3$$

答： $2^3 \times 5^3 = (2 \times 5)^3$

②

$$(-4)^2 \times (-3)^2 = [(-4) \times (-4)] \times [(-3) \times (-3)]$$

$$= (-4) \times (-3) \times (-4) \times (-3)$$

$$= [(-4) \times (-3)] \times [(-4) \times (-3)]$$

$$= [(-4) \times (-3)]^2$$

答： $(-4)^2 \times (-3)^2 = [(-4) \times (-3)]^2$



由上面的兩個例題，我們可以發現

$$2^3 \times 5^3 = (2 \times 5)^3$$

$$(-4)^2 \times (-3)^2 = [(-4) \times (-3)]^2$$



隨堂練習

請你算算看，下列各式的 x 是多少？

① $4^3 \times (-3)^3 = x^3$

② $(-2)^2 \times 3^2 = x^2$

答：①-12 ②-6



教材內容說明：

1. 本教材第 5 頁的教學重點是理解 $a^m \times b^m = (a \times b)^m$ 。
2. 第(5)題給定 $2^3 \times 5^3 \square (2 \times 5)^3$ 及 $(-4)^2 \times (-3)^2 \square [(-4) \times (-3)]^2$ ，要求學生比較兩者大小，本教材提供兩種解題的方法：
方法一：直接算出答案之後比較出兩者相等。
方法二：透過交換律與結合律看到兩者相等的關係。
 - 方法一分別將 $2^3 \times 5^3 = 1000$ 及 $(2 \times 5)^3 = 1000$ 計算出來，透過兩式的值，知道兩者相等。
方法二透過乘法的交換律與結合律，將算式中的運算次序調換，得到 $2^3 \times 5^3 = (2 \times 5)^3$ 的結果。雖然兩個方法都可以得到相等的關係，但教師應幫助學生使用方法二，透過交換運算次序，得到兩式相等的關係。
 - 為了區分運算符號(減號)和性質符號(負號)，建議教師應幫助學生養成數字前面有負號的性質符號時，要加上括號。
例如將 -4×-4 記成 $(-4) \times (-4)$ ，將 $-4 - -4$ 記成 $(-4) - (-4)$ 。
 - 透過本題讓學生看到 $a^m \times b^m = (a \times b)^m$ 的關係。



基本學習內容：NC-7-7-1、2 乘法指數律、除法指數律



小試身手

(1)請你算算看，下列各式的 x 是多少？

$$\textcircled{1} 6^3 \times 6^9 = 6^x$$

$$\textcircled{2} (-4)^3 \times (-4)^{11} = (-6)^x$$

答：①12 ②14

(2)請你算算看，下列各式的 x 是多少？

$$\textcircled{1} 11^5 \div 11^2 = 11^x$$

$$\textcircled{2} (-13)^7 \div (-13)^4 = (-13)^x$$

答：①3 ②5

(3)請你算算看，下列各式的 x 是多少？

$$\textcircled{1} (7^3)^5 = 7^x$$

$$\textcircled{2} [(-5)^2]^5 = (-5)^x$$

答：①15 ②10

(4) 請你算算看，下列各式的 x 是多少？

$$\textcircled{1} 7^5 \times (-3)^5 = x^5$$

$$\textcircled{2} (-5)^3 \times (-2)^3 = x^3$$

答：①-21 ②10



教材內容說明：

1. 本頁教材提供指數的意義練習題(1)~(4)題。

第 1 題:利用乘法指數律得到答案。

第 2 題:利用除法指數律得到答案。

第 3 題:利用 $(a^m)^n = a^{m \times n}$ 計算出答案。

第 4 題:利用 $a^m \times b^m = (a \times b)^m$ 計算出答案。



教育部國民及學前教育署 編

國民中學
學生學習扶助教材 **7** 年級數學

