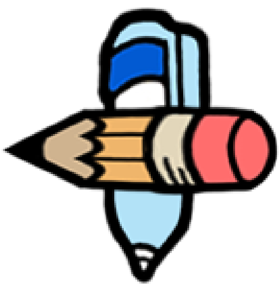
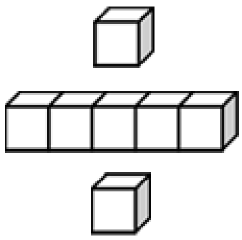
基本學習內容：NC-7-2-2

能用質因數分解法及短除法求最大公因數及最小公倍數

班級：______________

姓名：______________



教育部國民及學前教育署 編
中華民國 111 年 8 月

◎複習活動

(1) ① 2×3 是否為 2×3×7 的因數?
② 2×5 是否為 2×3×7 的因數?
③ 2×2 是否為 2×3×7 的因數?

解：

① (2×3)為(2×3)×7 的因數。
②因為 2×3×7 沒有質因數 5，無法寫成(2×5) ×□，所以 2×5 不是它的因數。
③因為 2×3×7 的質因數 2 只有一個，無法寫成(2×2) ×□，所以 2×2 不是它的因數。

答： ① 是　②是　③不是

由上例可以發現，將甲數寫成質因數的連乘積，乙數是此質因數連乘積中部分算式的乘積，則乙數是甲的因數。
例如：2×3、2×7、3×7 都是 2×3×7 的因數。
如果丙數是合數，且不是甲數的質因數連乘積中部分算式的乘積所得，則丙數不是甲數的因數。
例如：2×2、2×5 都不是 2×3×7 的因數。

(2) 已知 42=2×3×7，求 42 的所有因數。

解：

方法一：42=1×42
=2×21
=3×14
=6×7
所以 42 的因數有 1、2、3、6、7、14、21、42

方法二：先列出 1，再列出 42 的質因數，得 2、3、7
再列出是合數也是 42 的因數，得
兩個質因數相乘：2×3、2×7、3×7
三個質因數相乘：2×3×7
所以 42 的因數有 1、2、3、7、2×3、2×7、3×7、2×3×7

答： 1、2、3、7、2×3、2×7、3×7、2×3×7

隨堂練習

(1) 已知 30=2×3×5，求 30 的所有因數。

◎以標準分解式判別因數與倍數

(1) ①判別 $\mathbf{5^3}$ 是否為 $\mathbf{5^2}$ 的倍數？
②判別 $\mathbf{2\times3^3\times5^2}$ 是否為 $\mathbf{2\times3}$ 的倍數？
③判別 $\mathbf{2\times3^3}$ 是否為 $\mathbf{2^2\times3^2}$ 的倍數？

解：若有兩數以標準分解式表示如下：

①方法一：我直接將兩數除除看，

$\mathbf{5^3}$ **及** $\mathbf{5^2}$：因為 $5^3\div5^2=\dfrac{5^3}{5^2}=\dfrac{5\times\cancel{5}\times\cancel{5}}{\cancel{5}\times\cancel{5}}=5$ 所以 5^3 是 5^2 的倍數。

方法二：我用指數律來判斷，因為 $5^3=5^2\times5$，所以 5^3 是 5^2 的倍數。

②方法一：我直接將兩數除除看，

$\mathbf{2\times3^3\times5}$ **及** $\mathbf{2\times3^2}$：因為 $(2\times3^3\times5)\div(2\times3^2)=\dfrac{2\times3^3\times5}{2\times3^2}=\dfrac{\cancel{2}\times\cancel{3}\times\cancel{3}\times3\times5}{\cancel{2}\times\cancel{3}\times\cancel{3}}=15$，

所以 $2\times3^3\times5$ 是 $2^2\times3^2$ 的倍數。

方法二：我用指數律來判斷，

因為 $2\times3^3\times5=(2\times3)\ \times3^2\times5$，

所以 $2\times3^3\times5$ 是 2×3 的倍數。

③方法一：我直接將兩數除除看，

$\mathbf{2\times3^3}$ **及** $\mathbf{2^2\times3^2}$：因為 $(2\times3^3)\div(2^2\times3^2)=\dfrac{2\times3^3}{2^2\times3^2}=\dfrac{\cancel{2}\times\cancel{3}\times\cancel{3}\times3}{2\times\cancel{2}\times\cancel{3}\times\cancel{3}}=\dfrac{3}{2}$（非整數），

所以 2×3^3 不是 $2^2\times3^2$ 的倍數。

方法二：我用指數律來判斷

因為 2×3^3 的質因數 2 只有 1 個，無法寫成$(2^2\times3^2)\times\square$，所以 2×3^3 不是它的倍數。

答：① 是　②是　③不是

隨堂練習

(1) 以下各數中，哪些是 2×5 的倍數？

5^2、2×3^2、$2\times3\times5$、$2^3\times5$、$2^3\times5^2$

(2) ①判別 5^2 是否為 5^3 的因數？

②判別 2×3^2 是否為 $2\times3^3\times5$ 的因數？

解：

①方法一：我用指數律來判斷，因為 $5^3=5^2\times5$，所以 5^3 是 5^2 的倍數，
5^2 是 5^3 的因數。

方法二：我先改寫成質因數連乘積再判斷。
因為 $5^3=5\times5\times5$，$5^2=5\times5$，表示 $5^3=(5\times5)\times5$，所以 5^2 是 5^3 的因數。

②方法一：我用指數律來判斷，
因為 $2\times3^3\times5=(2\times3^2)\ \times3\times5$，
所以 $2\times3^3\times5$ 是 2×3^2 的倍數，2×3^2 是 $2\times3^3\times5$ 的因數。

方法二：我先改寫成質因數連乘積再判斷
因為 $2\times3^3\times5=2\times3\times3\times3\times5$，$2\times3^2=2\times3\times3$
因為 $2\times3^3\times5=2\times3\times3\times3\times5=(2\times3\times3)\times3\times5=(2\times3^2)\ \times3\times5$，
所以 $2\times3^3\times5$ 是 2×3^2 的倍數，2×3^2 是 $2\times3^3\times5$ 的因數。

答： ① 是　②是

(3) 判別 2×3^3 是否為 $2^2\times3^2$ 的因數？

解：

方法一:我用指數律來判斷，設 a 是整數
$2\times3^3\times a$，只會讓 3 的次方變大，也就是 3 的次方必須大於等於 3，
所以 $2\times3^3\times a$ 不會等於 $2^2\times3^2$，因此 2×3^3 不是 $2^2\times3^2$ 的因數。

方法二:我先改寫成質因數連乘積，再判斷

$$2\times3^3 = \quad 2\times3\times3\times3$$
$$2^2\times3^2 = 2\times2\times3\times3$$

因為 $2\times3^3= 2\times3\times3\times3$ 不是 $2^2\times3^2=2\times2\times3\times3$ **部分算式**的連乘積，
所以 2×3^3 不是 $2^2\times3^2$ 的因數。

答： 不是

隨堂練習

(1) 以下各數中，哪些是 $2^3\times5^2$ 的因數？
5^2、2×5、2×3^2、$2^3\times5$

將 a、b 兩數寫成標準分解式時，

(1)當 a 為 b 的**倍數**，則 b 的質因數都是 a 的質因數，

且 a 的每個質因數的次方大於或等於 b 相同質因數的次方。

例如：**$2\times3^3\times5$ 是 2×3^2 的倍數。**

(2)當 a 為 b 的**因數**，則 a 的質因數都是 b 的質因數，

且 a 的每個質因數的次方小於或等於 b 相同質因數的次方。

例如：**2×3^2 是 $2\times3^3\times5$ 的因數。**

(4) 判別 $2^2\times3^2\times5\times7$ 是否為 $2^2\times3^3\times7$ 的倍數？

解：

因為 $2^2\times3^2\times5\times7$ 質因數 3 的次方小於 $2^2\times3^3\times7$ 質因數 3 的次方，

故 $2^2\times3^2\times5\times7$ **不是** $2^2\times3^3\times7$ 的倍數。

答： 不是

(5) 判別 2×3^2 是否為 $2\times3^2\times5$ 的因數？

解：

因為2×3^2的質因數2和3的次方都小於$2\times3^2\times5$質因數2和3的次方，

因此 $2\times3^2\times5=(2\times3^2)\times(2\times5)$，故 2×3^2 **是**$2\times3^2\times5$的因數。

答： 是

隨堂練習

下列各數中，那些 $3^3\times5$ 的倍數?

3^4 、 $3^2\times5^2$ 、 $3^3\times5\times7$ 、 $2^2\times3^2\times5$

(6) 已知 $a=2^3\times3^2\times5\times11$，下列哪些數是$a$的倍數？哪些數是$a$的因數？

①$2\times3^2$　②$2^4\times3^2\times5\times7\times11$　③$2\times3^3$　④$2^2\times3^2$　⑤$7^2\times13$

解：

①因為2×3^2 質因數 2和3的次方都小於a的質因數2和3的次方。

可以寫成$a=(2\times3^2)\times2^2\times5\times11$，所以$2\times3^2$ **是**a的因數。

②因為$2^4\times3^2\times5\times7\times11=(2^3\times3^2\times5\times11)\times2\times7=a\times2\times7$ **是**a的倍數。

③因為 2×3^3 質因數3的次方大於a的質因數3的次方，所以2×3^3 **不是**a的因數。

④因為 $2^2\times3^2$質因數2和3的次方都小於或等於a的質因數2和3的次方。

可以寫成$a=(2^2\times3^2)\times2\times5\times11$，所以$2^2\times3^2$ **是**a的因數。

⑤因為a的質因數沒有7和13，所以$7^2\times13$ **不是**a的因數。

答： a的因數: ①④　a的倍數: ②

(7) 已知$36=2^2\times3^2$，請寫出36的所有因數？

解：

方法一

先列出 1，

再寫出 36 的質因數得 2、3

再列出是合數也是 36 的因數，得

兩個質因數相乘：2×2、3×3、2×3

三個質因數相乘：2×2×3、2×3×3

四個質因數相乘：2×2×3×3

方法二

先列出 1

先列出形式是 2^m 的因數，得 2^1、2^2

再列出形式是 3^n 的因數，得 3^1、3^2

最後列出形式是 $2^m\times3^n$ 的因數，

得 $2^1\times3^1$、$2^1\times3^2$、$2^2\times3^1$、$2^2\times3^2$

可以用樹狀圖來分析

$$\begin{tikzcd} 2^1 \arrow[d] \arrow[dr] & 2^2 \arrow[d] \arrow[dl] \\ 3^1 & 3^2 \end{tikzcd}$$

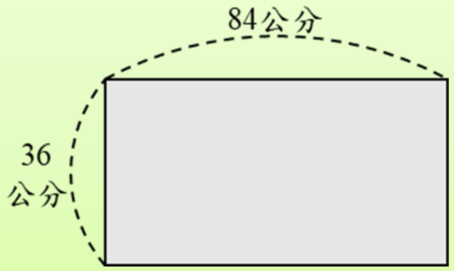
因此 36 的所有因數有 1、2、3、2^2、3^2、2×3、2×3^2、$2^2\times3$、$2^2\times3^2$

隨堂練習

有多少個正整數是 18 的倍數，同時也是 216 的因數？

◎複習活動-應用問題的分析活動

有一張長36公分、84公分的長方形紙卡，要分割成一樣大的正方形紙片，正方形紙片的邊長是整數公分，且剛好分完。可以分割成邊長幾公分的正方形？



解：

我們從長方形的長邊與短邊分析發現

長邊分割成幾個正方形×正方形邊長＝84-----正方形邊長是84 的因數

短邊分割成幾個正方形×正方形邊長＝36-----正方形邊長是36 的因數

正方形邊長 -----------是 84和 36 的公因數

我們利用短除法找到 36、84 的最大公因數(36, 84) = $2^2 \times 3$(或 12)

$$
\begin{array}{r|rr}
2 & 36 & 84 \\ \hline
2 & 18 & 42 \\ \hline
3 & 9 & 21 \\ \hline
 & 3 & 7
\end{array}
$$

← 36、84有公因數2

← 18、42有公因數2

← 9、21有公因數3

← 3、7沒有共同質因數

所以36、84的最大公因數(36, 84) = $2^2 \times 3$(或12)

答: 邊長 12 公分的正方形

◎標準分解式與最大公因數

(1)已知 $24=2^3\times3$，$36=2^2\times3^2$，求 24 和 36 的最大公因數。

解：

方法一：我先改寫成質因數連乘積，再找最大公因數。

$$24 = 2^3\times3 = 2\times2\times2\times3$$
$$36 = 2^2\times3^2 = 2\times2\times3\times3$$

方法二: 我先列出 24 的所有因數，也列出 36 的所有因數，再找最大的公因數。
透過觀察上面的分解式

24的因數有 1、2、3、2^2、2×3、2^3、$2^2\times3$、$2^3\times3$

36的因數有 1、2、3、2^2、2×3、3^2、$2^2\times3$、$2^2\times3^2$

我們可以發現：

24 和 36 的最大的共同因數是 $2^2\times3$，也就是所有共同質因數的乘積。

我們以符號(24 , 36)來表示 24 和 36 的最大公因數，也就是 $(24, 36) = 2^2\times3 =12$。

若我們從 24 和 36 的標準分解式來看 24 和 36 的最大公因數，其質因數 2 的部份只有 2 次方，質因數 3 的部份只有 1 次方，也就是說當我們取兩數的最大公因數的時候，我們只要關注**共同質因數**，並取共同質因數的**最小指數(次方)**相乘，即為兩數的最大公因數。

標準分解式

$$24 = 2^3 \qquad \times3$$
$$36 = 2^2 \qquad \times3^2$$

1是最小的次方，取2　　1是最大的次方，取3

質因數分解式

$$24 = 2\times2\times2\times3$$
$$36 = 2\times2\times3\times3$$

短除法

$$\begin{array}{r|rr} 2 & 24 & 36 \\ 2 & 12 & 18 \\ 3 & 6 & 9 \\ & 2 & 3 \end{array}$$

24、36有公因數2

12、18有公因數2

6、9有公因數3

2、3沒有共同質因數

所以24、36的最大公因數$(24, 36) = 2^2\times3$(或12)

所以$(24 , 36)= 2^2\times3$ (或 12)

求 a、b 兩數的最大公因數(a,b)時，可先求出 a、b 的標準分解式：

(1) 如果可以找出兩者共同的質因數，則分別由**共同質因數**，取**指數(次方)最小**者相乘，即為 a、b 兩數的最大公因數。

(2) 若找不到共同質因數，則 a 和 b 的最大公因數為 1，即 a 和 b 互質。

(2) 已知 $a=2^3\times3^2\times5\times7\times11$、$b=2^2\times3^3\times5\times7$，求 a 和 b 的最大公因數。

解：

方法一：我將標準分解式改寫成質因數連乘積

$$a=2\times2\times2\times3\times3\times5\times7\times11$$

$$b=2\times2\times3\times3\times3\times5\times7$$

因此 $(a, b)=2\times2\times3\times3\times5\times7=2^2\times3^2\times5\times7$

方法二：

我直接找出標準分解式，選次方比較小的抓出來，剩下的都抓到後面去，

結果發現比較小的就是公因數。

$$a=2^2\times2\times3^2\times5\times7\times11\quad=(2^2\times3^2\times5\times7)\times2\times11$$

$$b=2^2\times3^2\times3\times5\times7\quad=(2^2\times3^2\times5\times7)\times3$$

因此 $(a, b)=2^2\times3^2\times5\times7$

已知幾個整數的標準分解式時，先列出他們的共同質因數，每一個共同質因數取次方最小者，然後再相乘，即為它們的最大公因數。

$a=2^3$	$\times3^2$	$\times5^1$	$\times7^1$	$\times11^1$
$b=2^2$	$\times3^3$	$\times5^1$	$\times7^1$	
2是最小的次方，取 2^2	2是最小的次方，取 3^2	1是最小的次方，取 5^1	1是最小的次方，取 7^1	沒有共同的質因數

因此 $(a, b)=2^2\times3^2\times5\times7$

(3) 求下列各組數的最大公因數，並以標準分解式表示。

① 120、$2^2\times5\times7$　　② $2^2\times3^3\times7$、$2^3\times3^2\times5$

解：

(1) 先將 120 化為標準分解式為 $2^3\times3\times5$，再比較 $2^2\times5\times7$ 之後，得到共同質因數有 2 和 5，質因數 2 的最小指數(次方)為 2，質因數 5 的指數次方皆為 1，得到兩數的最大公因數為 $2^2\times5$

$120=$	2^3	$\times3^1$	$\times5^1$	
$2^2\times5\times7=$	2^2		$\times5^1$	$\times7^1$
	2是最小的次方，取 2^3	沒有共同的質因數	1是最小的次方，取 5^1	沒有共同的質因數

因此 $(120,\ 2^2\times5\times7)=2^2\times5$

(2) $2^2\times3^3\times7$、$2^3\times3^2\times5$ 兩數的共同質因數有 2 和 3，質因數 2 的最小指數(次方)為 2，質因數 3 的最小指數次方為 2，得到兩數的最大公因數為 $2^2\times3^2$

$2^2\times3^3\times7=$	2^2	$\times3^3$		$\times7^1$
$2^3\times3^2\times5=$	2^3	$\times3^2$	$\times5^1$	
	2是最小的次方，取 2^2	2是最小的次方，取 3^2	沒有共同的質因數	沒有共同的質因數

因此 $(2^2\times3^3\times7,\ 2^3\times3^2\times5)=2^2\times3^2$

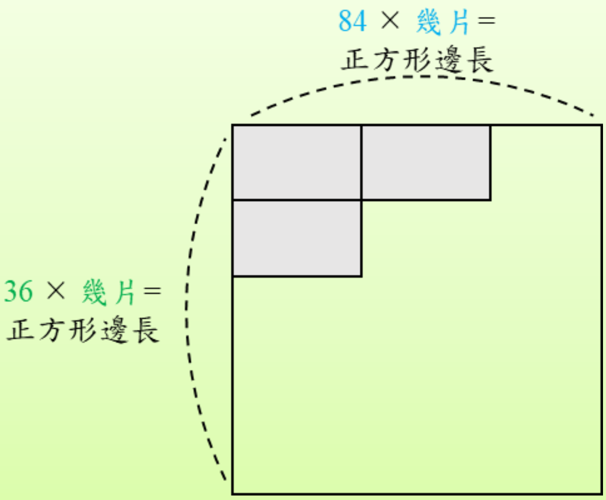
隨堂練習

(1) 求 $3^2\times5^3\times11$、$2\times5^2\times11$ 的最大公因數，並以標準分解式表示。

(2) 求 108、16×9 的最大公因數，並以標準分解式表示。

◎複習活動-應用問題的分析活動

教師慶祝大會，學生用長84公分、寬36公分的長方形卡片，排成一個正方形圖案布置會場，這個正方形圖案最少是幾公分?



解:

84 × 幾片 ＝ 正方形邊長 -----正方形邊長是84 的倍數

36 × 幾片＝ 正方形邊長 -----正方形邊長是36 的倍數

正方形邊長 -----是 84和 36 的公倍數

我們利用短除法找到 36、84 的最小公倍數[36, 84] = $2^2 \times 3^2 \times 7$ (或 252)

2	36	84	← 36、84有公因數 2
2	18	42	← 18、42有公因數 2
3	9	21	← 9、21有公因數 3
	3	7	← 3、7沒有共同質因數

所以36、84的最小公倍數[36, 84] 是這兩數的公因數與最下面一層 3、7的連乘積 = $2^2 \times 3^2 \times 7$(或 252)

答: 邊長 252 公分的正方形

◎標準分解式與最小公倍數

（1） 已知 $24=2^3\times3$，$36=2^2\times3^2$，求 24 和 36 的最小公倍數。

解：

我先改寫成質因數連乘積，再找最小公倍數。

$24 = 2^3\text{x}3 = 2\times2\times2\times3$

$36 = 2^2\times3^2 = 2\times2\times3\times3$

最小公倍數$=2\times2\times2\times3\times3=2^3\text{x}3^2$

我們可以發現：

24 和 36 的最小公倍數就是「共同的質因數分解 2x2x3，再乘上剩下的質因數 2×3」，即為 $2\times2\times2\times3\times3$。若我們以符號[24 ,36]來表示 24 和 36 的最小公倍數，$[24, 36]= 2\times2\times2\times3\times3$。此時最小公倍數[24 ,36]的標準分解式為 $2^3\text{x}3^2$，最小公倍數中質因數 2 的指數次方剛好是 24 的標準分解式中 2 的指數次方(24 和 36 的標準分解式中，質因數 2 的指數次方之最大者)，最小公倍數中質因數 3 的指數次方剛好是 36 的標準分解式中 3 的指數次方(24 和 36 的標準分解式中，質因數 3 的指數次方之最大者)，如下圖：

標準分解式

$24 = 2^3 \times 3$

$18 = 2 \times 3^2$

3是最大的次方，取 2^3

2是最大的次方，取 3

因此$[24,18] = 2^3\text{x}3^2$

質因數分解式

$24 = 2^3\text{x}3 = 2\times2\times2\times3$

$18 = 2\times3^2 = 2\times3\times3$

$[24,18] = 2\times2\times2\times3\times3$

短除法

2	36	84
2	18	42
3	9	21
	3	7

36、84有公因數 2

18、42有公因數 2

9、21有公因數 3

3、7沒有共同質因

$[36, 84] = 2^2\times3^2\times7$（或 252）

求 a、b 兩數的最小公倍數$[a,b]$時，可先求出 a、b 的標準分解式：**針對** a、b 的**每一個質因數**，取**指數（次方）最大**者，若質因數只出現在其中一數，則直接取該質因數的指數，最後將這些質因數與其對應的指數相乘，即為 a、b 兩數的最小公倍數。

例如：$a= 2\times3^2\times5$、$b= 2^3\times3\times7^2$，則$[a, b]= 2^3\times3^2\times5\times7^2$

(2) 已知 $a=2^3\times3^2\times5\times7\times11$、$b=2^2\times3^3\times5\times7$，求 a 和 b 的最小公倍數。

解：

方法一：我將標準分解式改寫成質因數分解式

$$\begin{array}{lcccccccccc} a= & 2 & \times2 & \times2 & \times3 & \times3 & & \times5 & \times7 & \times11 \\ b= & 2 & \times2 & & \times3 & \times3 & \times3 & \times5 & \times7 & \end{array}$$

因此 $[a, b]=2\times2\times3\times3\times5\times7\times2\times3\times11=2^3\times3^3\times5\times7\times11$

方法二：

找到次方最大的，再把這個數寫成 $2^3\times3^3\times5\times7\times11=a\times(?)$

$2^3\times3^3\times5\times7\times11=b\times(?)$

因此 $[a, b]=2^3\times3^3\times5\times7\times11$

已知幾個整數的標準分解式時，先列出他們的所有質因數，每一個共同質因數取次方最大者，然後再相乘，即為它們的最小公倍數。

我直接找標準分解式，比較每一個質因數，取次方較大者相乘後，就是最小公倍數。

	$a=2^3$	$\times3^2$	$\times5^1$	$\times7^1$	$\times11^1$
	$b=2^2$	$\times3^3$	$\times5^1$	$\times7^1$	
	↑	↑	↑	↑	↑
	3是最大的次方，取 2^3	3是最大的次方，取 3^3	1是最大的次方，取 5^1	1是最大的次方，取 7^1	1是最大的次方，取 11^1

因此 $[a, b]=2^3\times3^3\times5\times7\times11$

(3) 求下列各組數的最小公倍數，並以標準分解式表示。

① 120、$2^2\times5\times7$　　② $2^2\times3^3\times7$、$2^3\times3^2\times5$

解：

(1) 先將 120 化為標準分解式為 $2^3\times3\times5$，再比較 $2^2\times5\times7$ 之後，得到共同質因數有 2 和 5，質因數 2 的最大指數(次方)為 3，質因數 5 的指數次方皆為 1，再納入剩下的質因數 3 和 7 相乘，得到兩數的最小公倍數為 $2^3\times3\times5\times7$。

$120=$	2^3	$\times3^1$	$\times5^1$	
$2^2\times5\times7=$	2^2		$\times5^1$	$\times7^1$
	3是最大的次方，取 2^3	1是最大的次方，取 3^1	1是最大的次方，取 5^1	1是最大的次方，取 7^1

因此$[120,2^2\times5\times7]=2^3\times3\times5\times7$

(2) $2^2\times3^3\times7$、$2^3\times3^2\times5$ 兩數的共同質因數有 2 和 3，質因數 2 的最大指數(次方)為 3，質因數 3 的最小指數次方為 3，再納入剩下的質因數 5 和 7 相乘，得到兩數的最小公倍數為 $2^3\times3^3\times5\times7$。

$2^2\times3^3\times7=$	2^2	$\times3^3$		$\times7^1$
$2^3\times3^2\times5=$	2^3	$\times3^2$	$\times5^1$	
	3是最大的次方，取 2^3	3是最大的次方，取 3^3	1是最大的次方，取 5^1	1是最大的次方，取 7^1

因此$[2^2\times3^3\times7,2^3\times3^2\times5]=2^3\times3^3\times5\times7$

隨堂練習

(1) 求 $3^2\times5^3\times11$、$2\times5^2\times11$ 的最小公倍數，並以標準分解式表示。

(2) 求 108、16x9 的最小公倍數，並以標準分解式表示。

小試身手

1. 分別列出 12 和 15 在 150 以內的倍數，並寫出它們的公倍數及最小公倍數。

2. 求$\left[2^2\times3\times5，2\times3^2\times7\right]=$？

3. 求$[13，6]=$？

4. 求$[12，45]=$？

5. 下列各數中，哪些是 $2^2\times5^4\times7^3\times11$ 的因數？答：＿＿＿＿＿＿＿＿。
   (A) $5^3\times11$　(B) $2\times5^3\times11^2$　(C) $2^2\times5^2\times7^2$
   (D) $2\times5^2\times7\times11$　(E) $3^2\times5^4\times7^2\times11$

6. 下列各數中，哪些是 $3^2\times5\times7$ 的倍數？答：＿＿＿＿＿＿＿＿。
   (A) $3^3\times5^2\times7$　(B) $2\times3^2\times5^3$　(C) $3^2\times5^2\times7^2$　(D) $3\times5^2\times7$　(E) $3^2\times5^4\times7^2$

7. 求 $(2^3\times3^2\times5\times11, 2^2\times3^2\times7)=$？

8. 求 $[2^2\times3^2\times7^2, 2^2\times3^2\times5^2\times7^2]=$？

教育部國民及學前教育署 編

國民中學 學生學習扶助教材 7 年級數學