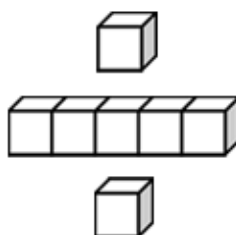


基本學習內容：NC-7-9-2

正比與反比

班級：_____

姓名：_____



◎正比

(1)用 200ml 的紅茶及 300ml 的鮮奶可調製成厚奶茶，若使用 400ml 的紅茶，需要多少鮮奶才能保持口味相同的厚奶茶？



200ml 的紅茶要搭配 300ml 鮮奶，可以看成 $200:300$
因為口味相同，而且 $200:300=400:600$ ，
所以 400ml 的紅茶需要 **600ml** 的鮮奶。

(2)承上題，老師準備 900ml 的紅茶，需多少鮮奶才能保持口味相同的厚奶茶？



上題的 $200:300$ 化成最簡單整數比等於 $2:3$ ，也就是 2 份紅茶和 3 份鮮奶可以調製成口味相同的厚奶茶。

因為 $900 \div 2 = 450$ ，可以看成 1 份是 450ml，900ml 的紅茶就是 2 份。所以需要鮮奶 3 份，就是 $3 \times 450 = 1350\text{ml}$ 。

(3)承上題，為了保持厚奶茶的口味都相同，所需要的材料必須維持一定比例。請你想一想，求出 a 、 b 所代表的數。

紅茶(ml)	200	400	900	1500	b
鮮奶(ml)	300	600	1350	a	3000

我發現一件事～

為了保持厚奶茶的口味相同，就是紅茶 2 份和鮮奶 3 份。

這裡的紅茶 2 份和鮮奶 3 份記成最簡單整數比 $2:3$ 。

如果將紅茶 1500ml 看成 2 份，則所需的鮮奶就寫成 $2:3=1500:a$ ， $a=2250$ 。

如果將鮮奶 3000ml 看成 3 份，則所需的鮮奶就寫成 $2:3=b:3000$ ， $b=2000$ 。



我知道了～

紅茶：鮮奶的最簡單整數比都是 $2:3$ ，而 $2:3$ 的比值就是 $2 \div 3 = \frac{2}{3}$

所以當兩數的最簡單整數比相等時其比值也相等。





(4) 下表是傍晚 5 點又利與班上 4 位同學在籃球場打球時所量測到的身高與影子長關係表。

	又利	小平	亮亮	阿凱	光正
身高(公分)	150	120	144	136	130
影長(公分)	75	60	72	68	65

請問身高和影長的①最簡單整數比相等嗎？②比值相等嗎？

將身高和影長關係製表：

	又利	小平	亮亮	阿凱	光正
身高(公分)	150	120	144	136	130
影長(公分)	75	60	72	68	65
身高：影長	$150 : 75$ $= 2 : 1$	$120 : 60$ $= 2 : 1$	$144 : 72$ $= 2 : 1$	$136 : 68$ $= 2 : 1$	$130 : 65$ $= 2 : 1$
身高和影長的比值	$\frac{150}{75} = 2$	$\frac{120}{60} = 2$	$\frac{144}{72} = 2$	$\frac{136}{68} = 2$	$\frac{130}{65} = 2$

① 身高和影長的最簡單整數比都等於 2 : 1。

② 身高和影長的比值都等於 2。

我發現最簡單整數比相等時，比值也會相等。

我知道了～

同一時間量測時，每位同學的身高和影長的比值都等於 2。

像這樣兩組數據中，對應的數據其比值都相等，

我們稱「兩組數據成正比關係」。



紅茶	鮮奶	比值
200	300	$\frac{2}{3}$
400	600	$\frac{2}{3}$
900	1350	$\frac{2}{3}$
\vdots	\vdots	\vdots
y	x	$\frac{y}{x}$

第(3)題中，如果將紅茶看成 y 毫升、鮮奶看成 x 毫升，
則紅茶和鮮奶的調配量的比值都是 $\frac{2}{3}$ ，寫成 $\frac{y}{x} = \frac{2}{3}$ ，
就是「紅茶的調配量和鮮奶的調配量成正比關係」。

身高	影長	比值
150	75	$\frac{150}{75} = 2$
120	60	$\frac{120}{60} = 2$
144	72	$\frac{144}{72} = 2$
\vdots	\vdots	\vdots
y	x	$\frac{y}{x}$

第(4)題中，如果將身高看成 y 公分、影長看成 x 公分，
則身高和影長的比值都是 2，成 $\frac{y}{x} = 2$ ，
就是「身高和影長成正比關係」。

從第(3)、(4)題得知，兩組數據中對應的數據其比值都相等時，會成正比關係。

當兩組數據成正比關係時，可以寫成 $\frac{y}{x} = k$ ，其中 k 就是比值。

也可以將 x 、 y 的關係式寫成 $y = kx$ ，例如：

第(3)題的正比關係式可以寫成 $y = \frac{2}{3}x$ ，第(4)題的正比關係式可以寫成 $y = 2x$ 。





(5) 下表是過季衣服拍賣的價格表。

件數(件)	1	2	3	4	5
價錢(元)	200	400	600	800	1000

衣服的件數和價錢成正比關係嗎？

解法一：找到件數和價錢的比值

件數(件)	1	2	3	4	5
價錢(元)	200	400	600	800	1000
件數和價錢的 比值	$\frac{1}{200}$	$\frac{1}{200}$	$\frac{1}{200}$	$\frac{1}{200}$	$\frac{1}{200}$

因為件數和價錢的**比值**都等於 $\frac{1}{200}$ ，所以衣服的件數和價錢成正比關係。

解法二：利用 x 、 y 的關係式檢查

設件數為 y 件時、價錢為 x 元，檢查「件數和價錢滿足 $y=kx$ 的關係」嗎？

將 $y=1$ 、 $x=200$ 代入 $y=kx$ ，求得 $k=\frac{1}{200}$

得到 x 、 y 的關係式為 $y=\frac{1}{200}x$ ，

接著將所有價格代入關係式檢查：

$y=2$ 、 $x=400$ 代入 $y=\frac{1}{200}x \rightarrow$ 成立

$y=3$ 、 $x=600$ 代入 $y=\frac{1}{200}x \rightarrow$ 成立

$y=4$ 、 $x=800$ 代入 $y=\frac{1}{200}x \rightarrow$ 成立

$y=5$ 、 $x=1000$ 代入 $y=\frac{1}{200}x \rightarrow$ 成立

因為件數與價錢代入關係式 $y=\frac{1}{200}x$ 都成立，

所以衣服的件數和價錢**成正比關係**。

(6) 承第(5)題，衣服的「件數」和「價錢」成正比關係，那麼「價錢」和「件數」也會成正比關係嗎？

價錢(元)	200	400	600	800	1000
件數(件)	1	2	3	4	5

解法一：找到「價錢」和「件數」的比值

價錢(元)	200	400	600	800	1000
件數(件)	1	2	3	4	5
件數和價錢的 比值	200	200	200	200	200

因為「價錢」和「件數」的比值都相等，
所以衣服的「價錢」和「件數」成正比關係。

解法二：利用 x 、 y 的關係式檢查

設價錢為 y 元時、件數為 x 件，檢查「價錢和件數滿足 $y=kx$ 的關係」嗎？

將 $y=200$ 、 $x=1$ 代入 $y=kx$ ，求得 $k=200$ ，

得到 x 、 y 的關係式為 $y=200x$ 。

接著將所有價格代入關係式檢查：

$y=400$ 、 $x=2$ 代入 $y=200x$ → 成立

$y=600$ 、 $x=3$ 代入 $y=200x$ → 成立

$y=800$ 、 $x=4$ 代入 $y=200x$ → 成立

$y=1000$ 、 $x=5$ 代入 $y=200x$ → 成立

因為「價錢」和「件數」代入關係式 $y=200x$ 都成立，

所以衣服的「價錢」和「件數」成正比關係。

我知道了～

若甲和乙成正比關係時，其對應項的比值 k 都會相等。

而乙和甲的對應項的比值都是 $\frac{1}{k}$ ，所以我們說乙和甲也成正比關係。





(7) 下表是爸爸和小佑年齡變化的關係表：

	現在	1 年後	2 年後	5 年後	10 年後
爸爸(歲)	32	33	34	37	42
小佑(歲)	2	3	4	7	12

爸爸和小佑的年齡成正比關係嗎？

解法一：找到爸爸和小佑年齡的比值

	現在	1 年後	2 年後	5 年後	10 年後
爸爸和 <u>小佑</u> 年齡的比值	$\frac{32}{2} = \frac{16}{1}$	$\frac{33}{3} = \frac{11}{1}$	$\frac{34}{4} = \frac{17}{2}$	$\frac{37}{7}$	$\frac{42}{12} = \frac{7}{2}$

因為爸爸和小佑年齡的比值都不相等，

所以爸爸和小佑的年齡不會成正比關係。

解法二：利用 x 、 y 的關係式檢查

設爸爸年齡= y 、小佑年齡= x ，爸爸和小佑的年齡滿足 $y=kx$ 的關係



將 $y=32$ 、 $x=2$ 代入 $y=kx$ ，求得 $k=16$

得到 x 、 y 的關係式為 $y=16x$ ，

接著將 1 年後的年齡代入關係式檢查：

$y=33$ 、 $x=3$ 代入 $y=16x \rightarrow$ 不成立

只要有一組年齡代入關係式不成立，則爸爸和小佑的年齡不會成正比關係。

我知道了～

如果「一個值增加，另一個值也隨著增加」不一定是正比關係，一定要檢查(1)比值是否相等或(2)代入 x 、 y 的關係式判斷兩數是否成正比關係。



(8) 某種合金的銅與鐵含量成正比關係，則：

① 求出 a 和 b 所代表的數字。 ② 找出 x 、 y 的關係式。

銅(公斤)	3	4.5	6	b
鐵(公斤)	4	a	8	14

銅和鐵的含量成正比關係，表示比值會相等。

$$\frac{\text{銅}}{\text{鐵}} = \frac{3}{4} = \frac{4.5}{a} = \frac{6}{8} = \frac{b}{14}$$



解法一：比值相等

$$\textcircled{1} \quad \frac{3}{4} = \frac{4.5}{a}$$

$$4 \times 4.5 = 3 \times a$$

$$18 = 3a$$

$$6 = a$$

$$\frac{3}{4} = \frac{b}{14}$$

$$4 \times b = 3 \times 14$$

$$4b = 42$$

$$b = \frac{42}{4} = \frac{21}{2}$$

② 設銅= y 、鐵= x ，則 $\frac{y}{x} = \frac{3}{4}$ ，可以寫成 $y = \frac{3}{4}x$ 。

解法二：利用 x 、 y 的關係式

設銅= y 、鐵= x ，滿足 $y=kx$ 的關係

將 $y=3$ 、 $x=4$ 代入 $y=kx$ ，求得 $k=\frac{3}{4}$ ，則 x 、 y 的關係式為 $y=\frac{3}{4}x \cdots \textcircled{2}$

接著將 $y=4.5$ 代入關係式，求出 $x=6$ ，

將 $x=14$ 代入關係式，求出 $y=\frac{21}{2} \cdots \textcircled{1}$



小試身手

(1) 下表是正三角形邊長與周長的關係表。

邊長(公分)	5	10	15	20	25
周長(公分)	15	30	45	60	75

正三角形的邊長和周長成正比關係嗎？

(2) 龍華麵包店推出同款麵包多買一個就折 5 元的回饋，也就是第 2 個麵包開始都比原價少 5 元。下表是小美和同學買麵包的數量及應付的價格。

	小美	阿傑	阿文	小庭
麵包(個)	1	2	3	4
應付價格(元)	30	55	80	105

麵包數量和應付價格成正比關係嗎？

(3) 已知爸爸騎健身車的時間與顯示的距離成正比關係，則：

時間 x (分鐘)	10	15	b	60
距離 y (公里)	2	a	8	12

① 求出 a 、 b 所代表的數。 ② 找出 x 、 y 的關係式。



◎反比

- (1)王老先生有一塊面積為 20 平方公尺的長方形菜園(邊長為整數)，長與寬有下列幾種可能：

	甲	乙	丙	丁	戊	己
長(公尺)	1	2	4	5	10	20
寬(公尺)	20	10	5	4	2	1

假設長= x ，寬= y ，找出寬的倒數 $\frac{1}{y}$ 和 $x:\frac{1}{y}$ 的比值，如下表：

	甲	乙	丙	丁	戊	己
長(x)	1	2	4	5	10	20
寬(y)	20	10	5	4	2	1
$\frac{1}{y}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1
$x:\frac{1}{y}$ 的 比值	$1:\frac{1}{20}$ =20	$2:\frac{1}{10}$ =20	$4:\frac{1}{5}$ =20	$5:\frac{1}{4}$ =20	$10:\frac{1}{2}$ =20	$20:1$ =20

因為 $x:\frac{1}{y}$ 的比值都相同，所以 x 與 $\frac{1}{y}$ 成正比關係。

我知道了～

- 如果兩組數據 x 、 y ，具有「 x 與 $\frac{1}{y}$ 成正比關係」，我們說「 x 與 y 成反比關係」。
- 在第(1)題中，假設長方形的長為 x 公尺、寬為 y 公尺。
先找出寬的倒數 $\frac{1}{y}$ ，我們發現 $x:\frac{1}{y}$ 比值都等於 20，所以「長方形的面積固定為 20 平方公尺時，長與寬成反比關係」，即「 $xy=20$ 」。
- 設長方形的長為 x 公尺、寬為 y 公尺。當長方形的面積固定為 k 平方公尺時，我們發現 $x:\frac{1}{y}$ 比值都相同，所以 x 與 y 成反比關係，記為「 $xy=k$ 」。
- 我們常直接用關係式 $xy=k$ 來檢查兩組數據 x 、 y 是否成反比關係，較為容易！！





(2) 香香蛋糕店推出四款 A、B、C、D 超人氣杯子蛋糕，售價分別是 A：20 元、B：30 元、C：40 元及 D：60 元。阿原帶了零用錢 600 元要買杯子蛋糕請同學吃，如果每次只買同一款杯子蛋糕且花完所有的錢，請問阿原各可以買到幾個杯子蛋糕？

①請將正確的數字填入下表。

②設該款杯子蛋糕的售價為 x 元、阿原買了 y 個，判斷售價 x 與個數 y 是否成反比關係？

	A	B	C	D
售價(元)	20	30	40	60
杯子蛋糕(個)				

①將 600 元分別除以四款杯子蛋糕的售價分別求出能買到的個數。

	A	B	C	D
售價(元)	20	30	40	60
杯子蛋糕(個)	30	20	15	10

②解法一：檢查「 x 和 $\frac{1}{y}$ 是否成正比」

杯子蛋糕個數 的倒數 ($\frac{1}{y}$)	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{10}$
---------------------------------	----------------	----------------	----------------	----------------

因為 $20:\frac{1}{30}$ 、 $30:\frac{1}{20}$ 、 $40:\frac{1}{15}$ 、 $60:\frac{1}{10}$ 的比值都是 600，

所以售價 x 與個數的倒數 $\frac{1}{y}$ 成正比關係，也就是售價 x 與個數 y 成反比關係。

③解法二：檢查「是否滿足 $xy=k$ 」

找第一筆數據，將 $x=20$ 、 $y=30$ 代入 $xy=k$ ，求得 $k=600$ ，

得到 x 、 y 的關係式為 $xy=600$ 。

接著將其他筆的數據代入關係式檢查：

$x=30$ 、 $y=20$ 代入 $xy=600$ → 成立

$x=40$ 、 $y=15$ 代入 $xy=600$ → 成立

$x=60$ 、 $y=10$ 代入 $xy=600$ → 成立

所以 x 、 y 滿足關係式 $xy=600$ ，也就是售價 x 與個數 y 成反比關係。



- (3) 龍華研究室培養細菌做傳染病實驗，每次實驗後細菌的數量就會減少。
下表是連續 5 小時細菌數量統計表：

時間	1 小時	2 小時	3 小時	4 小時	5 小時
剩下細菌數量(隻)	1000	900	800	700	600

時間和剩下的細菌數量成反比關係嗎？

我發現 1×1000 、 2×900 、 3×800 、 4×700 、 5×600 的值都不相等，
所以時間和剩下的細菌數量沒有滿足「 $xy=k$ 」的關係，故時間和剩下的
細菌數量不是反比關係。

- (4) 某台機器人行走 100 公尺的時間與速率結果如下表。

已知時間與速率成反比關係，請 a 、 b 、 c 所代表的數字。

	第一次	第二次	第三次
時間(秒)	50	b	100
速率(公尺/秒)	a	1.25	c

- ① 求出 a 、 b 、 c 所代表的數。 ② 找出時間與速率的關係式。

- ① 利用距離固定為 100 公尺分別算出 a 、 b 、 c 所代表的數。

第一次： $50 \times a = 100$ ，所以 $a = 100 \div 50 = 2$

第二次： $b \times 1.25 = 100$ ，所以 $b = 100 \div 1.25 = 80$

第三次： $100 \times c = 100$ ，所以 $c = 100 \div 100 = 1$

- ② 假設時間 = x 、速率 = y ，已知時間 \times 速率 = 距離

所以時間與速率的關係式為 $xy = 100$



小試身手

- (1) 某工廠生產商品需要甲、乙兩種原物料，請根據下表的數字，判斷甲、乙兩種原物料是否成反比關係。

	A	B	C	D	E
甲	20	16	10	60	15
乙	24	30	48	8	32

- (2) 食物鏈是表示物種之間「吃」與「被吃」的關係，而海洋中的海豹就是「吃」的角色，而烏賊就是「被吃」的食物之一。

下表為每個月統計某一區域海洋中海豹與烏賊數量的關係：

海豹(隻)	250	265	280	300
烏賊(尾)	500	480	460	440

海豹和烏賊的數量成反比關係嗎？

- (3) 已知 x 與 y 成反比關係，則：

x	150	100	b	80
y	a	30	24	c

① 算出表格中 a 、 b 、 c 所代表的值。

② 寫出 x 、 y 的關係式。



教育部國民及學前教育署 編

國民中學

學生學習扶助教材

7

年級數學

