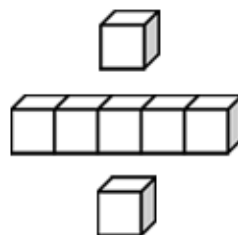


# 基本學習內容：NC-7-9-3

## 比例式的基本運算

班級：\_\_\_\_\_

姓名：\_\_\_\_\_





## 利用相等的比解題

(1) 如果 70 元可以買 8 顆湯包，丁丁一家人用餐點了 12 顆湯包，請問要付多少錢？

解：

方法一：我先算出一顆湯包  $\frac{70}{8}$  元，再算 12 顆湯包要付  $\frac{70}{8} \times 12 = 105$  元

方法二：我先假設要付  $x$  元，

$$\begin{array}{c} \times \frac{3}{2} \\ \text{將題目用比例式記錄為 } 70 : 8 = x : 12 \\ \times \frac{3}{2} \end{array}$$

$$\text{我知道 } \frac{12}{8} = \frac{3}{2}, \text{ 所以 } x = 70 \times \frac{3}{2} = 105$$

方法三：我先假設要付  $x$  元，題目用比例式記錄為  $70 : 8 = x : 12$

因為比值相等，可以寫成  $\frac{70}{8} = \frac{x}{12}$ ，再進行分母通分

$$\text{得到 } \frac{70 \times 12}{8 \times 12} = \frac{x \times 8}{12 \times 8}, \text{ 所以 } 70 \times 12 = x \times 8$$

$$\text{解得 } x = 105$$

所以丁丁一家人要付 105 元。



1. 從相等的比  $a : b = c : d$ ，他們的比值會相等，得到  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ 。

例如：從  $70 : 8 = 105 : 12$  可得  $\frac{70}{8} = \frac{105}{12}$ 。

2. 從  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ，將分母通分後  $\frac{a \times d}{b \times d} = \frac{c \times b}{d \times b}$ ，得到  $ad = bc$ 。

我們可以用**交叉相乘**來幫助記憶。

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} \rightarrow ad = bc$$

3. 從相等的比  $a : b = c : d$  中，可以直接得到  $ad = bc$ ，簡稱為「**內項乘積等於外項乘積**」。

例如：從  $70 : 8 = 105 : 12$  可得  $70 \times 12 = 8 \times 105$ 。



- (2) 阿叡今年  $(x-2)$  歲、父親今年  $(2x+3)$  歲，3 年前阿叡和父親的年齡比是 5 : 12，請問阿叡今年幾歲？

解：

我把題目用比例式記錄為  $[(x-2)-3] : [(2x+3)-3] = 5 : 12$ ，

整理比例式得到  $(x-5) : 2x = 5 : 12$

再利用「**內項乘積等於外項乘積**」

$$\text{得到 } 5 \times 2x = 12 \times (x-5)$$

$$10x = 12x - 60$$

$$-2x = -60$$

$$x = 30$$

所以阿叡今年  $30-2=28$  歲



(3) 用「內項乘積等於外項乘積」的方法，算出下列各題  $x$  的值。

①  $3 : 12 = x : 20$

②  $12 : x = \frac{3}{4} : 6$

③  $(x - 1) : (2x + 1) = 1 : 3$

④  $x : 2.4 = (2x - 1) : 8$

解：

①  $3 : 12 = x : 20$

→  $12 \times x = 3 \times 20$

→  $x = 3 \times 20 \div 12$

→  $x = 5$

②  $12 : x = \frac{3}{4} : 6$

→  $x \times \frac{3}{4} = 12 \times 6$

→  $x = 12 \times 6 \div \frac{3}{4}$

→  $x = 72 \times \frac{4}{3}$

→  $x = 96$

③  $(x - 1) : (2x + 1) = 1 : 3$

→  $1 \times (2x + 1) = 3 \times (x - 1)$

→  $2x + 1 = 3x - 3$

→  $1 + 3 = 3x - 2x$

→  $4 = x$

④  $x : 2.4 = (2x - 1) : 8$

→  $2.4 \times (2x - 1) = x \times 8$

→  $4.8x - 2.4 = 8x$

→  $-3.2x = 2.4$

→  $x = -0.75$



(4) 機器人 180 分鐘可以跑完 42 公里，如果速度不變，則機器人需要花多少分鐘跑完 14 公里呢？

解：

方法一：

假設需要花  $x$  分鐘

因為機器人的速度不變，所以列式  $180:42 = x:14$

利用「內項乘積等於外項乘積」 $180:42 = x:14$

得到  $42 \times x = 180 \times 14$

$$\rightarrow x = 180 \times 14 \div 42$$

$$\rightarrow x = 60$$

所以機器人需要花 60 分鐘跑完 14 公里。

方法二：

假設需要花  $x$  分鐘

我發現 42 公里是 14 公里的 3 倍，則 180 分鐘也要是  $x$  分鐘的 3 倍，

所以問題可以記成  $180:x = 42:14$ ， $x = 180 \div 3 = 60$ 。

所以機器人跑 14 公里花了 60 分鐘。

從  $180:42 = 60:14$  可以改寫成  $180:60 = 42:14$ ，

再由比值相等可以得到  $\frac{180}{60} = \frac{42}{14}$ 。

所以從  $a:b = c:d$  可以改寫成  $a:c = b:d$ ，

再由比值相等可以寫成  $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ 。





### 重點整理

1. 如果  $a : b = c : d$ ，則  $ad = bc$ 。
2. 如果  $a : b = c : d$ ，則  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  或  $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ 。
3. 如果  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  或  $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ ，可以推得  $ad = bc$ 。
4. 如果  $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ ，則  $a : b = c : d$ 。

(5) 已知  $\frac{a}{b} = \frac{4}{3}$ ，下列哪些選項中  $a$ 、 $b$  兩數的關係正確？

(甲)  $a : b = 4 : 3$     (乙)  $a : 4 = b : 3$     (丙)  $3 : a = 4 : b$

(丁)  $3a = 4b$     (戊)  $\frac{a}{4} = \frac{b}{3}$

解：

我知道比值相等  $\frac{a}{b} = \frac{4}{3}$ ，可以推得相等的比  $a : b = 4 : 3 \cdots$ (甲)

利用「內項乘積等於外項乘積」，可以推得  $3a = 4b \cdots$ (丁)

將  $3a = 4b$  兩邊同除以 12，得到  $\frac{3a}{12} = \frac{4b}{12}$ ，約分後可推得  $\frac{a}{4} = \frac{b}{3} \cdots$ (戊)

因為比值相等  $\frac{a}{4} = \frac{b}{3}$ ，可以推得相等的比  $a : 4 = b : 3 \cdots$ (乙)

(丙)  $3 : a = 4 : b$ ，利用「內項乘積等於外項乘積」，推得  $4a = 3b$ ，

與題意不合

所以(甲)(乙)(丁)(戊)成立



- (6) 在實驗室中，老師希望學生能夠學會調出特定濃度的鹽水。老師要求每一組要製造出不同重量的鹽水。

請你找出各組所需要的『鹽』和『水』的重量。

	鹽(g)	水(g)	鹽水(g)
特定濃度	8	25	33
第 1 組			99
第 2 組			165
第 3 組			49.5

解：

我發現『鹽』和『水』的最簡整數比是8：25，想成『鹽』有8份、『水』有25份，合起來『鹽水』有33份，再把1份想成 $k$ 公克。

第1組：33份的鹽水是99公克，所以1份是 $99 \div 33 = 3$ (公克)，

所以『鹽』有8份， $8 \times 3 = 24$ (g)

『水』有25份， $25 \times 3 = 75$ (g)。

第2組：33份的鹽水是165公克，所以1份是 $165 \div 33 = 5$ (公克)，

所以『鹽』有8份， $8 \times 5 = 40$ (g)

『水』有25份， $25 \times 5 = 125$ (g)。

第3組：33份的鹽水是49.5公克，所以1份是 $49.5 \div 33 = 1.5$ (公克)，

所以『鹽』有8份， $8 \times 1.5 = 12$ (g)

『水』有25份， $25 \times 1.5 = 37.5$ (g)。

第(6)題中，我們發現最簡整數比是8：25，可以想成8份對25份。設1份是 $k$ ，則前項有 $8k$ 、後項有 $25k$ ，如下表。

	鹽(g)	水(g)	鹽水(g)
特定濃度	8	25	33
第 1 組	$8 \times 3$	$25 \times 3$	$33 \times 3 = 99$
第 2 組	$8 \times 5$	$25 \times 5$	$33 \times 5 = 165$
第 3 組	$8 \times 1.5$	$25 \times 1.5$	$33 \times 1.5 = 49.5$
⋮	⋮	⋮	⋮
第 $k$ 組	$8 \times k$	$25 \times k$	$33 \times k$

如果最簡整數比 $a : b$ ，可以將前項想成 $a$ 份、後項想成 $b$ 份，設1份是 $k$ ，所以和 $a : b$ 相等的比都可以寫成 $ak : bk$ 。

也就是當 $a : b = c : d$ 時，則 $c = ak$ 、 $d = bk$  ( $k \neq 0$ )。





(7) 超夯奶茶的黃金比例是鮮奶與紅茶的比例為 6 : 5。

小金買了一杯特大杯 770 毫升的超夯奶茶，請問店員應加入鮮奶和紅茶各多少毫升？

解：

因為鮮奶：紅茶 = 6 : 5，所以鮮奶有 6 份、紅茶有 5 份

我假設一份是  $k$  毫升，所以鮮奶有  $6k$  毫升、紅茶有  $5k$  毫升 ( $k \neq 0$ )

根據題意，

列一元一次方程式  $6k + 5k = 770$

$$11k = 770$$

$$k = 70$$

所以要加入鮮奶  $6 \times 70 = 420$  毫升、紅茶  $5 \times 70 = 350$  毫升。

(8) 如果  $a : b = 3 : 4$ ，請求出下列各題的比值，並化成最簡分數。

①  $8a : 5b$

②  $(2a + b) : (5a - 3b)$

解：

假設  $a = 3r$ 、 $b = 4r$  ( $r \neq 0$ )

① 將  $a = 3r$ 、 $b = 4r$  代入  $8a : 5b$ ，

$$\begin{aligned} \text{得到 } 8a : 5b &= (8 \times 3r) : (5 \times 4r) \\ &= 24\cancel{r} : 20\cancel{r} \quad (\text{因為 } r \neq 0, \text{ 所以同除以 } r) \\ &= 24 : 20 \quad (\text{同除以 } 4) \\ &= 24 : 20 \end{aligned}$$

所以  $8a : 5b = 6 : 5$ ，比值為  $\frac{6}{5}$ 。

② 將  $a = 3r$ 、 $b = 4r$  代入  $(2a + b) : (5a - 3b)$ ，

$$\begin{aligned} \text{得到 } (2a + b) : (5a - 3b) &= (2 \times 3r + 4r) : (5 \times 3r - 3 \times 4r) \\ &= 10\cancel{r} : 3\cancel{r} \quad (\text{因為 } r \neq 0, \text{ 所以同除以 } r) \\ &= 10 : 3 \end{aligned}$$

所以  $(2a + b) : (5a - 3b) = 10 : 3$ ，比值為  $\frac{10}{3}$ 。





- (9) 一開始的柳橙汁裡面的水與柳橙原汁的比為 $5:3$ ，媽媽加入 $220$ 毫升的水稀釋，結果水與柳橙原汁的比變為 $7:2$ 。請問一開始的柳橙汁有多少毫升？

解：

因為水與柳橙原汁的比為 $5:3$ ，我想成水有 $5$ 份、柳橙原汁有 $3$ 份。

設一份是 $k$ 毫升，所以水有 $5k$ 毫升、柳橙原汁有 $3k$ 毫升

將題目用比例式記錄為 $(5k + 200):3k = 7:2$

利用「內項乘積等於外項乘積」

$$\text{得到} \quad 7 \times 3k = 2 \times (5k + 220)$$

$$21k = 10k + 440$$

$$11k = 440$$

$$k = 40$$

一開始的柳橙汁有 $5k + 3k = 8k$ ，將 $k = 40$ 代入，得到 $8 \times 40 = 320$ 毫升



### 小試身手

(1) 算出下列各題  $x$  的值。

①  $10 : 9 = 14 : x$

③  $(x + 2) : 6 = (x + 8) : 8$

②  $\frac{2}{3}x : \frac{3}{2} = 8 : 3$

④  $(2x + 1) : (x - 3) = (-3) : 2$

(2) 如果  $3x = 5y$ ，下列哪些選項中  $x$ 、 $y$  兩數的關係正確？

(A)  $x : y = 5 : 3$       (B)  $\frac{x}{y} = \frac{5}{3}$

(C)  $\frac{x}{3} = \frac{y}{5}$       (D)  $x : 3 = y : 5$

(3) 有兩數  $x$ 、 $y$ ，如果  $x : y = 3 : 2$ ，而且  $x + y = 20$ ，  
請算出  $x$ 、 $y$  的值分別為多少？

(4) 阿丁和小王各有一些零用錢，且阿丁零用錢的 2 倍和小王零用錢的 3 倍一樣多，請計算下列問題：

① 阿丁的零用錢：小王的零用錢 = ？。

② 承上題，如果阿丁和小王的零用錢共有 500 元，  
那麼阿丁和小王的零用錢各有多少元？

(5) 箱子裡有一些蘋果和梨子，如果蘋果顆數的 5 倍等於梨子顆數的 4 倍，  
而且蘋果比梨子少 21 顆，則蘋果和梨子各有多少顆？

(6) 如果  $x : 3 = y : 4$ ，且  $x$ 、 $y$  皆不為 0，請回答下列問題：

①  $(x + 2y) : (x - 2y)$  的比值為多少？

② 如果  $2x + y = 30$ ，則  $(x + 2) : (y - 2)$  的比值為多少？





教育部國民及學前教育署 編

國民中學  
學生學習扶助教材 **7** 年級數學

