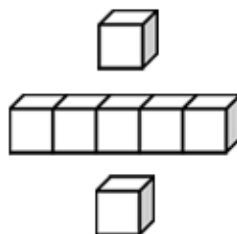


基本學習內容：AC-7-5-1

代入消去法或加減消去法 解二元一次聯立方程式

班級：_____

姓名：_____





◎複習活動-列二元一次聯立方程式

(1)小禾到超商購買 15 元關東煮和 20 元果汁，共花掉 120 元，已經知道小禾關東煮和果汁總共買了 7 樣，請問小禾買了幾支關東煮？幾瓶果汁？
請依題意列出符合題目的二元一次聯立方程式。

解：

設小禾買了 x 支關東煮， y 瓶果汁

以總支付額的二元一次方程式： $15x + 20y = 120$

以總數量的二元一次方程式： $x + y = 7$

合併上列列式為 $\begin{cases} 15x + 20y = 120 \\ x + y = 7 \end{cases}$ 即為二元一次聯立方程式。

(2)小禾和小秣兩兄弟存錢準備添購魔術方塊，小禾發現他的存款是小秣的 2 倍，且他們兩人總共存了 240 元，請問小禾和小秣各存了多少元？請列出題意的二元一次聯立方程式。

解：

假設小禾存款 x 元，小秣存款 y 元

存款關係的二元一次方程式： $x = 2y$

以總數量的二元一次方程式： $x + y = 240$

合併上列列式為 $\begin{cases} x = 2y \\ x + y = 240 \end{cases}$ 即為二元一次聯立方程式。



◎二元一次聯立方程式的解

(1) 試求二元一次聯立方程式 $\begin{cases} x + y = 50 \\ 2x + y = 70 \end{cases}$ 的解。

解法一：

由第一個 $x + y = 50$ 式子，我們可以列出 x 和 y 的解為下列：

x	...	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	...
y	...	39	38	37	36	35	34	33	32	31	30	29	28	27	26	...

從上方，我們可以發現此 $x + y = 50$ 二元一次方程式的解有無限多組。

由第二個 $2x + y = 70$ 式子，我們可以列出 x 和 y 的解為下列：

x	...	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	...
y	...	48	46	44	42	40	38	36	34	32	30	28	26	24	22	...

再由從上方，我們可以發現此 $2x + y = 70$ 二元一次方程式的解仍有無限多組。

其中 $x = 20$ ， $y = 30$ 是 $x + y = 50$ 的解，也是 $2x + y = 70$ 的解，

我們稱 $x = 20$ ， $y = 30$ 是 $\begin{cases} x + y = 50 \\ 2x + y = 70 \end{cases}$ 的解。


其次 $x = 11$ ， $y = 39$ 是 $x + y = 50$ 的解，但不是 $2x + y = 70$ 的解，


我們稱 $x = 11$ ， $y = 39$ 不是 $\begin{cases} x + y = 50 \\ 2x + y = 70 \end{cases}$ 的解。


解法二：




我們以  線段長度代表 x 元，以  線段長度代表 y 元

$$\begin{cases} x + y = 50 \\ 2x + y = 70 \end{cases}$$
 可表示為
 

我們可以發現 $2x + y$ 的線段長比 $x + y$ 的線段長多出 ，

利用下方總線段長減掉上方總線段長可得到  線段長

其數值相差 $70 - 50 = 20$ ，得到  長度為 20

其次，再由   長度為 50，其中  長度為 20，

得到  長度為 30

即 $x = 20$ ， $y = 30$ 。



上、下兩線段總長均具紅色線段長，為刪除紅色線段長，以下方線段總長減去上方線段總長



解法三：

$$\begin{cases} x + y = 50 \\ 2x + y = 70 \end{cases} \quad \text{利用等量公理消除 } y$$

$$(2x + y) - (x + y) = 70 - 50 \quad \leftarrow \text{因為 } x+y=50, \text{ 原等式左邊減 } x+y, \text{ 右邊減 } 50$$

$$(2x - x) + (y - y) = 20$$

$$x + 0y = 20$$

$$x = 20$$

$$20 + y = 50$$

$$20 + y - 20 = 50 - 20$$

$$y = 30$$

因此我們得到 $x = 20$, $y = 30$ 。

$$\begin{cases} x + y = 50 \\ 2x + y = 70 \end{cases} \quad \text{利用等量公理消除 } x$$

$$(2x + y) - 2(x + y) = 70 - 2 \times 50$$

$$(2x + y) + (-2x - 2y) = 70 - 100$$

$$(2x - 2x) + (y - 2y) = 30$$

$$0x - y = -30$$

$$y = 30$$

$$x + 30 = 50$$

$$x + 30 - 30 = 50 - 30$$

$$x = 20$$

因此我們得到 $x = 20$, $y = 30$ 。

◎解二元一次聯立方程式

(1)求二元一次聯立方程式 $\begin{cases} x-y=1 \\ 2x+y=8 \end{cases}$ 的解。

解： $\begin{cases} x-y=1 \dots\dots ① \\ 2x+y=8 \dots\dots ② \end{cases}$ ，我們可以發現，

若要減少未知數，我們可以直接透過兩式相加，則可刪除 y 項

因此運用②式+①式，得知

$$(2x+y) + (x-y) = 1+8$$

$$(2x+x) + [y+(-y)] = 1+8$$

$$3x=9$$

$x=3$ 將此代入①式

$$3-y=1$$

$$y=2$$

(2)求二元一次聯立方程式 $\begin{cases} 15x+20y=120 \\ x+y=7 \end{cases}$ 的解。

解法一：

$\begin{cases} 15x+20y=120 \\ x+y=7 \end{cases}$ 我們可以發現，若要減少未知數，有三種方式：

其一是等量公理

$$(15x+20y) - 15(x+y) = 120 - 7 \times 15$$

$$(15x-15x) + 20y - 15y = 120 - 105$$

$$5y=15$$

$$y=3$$

$y=3$ 將此代入②式

$$x+3=7$$

$$x=4$$





解法二：
$$\begin{cases} 15x + 20y = 120 \dots\dots ① \\ x + y = 7 \dots\dots ② \end{cases}$$

我們可以②式 $\times 20$ 後，再與①式相減，即可刪除 y 項

因此運用②式 $\times 20$ ，得知 $20x + 20y = 140 \dots\dots ③$

③式-①式，得知③

$$\begin{aligned} (20x + 20y) - (15x + 20y) &= 140 - 120 \\ (20x - 15x) + (20y - 20y) &= 140 - 120 \\ 5x &= 20 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

$x = 4$ 將此代入②式

$$\begin{aligned} 4 + y &= 7 \\ y &= 3 \end{aligned}$$

其二是先消去 y



解法三：我們可以②式 $\times 15$ 後，再與①式相減，即可刪除 x 項

因此運用②式 $\times 15$ ，得知 $15x + 15y = 105 \dots\dots ③$

①式-③式，得知

$$\begin{aligned} (15x + 20y) - (15x + 15y) &= 120 - 105 \\ (15x - 15x) + (20y - 15y) &= 120 - 105 \\ 5y &= 15 \end{aligned}$$

$y = 3$ 將此代入②式

$$\begin{aligned} x + 3 &= 7 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

其三是先消去 x



(3)求二元一次聯立方程式 $\begin{cases} 15x + 20y = 120 \\ 3x + 7y = 45 \end{cases}$ 的解。

解法一： $\begin{cases} 15x + 20y = 120 \\ 3x + 7y = 45 \end{cases}$

其一是等量公理

$$(15x + 20y) - 5(3x + 7y) = 120 - 5 \times 45$$

$$(15x - 15x) + (20y - 35y) = 120 - 225$$

$$-15y = 105$$

$$y = 7$$

$$3x + 7 \times 7 = 45$$

$$3x + 49 = 45$$

$$3x = -4$$

$$x = -\frac{4}{3}$$

解法二： $\begin{cases} 15x + 20y = 120 \dots\dots ① \\ 3x + 7y = 45 \dots\dots ② \end{cases}$

$$② \text{式} \times 5 \text{ 得到 } 15x + 35y = 225 \dots\dots ③$$

$$③ \text{式} - ① \text{式}$$

$$(15x + 35y) - (15x + 20y) = 225 - 120$$

$$(15x - 15x) + (35y - 20y) = 105$$

$$15y = 105$$

$$y = 7$$

$$y = 7 \text{ 將此代入 } ② \text{式}$$

$$3x + 7 \times 7 = 45$$

$$3x + 49 = 45$$

$$3x = -4$$

$$x = -\frac{4}{3}$$

其二是先消去x



(4) 求二元一次聯立方程式 $\begin{cases} 2x-3y=2 \\ 3x+2y=16 \end{cases}$ 的解。

解法一： $\begin{cases} 2x-3y=2 \dots\dots ① \\ 3x+2y=16 \dots\dots ② \end{cases}$ 我們可以發現，若要減少未知數，有兩種方式：

我們可以①式 $\times 2$ 後，再與②式 $\times 3$ 式相加，即可刪除 y 項

因此運用①式 $\times 2$ ，得知 $4x-6y=4 \dots\dots ③$

運用②式 $\times 3$ ，得知 $9x-6y=48 \dots\dots ④$

③式+④式，得知

$$(4x-6y)+(9x+6y)=4+48$$

$$(9x+4x)+[(-6y)+6y]=4+48$$

$$13x=52$$

$x=4$ 將此代入②式

$$3 \times 4 + 2y = 16$$

$$12 + 2y = 16$$

$$2y = 4$$

$$y = 2$$

其一是先
消去
 y



解法二： 我們可以②式 $\times 2$ 後，再與①式 $\times 3$ 相減，即可刪除 x 項

因此運用②式 $\times 2$ ，得知 $6x+4y=32 \dots\dots ③$

運用①式 $\times 3$ ，得知 $6x-9y=6 \dots\dots ④$

③式-④式，得知

$$(6x+4y)-(6x-9y)=32-6$$

$$(6x-6x)+[4y-(-9y)]=32-6$$

$$13y=26$$

$y=2$ 將此代入②式

$$3x+2 \times 2=16$$

$$3x+4=16$$

$$3x=12$$

$$x=4$$

其二是先
消去
 x



(5) 求二元一次聯立方程式 $\begin{cases} x + 0y = 5 \\ x + y = 20 \end{cases}$ 的解。

解： $\begin{cases} x + 0y = 5 \dots\dots ① \\ x + y = 20 \dots\dots ② \end{cases}$



我們由上方式子①可以發現 $x = 5$ ，只要善用式子①，即可求出式子②的 y 值

因此將①代入②得到

$$5 + y = 20$$

$$5 + y - 5 = 20 - 5$$

$$y = 15$$



這道題目除了先前的加減消去法，我發現帶入消去法解題較快

(6) 求二元一次聯立方程式 $\begin{cases} x = y \\ x + y = 20 \end{cases}$ 的解。

解： $\begin{cases} x = y \dots\dots ① \\ x + y = 20 \dots\dots ② \end{cases}$



我們由上方式子①可以發現 $x = y$ ，只要善用式子①，即可求出式子②的 y 值

因此將①代入②得到

$$y + y = 20$$

$$2y = 20$$

$$y = 10$$

$y = 10$ ，因為 $x = y$ ，所以得知 $x = 10$



隨堂練習

求二元一次聯立方程式 $\begin{cases} x = y \\ 3x - y = 4 \end{cases}$ 的解。

(7) 求二元一次聯立方程式 $\begin{cases} y = 3x + 5 \\ x + 2y = 20 \end{cases}$ 的解。

解法一：

$$\text{解：} \begin{cases} y = 3x + 5 \dots\dots ① \\ x + 2y = 20 \dots\dots ② \end{cases}$$



我們由上方式子①可以發現 $y = 3x + 5$ ，只要善用式子①，即可求出式子②的 y 值，因此將①代入②得到

$$x + 2(3x + 5) = 20$$

$$x + 6x + 10 = 20$$

$$x + 6x + 10 - 10 = 20 - 10$$

$$7x = 10$$

$$x = \frac{10}{7}$$

$$\text{因為 } y = 3x + 5 \text{ 且 } x = \frac{10}{7}$$

$$\text{所以得知 } y = 3 \times \frac{10}{7} + 5$$

$$= \frac{30}{7} + \frac{35}{7}$$

$$= \frac{65}{7}$$

我可
利用
代入
消去



解法二：

$$\text{解：} \begin{cases} y = 3x + 5 \dots\dots ① \\ x + 2y = 20 \dots\dots ② \end{cases}$$

我們將①式經過等量減法運算後得到 $-3x + y = 5 \dots\dots ③$

$$\text{合併整理後} \begin{cases} x + 2y = 20 \dots\dots ② \\ -3x + y = 5 \dots\dots ③ \end{cases}$$

$$① \text{式} \times 3 \text{ 得到 } 3x + 6y = 60 \dots\dots ④$$

$$③ \text{式} + ④ \text{式} \text{ 得到 } (-3x + y) + (3x + 6y) = 5 + 60$$

我可
利用
加減
消去



$$(-3x + y) + (3x + 6y) = 5 + 60$$

$$7y = 65$$

$$y = \frac{65}{7}$$

$$\text{因為 } y = 3x + 5 \text{ 且 } y = \frac{65}{7}$$

$$\text{所以得知 } \frac{65}{7} = 3x + 5$$

$$\frac{65}{7} - 5 = 3x + 5 - 5$$

$$\frac{30}{7} = 3x$$

$$\frac{30}{7} \times \frac{1}{3} = 3x \times \frac{1}{3}$$

$$x = \frac{10}{7}$$



隨堂練習

求二元一次聯立方程式 $\begin{cases} 2x + 7y = 9 \\ -x + 2y = 1 \end{cases}$ 的解。



◎應用問題

(1) 小禾到超商購買 15 元關東煮和 20 元果汁，共花掉 120 元，已經知道小禾關東煮和果汁總共買了 7 樣，請問小禾買了幾支關東煮？幾瓶果汁？

解：

設小禾買了 x 支關東煮， y 瓶果汁，依題意列式為 $\begin{cases} 15x + 20y = 120 \dots\dots ① \\ x + y = 7 \dots\dots ② \end{cases}$

②式 $\times 15$ 得到 $15x + 15y = 105 \dots\dots ③$

合併整理後 $\begin{cases} 15x + 20y = 120 \dots\dots ① \\ 15x + 15y = 105 \dots\dots ③ \end{cases}$

①式-③式得到 $5y = 15$

$y = 3 \dots\dots ④$

①式代入②式得到 $x + 3 = 7$

$x = 4$

答：小禾買了 4 支關東煮，3 瓶果汁

(2) 小禾和班上同學小秣一起到文具店購買文具，小禾買了 1 支原子筆和 1 個立可帶共支付 50 元，小秣買了同價位的 2 支原子筆和 1 個立可帶共支付 70 元，請求出一支原子筆和一個立可帶各是多少元？

解：

假設一支原子筆 x 元，一個立可帶 y 元，依題意列式為 $\begin{cases} x + y = 50 \dots\dots ① \\ 2x + y = 70 \dots\dots ② \end{cases}$

②式-①式得到 $x = 20 \dots\dots ③$

③式代入①式得到 $20 + y = 50$

$y = 30$

答：一支原子筆 20 元，一個立可帶 30 元



(3) 小禾和小秣兩兄弟存錢準備添購魔術方塊，小禾發現他的存款是小秣的 2 倍，且他們兩人總共存了 240 元，請問小禾和小秣各存了多少元？

解：

假設小禾存款 x 元，小秣存款 y 元，依題意列式為 $\begin{cases} x = 2y \dots\dots ① \\ x + y = 240 \dots\dots ② \end{cases}$

將①式代入②式得到 $2y + y = 240$

$$\begin{aligned} 3y &= 240 \\ y &= 80 \dots\dots ③ \end{aligned}$$

將③式代入①式得到 $x = 2 \times 80$

$$x = 160$$

答：小禾存 160 元，小秣存款 80 元



隨堂練習

有一些紅花與黃花，黃花是紅花的 3 倍多 15 朵，且紅花和黃花共有 159 朵，請問紅花與黃花原來各有多少朵？



小試身手

1. 求二元一次聯立方程式 $\begin{cases} x = 5y \\ -x + 9y = 20 \end{cases}$ 的解。

2. 求二元一次聯立方程式 $\begin{cases} x - 7y = 5 \\ -x + 2y = 15 \end{cases}$ 的解。



教育部國民及學前教育署 編

國民中學

學生學習扶助教材

7

年級數學

