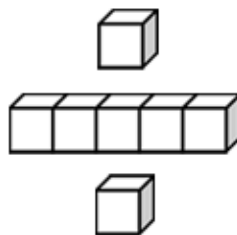


# 基本學習內容：SC-8-7-1

## 正三角形的高與面積求法

### 【教師用】





基本學習內容：SC-8-7-1

**學習內容：**

**S-8-7 平面圖形的面積：**平面圖形的面積：正三角形的高與面積公式，及其相關之複合圖形的面積。

**基本學習內容：**

SC-8-7-1 正三角形的高與面積求法。

**基本學習表現：**

SCP-8-7-1-1 理解邊長為  $a$  的正三角形的高( $\frac{\sqrt{3}}{2} a$ )及面積公式( $\frac{\sqrt{3}}{4} a^2$ )。

SCP-8-7-1-2 能求出含正三角形的複合圖形面積。

**概要說明：**

- 建議教師先舉邊長為已知數的例子，求出高與面積的答案後，再推廣至邊長為  $a$  的高與面積的公式。
- 複合圖形除正三角形外，其它圖形以三角形與四邊形為限，不宜出現與圓相關的複合圖形。



基本學習內容：SC-8-7-1 正三角形的高與面積求法

### ◎複習三角形面積公式

(1) 已知 $\triangle ABC$ 的底為20、高為底的一半，則三角形的面積為何？

解：

$$\text{高} = 20 \div 2 = 10$$

$$\triangle ABC \text{ 面積} = \text{底} \times \text{高} \div 2 = 20 \times 10 \div 2 = 100$$

◎三角形面積 = 底 $\times$ 高 $\div 2$ ，也可以寫成三角形面積 =  $\frac{1}{2} \times \text{底} \times \text{高}$



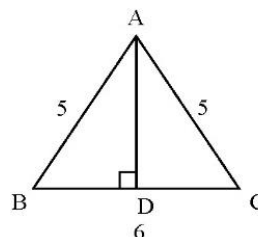
### ◎複習畢氏定理

(2) 如右圖，已知等腰 $\triangle ABC$ 三邊長為5、5、6，

$\overline{BC}$ 邊上的高為 $\overline{AD}$ ，請回答下列問題：

(a)  $\overline{AD} = ?$

(b)  $\triangle ABC$ 的面積 = ?



解：

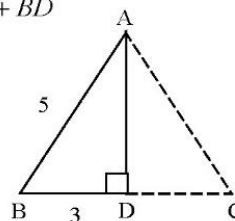
(a) 等腰三角形是對稱圖形，所以 $\overline{AD}$ 會平分 $\overline{BC}$ ，則 $\overline{BD} = \overline{CD} = 3$

如右圖，直角 $\triangle ABD$ 三邊長滿足 $\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2$

$$\text{所以 } 5^2 = \overline{AD}^2 + 3^2$$

$$\overline{AD}^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16,$$

$$\overline{AD} = 4 \text{ (負不合)}$$



$$(b) \triangle ABC \text{ 的面積} = \frac{1}{2} \times \text{底} \times \text{高} = \frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{AD} = \frac{1}{2} \times 6 \times 4 = 12$$



**教材內容說明：**

1. 本教材第 1 頁的教學重點是複習三角形面積公式及畢氏定理。
2. 第(1)題給定  $\triangle ABC$  的底為 20、高為底的一半，要求學生算出三角形的面積。

教師引導學生先找到高等於 10，再利用三角形的面積公式(底 $\times$ 高 $\div$ 2)算出  $\triangle ABC$  的面積為 100。

教師說明除以 2 就是乘以  $\frac{1}{2}$ ，所以三角形面積 $=\frac{1}{2} \times$ 底 $\times$ 高。

3. 第(2)題給定等腰  $\triangle ABC$  三邊長為 5、5、6， $\overline{BC}$  邊上的高為  $\overline{AD}$ ，要求學生回答兩個子問題。  
子問題(a)：找出  $\overline{AD}$  的長。

子問題(b)：算出  $\triangle ABC$  的面積。

本教材提供子問題(a)解法如下：

教師引導學生思考因為等腰三角形是對稱圖形，所以  $\overline{AD}$  會平分底邊，求得  $\overline{BD}=\overline{CD}=3$ 。

接著利用直角  $\triangle ABD$  三邊長滿足畢氏定理，將  $\overline{AB}=5$ 、 $\overline{BD}=3$  代入  $\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2$ ，  
求出  $\overline{AD}=4$ (負數不能代表邊長所以是不合理的解)。

本教材提供子問題(b)解法如下：

教師引導學生利用三角形面積公式，將底邊  $\overline{BC}=6$ 、高  $\overline{AD}=4$  代入

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{AD}，求得 \triangle ABC 的面積為 12。$$



基本學習內容：SC-8-7-1 正三角形的高與面積求法



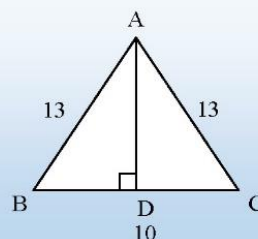
### 隨堂練習

如右圖，已知等腰 $\triangle ABC$ 三邊長為13、13、10，

$\overline{BC}$ 邊上的高為 $\overline{AD}$ ，請回答下列問題：

(a)  $\overline{AD} = ?$  (b)  $\triangle ABC$ 的面積 = ?

答：(a)  $\overline{AD} = 12$  (b)  $\triangle ABC$ 的面積 = 60



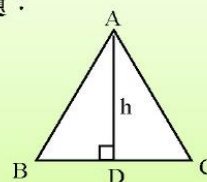
### ◎正三角形的高與面積

(3)如右圖，已知正 $\triangle ABC$ 邊長為8，高為 $h$ ，請回答下列問題：

(a)  $\overline{BD} = ?$

(b)  $h = ?$

(c) 正 $\triangle ABC$ 的面積 = ?



解：

$$(a) \overline{BD} = 8 \div 2 = 4$$

(b) 因為 $\triangle ABD$ 為直角三角形，所以三邊長滿足畢氏定理

$$\text{也就是 } \overline{AB}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{AD}^2 \quad (\overline{AD} = h)$$

將 $\overline{AB} = 8$ 、 $\overline{BD} = 4$ 代入上式

$$\text{所以 } 8^2 = 4^2 + h^2, \quad h^2 = 8^2 - 4^2 = 64 - 16 = 48$$

$$h = \sqrt{48} = \sqrt{4 \times 4 \times 3} = 4\sqrt{3}$$

$$(c) \text{ 正 } \triangle ABC \text{ 的面積} = \frac{1}{2} \times \overline{BD} \times h$$

$$= \frac{1}{2} \times 8 \times 4\sqrt{3} = 16\sqrt{3}$$



### 教材內容說明：

1. 本教材第 2~5 頁的教學重點是幫助學生理解正三角形的高與面積公式。
2. 本頁上方隨堂練習針對三角形面積公式及畢氏定理進行練習。
3. 第(3)題給定正  $\triangle ABC$  邊長為 8，高為  $h$ ，要求學生回答三個子問題。

子問題(a)：算出  $\overline{BD}$ 。

子問題(b)：求出  $h$ 。

子問題(c)：算出正  $\triangle ABC$  的面積。

本教材提供子問題(a)解法如下：

教師引導學生思考正三角形也是對稱圖形，所以  $\overline{AD}$  會平分底邊，求得  $\overline{BD} = 4$ 。

本教材提供子問題(b)解法如下：

教師引導學生利用直角  $\triangle ABD$  三邊長滿足畢氏定理，

將  $\overline{AB} = 8$ 、 $\overline{BD} = 4$  代入  $\overline{AB}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{AD}^2$  (這裡的  $\overline{AD}$  就是  $h$ ) 求出  $h = 4\sqrt{3}$

(負數不能代表邊長所以是不合理的解)。

本教材提供子問題(c)解法如下：

教師引導學生利用三角形面積公式，

將底邊  $\overline{BC} = 8$ 、高  $h = 4\sqrt{3}$  代入  $\triangle ABC = \frac{1}{2} \times \overline{BC} \times h$ ，求得  $\triangle ABC$  的面積為  $16\sqrt{3}$ 。

- 子問題(b)高以  $h$  表示，教學重點在教師能幫助學生理解後續要介紹的正三角形的高與面積公式中，高以  $h$  表示的習慣用法。
- 子問題(b)的教學重點在於幫助學生看到  $\triangle ABD$  為直角三角形，可以應用畢氏定理計算高。

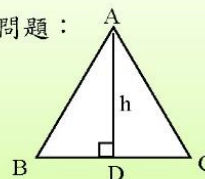


基本學習內容：SC-8-7-1 正三角形的高與面積求法

(4) 如右圖，已知正 $\triangle ABC$  邊長為 5，高為  $h$ ，請回答下列問題：

(a)  $h = ?$

(b) 正 $\triangle ABC$  的面積 = ?



解：

(a) 如右圖，求  $h$  前先找直角 $\triangle ABD$  的三邊邊長

因為 $\triangle ABD$  為直角三角形，所以三邊長滿足畢氏定理

也就是  $\overline{AB}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{AD}^2$  ( $\overline{AD} = h$ )

將  $\overline{AB} = 5$ 、 $\overline{BD} = 5 \times \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$  代入上式

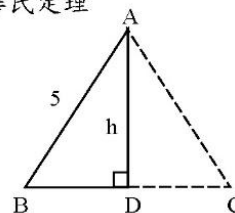
$$\text{所以 } 5^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 + h^2,$$

$$h^2 = 5^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 5^2 - \frac{1}{4} \times 5^2 = \left(1 - \frac{1}{4}\right) \times 5^2 = \frac{3}{4} \times 5^2,$$

$$h = \sqrt{\frac{3}{4} \times 5^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 5 = \frac{5}{2}\sqrt{3}$$

(b) 正 $\triangle ABC$  的面積 =  $\frac{1}{2} \times \overline{BC} \times h$

$$= \frac{1}{2} \times 5 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \times 5\right) = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 5^2 = \frac{25}{4}\sqrt{3}$$

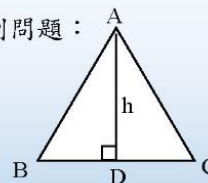


隨堂練習

如右圖，已知正 $\triangle ABC$  邊長為 10，高為  $h$ ，請回答下列問題：

(a)  $h = ?$

(b) 正 $\triangle ABC$  的面積 = ?



答：(a)  $h = 5\sqrt{3}$  (b) 正 $\triangle ABC$  的面積 =  $25\sqrt{3}$

**教材內容說明：**

1. 本教材第 2~5 頁的教學重點是幫助學生理解正三角形的高與面積公式。
2. 第(4)題給定正  $\triangle ABC$  邊長為 5，高為  $h$ ，要求學生回答兩個子問題。

子問題(a)：求出  $h$ 。

子問題(b)：算出正  $\triangle ABC$  的面積。

本教材提供子問題(a)解法如下：

教師引導學生利用直角  $\triangle ABD$  三邊長滿足畢氏定理，將  $\overline{AB} = 5$ 、

$$\overline{BD} = \frac{5}{2} \text{ 代入 } \overline{AB}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{AD}^2 \text{ (這裡的 } \overline{AD} \text{ 就是 } h) \text{ 求出 } h = \frac{5}{2} \sqrt{3}$$

(負數不能代表邊長所以是不合理的解)。

本教材提供子問題(b)解法如下：

引導學生利用三角形面積公式，將底邊  $\overline{BC} = 5$ 、高  $h = \frac{5}{2} \sqrt{3}$  代入  $\triangle ABC = \frac{1}{2} \times \overline{BC} \times h$ ，求得  $\triangle ABC$  的面積為  $\frac{25}{4} \sqrt{3}$ 。

● 子問題(a)，在計算  $h^2$  時刻意保留  $\frac{3}{4} \times 5^2$ ，教學重點在幫助學生計算  $h$  時看到  $\sqrt{\frac{3}{4} \times 5^2}$  會等於  $\frac{\sqrt{3}}{2} \times 5$  的過程，其中 5 代表正三角形邊長，為後續引入正三角形高的公式  $\frac{\sqrt{3}}{2} a$  鋪路。

● 子問題(b)，在計算正三角形面積的過程以  $\frac{\sqrt{3}}{4} \times 5^2$  表示，教學重點在幫助學生在計算面積時能將看到  $\frac{\sqrt{3}}{4}$  乘以邊長平方，其中 5 代表正三角形邊長，為後續引入正三角形面積的公式  $\frac{\sqrt{3}}{4} a^2$  鋪路。

3. 本頁下方隨堂練習針對正三角形的高及面積進行練習，為了方便後續引入公式，建議學生在計算時不要將邊長 10 與其他數字進行約分或合併計算。





基本學習內容：SC-8-7-1 正三角形的高與面積求法

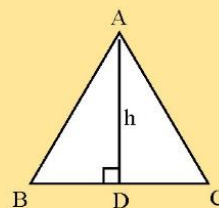
已知正 $\triangle ABC$  的邊長為  $a$ ， $\overline{BC}$  邊上的高為  $h$

### ◎正三角形高的求法

因為 $\triangle ABD$  為直角三角形，所以  $\overline{AB}^2 = \overline{BD}^2 + h^2$

將  $\overline{AB} = a$ 、 $\overline{BD} = \frac{1}{2}a$  代入上式，所以  $a^2 = (\frac{1}{2}a)^2 + h^2$

則  $h^2 = a^2 - \frac{1}{4}a^2 = \frac{3}{4}a^2$ ， $h = \sqrt{\frac{3}{4}a^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$



### ◎正三角形面積的求法

正 $\triangle ABC$  的面積  $= \frac{1}{2} \times \text{底} \times \text{高} = \frac{1}{2} \times \overline{BC} \times h$

將  $\overline{BC} = a$ 、 $h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$  代入上式

則正 $\triangle ABC$  的面積  $= \frac{1}{2} \times a \times \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

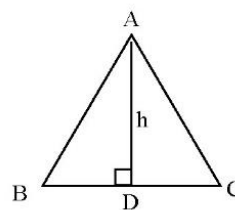


### 重點整理

已知正 $\triangle ABC$  的邊長為  $a$ ，任一邊上的高為  $h$ ，

則 (1) 正 $\triangle ABC$  的高  $h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$

(2) 正 $\triangle ABC$  的面積  $= \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$



**教材內容說明：**

1. 本教材第 2~5 頁的教學重點是幫助學生理解正三角形的高與面積公式。
2. 本頁上方區塊內容在幫助學生理解正三角形高及面積的求法。

給定正  $\triangle ABC$  的邊長為  $a$ ， $\overline{BC}$  邊上的高為  $h$ ，透過下列推論過程分別求出正三角形的高及正三角形的面積：

**◎正三角形高的求法**

如圖，因為  $\triangle ABD$  為直角三角形，所以三邊長滿足畢氏定理  $\overline{AB}^2 = \overline{BD}^2 + h^2$ ，將斜邊  $\overline{AB}$  以  $a$  代入，底邊  $\overline{BD}$  以  $\frac{1}{2}a$  代入，得到  $a^2 = (\frac{1}{2}a)^2 + h^2$ ，如果學生無法算出  $h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ ，教師可提供  $h = \sqrt{\frac{3}{4}a^2} = \sqrt{\frac{3}{4} \times a^2} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} \times \sqrt{a^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$  給學生參考。

**◎正三角形面積的求法**

正  $\triangle ABC$  的面積算法  $= \frac{1}{2} \times \text{底} \times \text{高} = \frac{1}{2} \times \overline{BC} \times h$ ，

將底邊  $\overline{BC}$  以  $a$  代入、高  $h$  以  $\frac{\sqrt{3}}{2}a$  代入，

求得正  $\triangle ABC$  的面積  $= \frac{1}{2} \times a \times \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ 。

3. 本頁下方重點整理對話框在幫助學生熟記正三角形的高與面積公式。

- 教師引導學生比對前面兩個例題的答案，發現例題(1)中正三角形邊長 8 和例題(2)中正三角形邊長 5 就是公式中的  $a$ 。



基本學習內容：SC-8-7-1 正三角形的高與面積求法



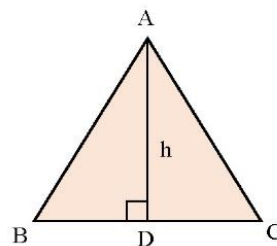
小試身手

(1) 如右圖，已知正 $\triangle ABC$  邊長為 12，高為  $h$ ，請回答下列問題：

(a)  $\overline{BD} = ?$

(b)  $h = ?$

(c) 正 $\triangle ABC$  的面積 = ?



答: (a)  $\overline{BD} = 6$  (b)  $h = 6\sqrt{3}$  (c) 正 $\triangle ABC$  的面積 =  $36\sqrt{3}$

(2) 已知正 $\triangle DEF$  邊長為 20，且 $\overline{EF}$  邊上的高為  $h$ ，請回答下列問題：

(a)  $h = ?$

(b) 正 $\triangle DEF$  的面積 = ?

答: (a)  $h = 10\sqrt{3}$  (b) 正 $\triangle DEF$  的面積 =  $100\sqrt{3}$



**教材內容說明：**

1. 本頁小試身手針對正三角形的高與面積的問題進行練習。

第(1)題：給定正  $\triangle ABC$  的邊長為 12，高為  $h$ ，要求學生回答三個子問題。

子問題(a)：要求學生算出  $\overline{BD}$  的長。

子問題(b)：要求學生算出  $h$  的長。

子問題(c)：要求學生算出正  $\triangle ABC$  的面積。

第(2)題：給定正  $\triangle DEF$  的邊長為 20，且  $\overline{EF}$  邊上的高為  $h$ ，要求學生回答兩個子問題。

子問題(a)：要求學生算出  $h$  的長。

子問題(b)：要求學生算出正  $\triangle DEF$  的面積。

如果學生透過畢氏定理解題，教師應限制學生改用公式解題。





教育部國民及學前教育署 編

國民中學

學生學習扶助教材

8 年級數學

