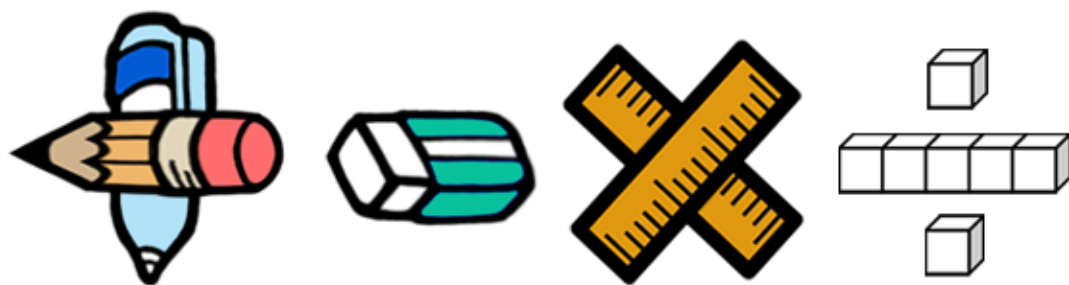


基本學習內容：AC-8-2-1 AC-8-3-1

理解 x 多項式的定義及相關名詞

整係數多項式的加、減法運算

【教師用】





基本學習內容：AC-8-2-1、AC-8-3-1

學習內容：

A-8-2 多項式的意義：一元多項式的定義與相關名詞（多項式、項數、係數、常數項、一次項、二次項、最高次項、升冪、降冪）。

A-8-3 多項式的四則運算：直式、橫式的多項式加法與減法；直式的多項式乘法（乘積最高至三次）；被除式為二次之多項式的除法運算。

基本學習內容：

AC-8-2-1 理解 x 多項式的定義及相關名詞。

AC-8-3-1 整係數多項式的加、減法運算。

基本學習表現：

ACP-8-2-1-1 理解 x 的多項式（含常數多項式）。

ACP-8-2-1-2 理解 x 的多項式相關名詞，如：項、項數、係數、常數項、次數、一次項、二次項、最高次項。

ACP-8-2-1-3 理解 x 的多項式升冪(升次)排列、降冪(降次)排列。

ACP-8-3-1-1 熟練以橫式及直式進行兩整係數多項式的加、減法運算。

概要說明：

理解 x 多項式的定義及相關名詞。

- 基本學習內容 AC-8-2-1 為 AC-7-1-1 之後續學習概念，故學生應該已能認識一元一次式及二元一次式。

本基本學習內容幫助學生理解 x 多項式的意義、相關名詞及升冪和降冪排列。

- 若一個代數式是由一些未知數的正整數次方及常數，透過加法及乘法形成的，我們稱此代數式為「多項式」。若此多項式只有一個未知數，則稱為「一元多項式」。

■ 一元 n 次多項式

$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + a_{n-3} x^{n-3} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0 x^0$ ，一般我們會簡記為

$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + a_{n-3} x^{n-3} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ ，其中

$a_n x^n$ 、 $a_{n-1} x^{n-1}$ 、 $a_{n-2} x^{n-2}$ 、 $a_{n-3} x^{n-3}$ 、 \cdots 、 $a_2 x^2$ 、 $a_1 x$ 、 a_0 稱為項，且 a_n 為 x^n 的係數；

a_{n-1} 為 x^{n-1} 的係數； a_{n-2} 為 x^{n-2} 的係數； a_{n-3} 為 x^{n-3} 的係數； \cdots a_2 為 x^2 的係數； a_1 為 x 的係數； a_0 為常數項，也稱為常數項的係數。



- 教學上可多舉實際數值的例子，從實例中介紹的多項式之定義及相關名詞，如：單項式、多項式、項、項數、係數、常數項、一次項、二次項、最高次項、升冪與降冪。
- 將一元多項式各項依次方數由小排到大，稱為「升冪」排列；由大排到小則為「降冪」排列。部分學生會依係數大、小進行排列，教師宜澄清。
- 常數多項式包含：
 1. 零次多項式（例如： $p(x)=3$ ， $\deg p(x)=0$ ）
 2. 零多項式（例如： $r(x)=0$ ，不定義次數）零多項式不定義次數的緣由是因為避免與 $\deg f(x) \cdot g(x) = \deg f(x) + \deg g(x)$ 立論相違背，因此零次多項式不包含零多項式。
- 本基本學習內容討論的多項式為一元多項式，故不討論形如是否為多項式，或其次數為何等問題。

整係數多項式的加、減法運算。

- 基本學習內容 AC-8-3-1 為 AC-7-1-1、AC-8-2-1 之後續學習概念，故學生應該已能進行一元一次式及二元一次式的化簡並認識多項式。
本基本學習內容幫助學生運用橫式或直式熟練多項式加、減法運算。
- 一元多項式裡，未知數次方相同的項稱為「同類項」。將兩個多項式的同類項相加（或相減），形成新的多項式，此過程稱為多項式的「加法」（或「減法」）。
- 多項式加法和減法的代數運算不宜過於複雜，建議此處仍以一層括號為限。
- 以直式做多項式加法與減法若有缺項（即係數為零），可補零以避免錯誤。

基本學習內容：AC-8-2-1 理解 x 多項式的定義及相關名詞；AC-8-3-1 整係數多項式的加、減法運算

◎認識多項式

多項式的意義與 $x^0 = 1$

(1) 3825 由 3 個千和 8 個百和 2 個十和 5 個一所加起來，

可以用下表記錄下來：

1000	100	10	1
3	8	2	5

也可以把 1000、100、10、1 用 10 的次方記錄下來，

10^3	10^2	10^1	10^0
3	8	2	5

也可以記錄成 $3 \times 10^3 + 8 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 5 \times 10^0$ ，

請把下表紀錄用第三種方式記錄下來

10^3	10^2	10^1	10^0
7	48	52	3

解：

10^3	10^2	10^1	10^0
3	8	2	5

可以記錄成 $3 \times 10^3 + 8 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 5 \times 10^0$

10^3	10^2	10^1	10^0
7	48	52	3

可以記錄成 $7 \times 10^3 + 48 \times 10^2 + 52 \times 10^1 + 3 \times 10^0$



教材內容說明：

1. 本教材第 1～4 頁的教學重點在幫助學生理解 x 多項式的定義及相關名詞。
2. 第(1)題給定四位數 3825 用 10 的次方記錄方式，要求學生利用 10 的次方記錄表格內容。
教師先幫助學生將 3825 讀成有 3 個 10^3 ，8 個 10^2 ，2 個 10^1 ，5 個 10^0 ，再讀下面表格內容 7 個 10^3 ，48 個 10^2 ，52 個 10^1 ，3 個 10^0 ，最後記錄成 $7 \times 10^3 + 48 \times 10^2 + 52 \times 10^1 + 3 \times 10^0$ 。



基本學習內容：AC-8-2-1、AC-8-3-1

基本學習內容：AC-8-2-1 理解 x 多項式的定義及相關名詞；AC-8-3-1 整係數多項式的加、減法運算

(2)

10^3	10^2	10^1	10^0
23	8	12	-5

可以記錄成 $23 \times 10^3 + 8 \times 10^2 + 12 \times 10^1 + (-5) \times 10^0$ 。

請把下表紀錄用一樣的方式記錄下來

x^3	x^2	x^1	x^0
15	7	18	-9

解：

10^3	10^2	10^1	10^0
23	8	12	-5

可以記錄成 $23 \times 10^3 + 8 \times 10^2 + 12 \times 10^1 + (-5) \times 10^0$

x^3	x^2	x^1	x^0
15	7	18	-9

15 個 x^3 和 7 個 x^2 和 18 個 x^1 和 (-9) 個 1

可以記錄成 $15 \times x^3 + 7 \times x^2 + 18 \times x^1 + (-9) \times x^0$

在指數記法中，任何非零整數的 0 次方的值為 1，
例如： $1^0 = 1$ ， $2^0 = 1$ ， $3^0 = 1$ ， \dots ， $10^0 = 1$ ，
如果以 x 代表底數數字，可以記為 $x^0 = 1$ 。



$15 \times x^3 + 7 \times x^2 + 18 \times x^1 + (-9) \times x^0$ ，
因為 $x^0 = 1$ ， $(-9) \times x^0 = (-9) \times 1 = (-9)$ ；
 $x^1 = x$ ， $18 \times x^1 = 18 \times x = 18x$ ，
所以簡記為 $15x^3 + 7x^2 + 18x + (-9)$ ，
可以把它看作 15 個 x^3 和 7 個 x^2 和 18 個 x 和 (-9) 個 1 的總和。





教材內容說明：

1. 本教材第 1～4 頁的教學重點在幫助學生理解 x 多項式的定義及相關名詞。
2. 第(2)題給定 10 的次方的表格內容及改記成橫式記錄，要求學生利用 x 的次方記錄表格內容。

教師先幫助學生將 10^3 有 23 個， 10^2 有 8 個， 10^1 有 12 個， 10^0 有 -5 個，記成

$23 \times 10^3 + 8 \times 10^2 + 12 \times 10^1 + (-5) \times 10^0$ ，再將 x^3 有 15 個， x^2 有 7 個， x^1 有 18 個， x^0 有 -9 個，

記成 $15 \times x^3 + 7 \times x^2 + 18 \times x^1 + (-9) \times x^0$ 。

- 本頁引入第(2)題的目的在幫助學生將 x 的多項式類比 10 的次方記數方法，也利用位值表建立 x 的多項式依照 x 的次方大小紀錄。

3. 本頁第一個對話框在提醒學生在指數記法中，任何非零整數的 0 次方的值為 1，如果以 x 代表底數數字，可以記為 $x^0 = 1$ 。
4. 本頁第二個對話框在幫助學生將 $15 \times x^3 + 7 \times x^2 + 18 \times x^1 + (-9) \times x^0$ 簡記成 $15x^3 + 7x^2 + 18x + (-9)$ ，並命名為 x 的多項式。

基本學習內容：AC-8-2-1 理解 x 多項式的定義及相關名詞；AC-8-3-1 整係數多項式的加、減法運算

像 $15x^3 + 7x^2 + 18x + (-9)$ 這樣的寫法，稱為 x 的多項式。

$15x^3$ 稱為 x 的 3 次項， $7x^2$ 稱為 x 的 2 次項，

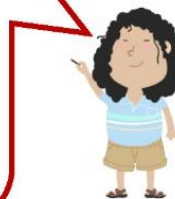
$18x$ 稱為 x 的 1 次項， (-9) 稱為常數項。

另外，

$15x^3$ 中的 15 稱為 x 的 3 次項係數，

$7x^2$ 中的 7 稱為 x 的 2 次項係數，

$18x$ 中的 18 稱為 x 的 1 次項係數， (-9) 稱為常數項係數。



(3) 請將 $18x + 15x^3 + (-9) + 7x^2$ 依照下列方式記錄下來：

① 次方由小到大排列

② 次方由大到小排列

解：

① 次方由小到大排列

$x^0=1$	x^1	x^2	x^3
-9	18	7	15

可以記錄成 $(-9) \times x^0 + 18 \times x^1 + 7 \times x^2 + 15 \times x^3$

也可以寫成 $(-9) \cdot 1 + 18 \cdot x^1 + 7 \cdot x^2 + 15 \cdot x^3$

也可以寫成 $(-9) + 18x^1 + 7x^2 + 15x^3$

② 次方由大到小排列

x^3	x^2	x^1	$x^0=1$
15	7	18	-9

可以記錄成 $15 \times x^3 + 7 \times x^2 + 18 \times x^1 + (-9) \times x^0$

也可以寫成 $15 \cdot x^3 + 7 \cdot x^2 + 18 \cdot x^1 + (-9) \cdot 1$

也可以寫成 $15x^3 + 7x^2 + 18x^1 + (-9)$



教材內容說明：

1. 本教材第 1～4 頁的教學重點在幫助學生理解理解 x 多項式的定義及相關名詞。
2. 本頁教師對話框提醒學生升冪排列為將各項依次方由小到大排列的結果；降冪排列各項依次方由大到小排列的結果。
3. 第(3)題給定 $18x+15x^3+(-9)+7x^2$ ，依照兩個子問題記錄，
子問題①：次方由小到大；
子問題②：次方由大到小。
子問題①方法：教師先幫助學生建立一個 x 的次方由小到大的次方表，再將多項式 18 個 x^1 ，15 個 x^3 ，7 個 x^2 ，-9 個 x^0 ，依對應的欄位記錄個數，最後依照次方由小到大記成 $(-9)+18x+7x^2+15x^3$ 。
子問題②方法：教師先幫助學生建立一個 x 的次方由大到小的次方表，再將多項式 18 個 x^1 ，15 個 x^3 ，7 個 x^2 ，-9 個 x^0 ，依對應的欄位記錄個數，最後依照次方由大到小記成 $15x^3+7x^2+18x+(-9)$ 。
● 本頁引入第(3)題的目的在幫助學生利用次方表分別以升冪、降冪排列多項式，並記錄下來。



基本學習內容：AC-8-2-1、AC-8-3-1

基本學習內容：AC-8-2-1 理解 x 多項式的定義及相關名詞；AC-8-3-1 整係數多項式的加、減法運算

$(-9) \times x^0 + 18 \times x^1 + 7 \times x^2 + 15 \times x^3$ 為次方由小到大排列，
可以稱為升次排列或升幂(讀音同密)排列。
 $15 \times x^3 + 7 \times x^2 + 18 \times x^1 + (-9) \times x^0$ 為次方由大到小排列，
可以稱為降次排列或降幂(讀音同密)排列。



隨堂練習

(1) 根據題目的多項式，於空格內填入適當的數：

多項式	x^3 項係數	x^2 項係數	x 項係數	常數項
$2x - 5$				
$5x^2 - 11x$				
$x^2 + 15 - 4x^3 + 4x$				

答：

多項式	x^3 項係數	x^2 項係數	x 項係數	常數項
$2x - 5$	0	0	2	-5
$5x^2 - 11x$	0	5	-11	0
$x^2 + 15 - 4x^3 + 4x$	-4	1	4	15

(2) 將多項式 $x^3 - 5 + 3x - 4x^2$ 依升幂排列，並寫出結果。

答： $-5 + 3x - 4x^2 + x^3$

(3) 將多項式 $x^3 - 5 + 3x - 4x^2$ 依降幂排列，並寫出結果。

答： $x^3 - 4x^2 + 3x - 5$



教材內容說明：

1. 本教材第 1～4 頁的教學重點在幫助學生理解理解 x 多項式的定義及相關名詞。
2. 本頁教師對話框提醒學生升冪排列為將各項依次方由小到大排列的結果；降冪排列各項依次方由大到小排列的結果。
3. 本頁隨堂練習，
第(1)題給定 $2x-5$ 、 $5x^2-11x$ 、 $x^2+15-4x^3+4x$ 三個多項式，要求學生分別寫出三個多項式的 x^3 、 x^2 、 x 項係數與常數項。
第(2)題給定 $x^3-5+3x-4x^2$ ，要求學生寫出升冪排列的結果。
第(3)題給定 $x^3-5+3x-4x^2$ ，要求學生寫出降冪排列的結果。



基本學習內容：AC-8-2-1 理解 x 多項式的定義及相關名詞；AC-8-3-1 整係數多項式的加、減法運算

◎多項式加法運算

(4)如果有二個多項式分別為 $3x^3+8x^2+2x+5$ 和 $2x^3+4x^2+7x+1$ ，
請算出這二個多項式的和。

解：

位值表格：

	x^3	x^2	x	1
	3	8	2	5
+	2	4	7	1
結果	5	12	9	6

直式加法：

$$\begin{array}{r}
 3x^3 + 8x^2 + 2x + 5 \\
 +) 2x^3 + 4x^2 + 7x + 1 \\
 \hline
 5x^3 + 12x^2 + 9x + 6
 \end{array}$$

將結果記為 $5x^3+12x^2+9x+6$

橫式：

$$\begin{aligned}
 &(3x^3+8x^2+2x+5) + (2x^3+4x^2+7x+1) \\
 &= 5x^3+12x^2+9x+6
 \end{aligned}$$

在第(4)題中，次數相同的項，稱為同類項，

例如： $3x^3$ 和 $2x^3$ 都是 x 的 3 次項，係數相加，得到 $(3+2)x^3=5x^3$ ；

$8x^2$ 和 $4x^2$ 都是 x 的 2 次項，係數相加，得到 $(8+4)x^2=12x^2$ ；

$2x$ 和 $7x$ 都是 x 的 1 次項，係數相加，得到 $(2+7)x=9x$ ；

5 和 1 都是常數項，常數相加，得到 $5+1=6$ 。

如果把題目中的同類項做合併計算，就可以算出多項式最後的結果。





教材內容說明：

1. 本教材第 5～8 頁的教學重點在幫助學生理解多項式加法的運算。

- 本教材第 5～8 頁利用位值(x 的次方)表格來記錄兩多項式，並進行加法運算，再對應到直式加法記錄，最後改記成橫式記錄。

2. 第(4)題給定 $3x^3+8x^2+2x+5$ 、 $2x^3+4x^2+7x+1$ 兩多項式，要求學生計算它們的和。
教師先幫助學生將 $3x^3+8x^2+2x+5$ 、 $2x^3+4x^2+7x+1$ 兩多項式記錄到位值(x 的次方)表格，將同次方的個數相加，再對應到直式加法記錄，最後改記成橫式記錄，得到 $5x^3+12x^2+9x+6$ 。

3. 本頁教師對話框提醒學生第(4)題中，次數相同的項稱為同類項，進行多項式加法運算，把同類項的係數相加，得到的結果即為該次數項的新係數。

基本學習內容：AC-8-2-1 理解 x 多項式的定義及相關名詞；AC-8-3-1 整係數多項式的加、減法運算

(5)①請完成多項式直式加法，並計算結果：

$$\begin{array}{r} x^3 + 5x^2 + (-7)x + (-2) \\ +) x^3 + (-4)x^2 + 10x + (-3) \\ \hline \end{array}$$

②請用橫式計算記錄①的過程與結果。

解：

直式加法：

$$\begin{array}{r} 1x^3 + 5x^2 + (-7)x + (-2) \\ +) 1x^3 + (-4)x^2 + 10x + (-3) \\ \hline 2x^3 + 1x^2 + 3x + (-5) \end{array}$$

記為 $2x^3 + x^2 + 3x + (-5)$ 。

橫式 - 兩多項式相加：

$$\begin{aligned} & [x^3 + 5x^2 + (-7)x + (-2)] + [x^3 + (-4)x^2 + 10x + (-3)] \\ &= 2x^3 + x^2 + 3x + (-5) \end{aligned}$$

橫式 - 8 項單項式相加：

$$\begin{aligned} & x^3 + 5x^2 + (-7)x + (-2) + x^3 + (-4)x^2 + 10x + (-3) \\ &= (1+1)x^3 + [5+(-4)]x^2 + [(-7)+10]x + [(-2)+(-3)] \\ &= 2x^3 + x^2 + 3x + (-5) \end{aligned}$$

x^3 表示 1 個 x^3 ，可以寫成 $1x^3$ 。
所以 $x^n = 1x^n$ ， $-x^n = -1x^n$ ，
 n 為整數。



在第(5)題中，發現兩種橫式記錄的結果相同，表示
 $[x^3 + 5x^2 + (-7)x + (-2)] + [x^3 + (-4)x^2 + 10x + (-3)]$
 $= x^3 + 5x^2 + (-7)x + (-2) + x^3 + (-4)x^2 + 10x + (-3)$
 也就是說兩多項式相加的中括號可以省略不寫，記錄成 8 項單項式相加運算。





教材內容說明：

1. 本教材第 5～8 頁的教學重點在幫助學生理解多項式加法的運算。

2. 第(5)題含有兩子問題，。依照兩個子題記錄：

子問題①：給定 $x^3 + 5x^2 + (-7)x + (-2)$ 、 $x^3 + (-4)x^2 + 10x + (-3)$ 兩多項式直式加法記錄，
要求學生計算結果。

子問題②：子問題①的過程與結果用橫式記錄下來。

子問題①方法：教師幫助學生依照直式加法將各次方係數相加。

子問題②方法：教師先幫助學生將子問題①記成

$[x^3 + 5x^2 + (-7)x + (-2)] + [x^3 + (-4)x^2 + 10x + (-3)]$ ，因為是加法運算，
可省略括號，看成 8 項單項式相加，
即 $x^3 + 5x^2 + (-7)x + (-2) + x^3 + (-4)x^2 + 10x + (-3)$ ，將同類項合併，
記為 $(1+1)x^3 + [5+(-4)]x^2 + [(-7)+10]x + [(-2)+(-3)]$ ，
得到 $2x^3 + x^2 + 3x + (-5)$ 。

3. 本頁教師對話框提醒學生第(5)題中，兩多項式相加

$[x^3 + 5x^2 + (-7)x + (-2)] + [x^3 + (-4)x^2 + 10x + (-3)]$ 與 8 項單項式相加

$x^3 + 5x^2 + (-7)x + (-2) + x^3 + (-4)x^2 + 10x + (-3)$ 結果相等，兩多項式相加的中括號可以省略
不寫，記錄成 8 項單項式相加運算。



基本學習內容：AC-8-2-1、AC-8-3-1

基本學習內容：AC-8-2-1 理解 x 多項式的定義及相關名詞；AC-8-3-1 整係數多項式的加、減法運算

(6)① $[5x^3 + 2x^2 + (-7)x + 6] + [7x^3 + 3x^2 + 4x + (-5)]$ 的和是多少？

② $(4x^3 + 3x + 5) + (6x^3 + 4x^2 + 3)$ 的和是多少？

解：

①直式加法：

$$\begin{array}{r} 5x^3 + 2x^2 + (-7)x + 6 \\ +) 7x^3 + 3x^2 + 4x + (-5) \\ \hline 12x^3 + 5x^2 + (-3)x + 1 \end{array}$$

將結果記為 $12x^3 + 5x^2 - 3x + 1$ 。

橫式：

$$\begin{aligned} & [5x^3 + 2x^2 + (-7)x + 6] + [7x^3 + 3x^2 + 4x + (-5)] \\ &= 5x^3 + 2x^2 + (-7)x + 6 + 7x^3 + 3x^2 + 4x + (-5) \\ &= 12x^3 + 5x^2 + (-3)x + 1 \\ &= 12x^3 + 5x^2 - 3x + 1 \end{aligned}$$

②

位值表格：

	x^3	x^2	x	1
	4	0	3	5
+	6	4	0	3
結果	10	4	3	8

直式加法：

$$\begin{array}{r} 4x^3 + 0 + 3x + 5 \\ +) 6x^3 + 4x^2 + 0 + 3 \\ \hline 10x^3 + 4x^2 + 3x + 8 \end{array}$$

將結果記為 $10x^3 + 4x^2 + 3x + 8$

橫式：

$$\begin{aligned} & (4x^3 + 3x + 5) + (6x^3 + 4x^2 + 3) \\ &= 4x^3 + 3x + 5 + 6x^3 + 4x^2 + 3 \\ &= 10x^3 + 4x^2 + 3x + 8 \end{aligned}$$

在第(6)題②中，我們發現多項式 $4x^3 + 3x + 5$ 缺了 x^2 項，
所以寫成 $4x^3 + 0x^2 + 3x + 5 = 4x^3 + 0 + 3x + 5$ ；
多項式 $6x^3 + 4x^2 + 3$ 缺了 x 項，
所以寫成 $6x^3 + 4x^2 + 0x + 3 = 6x^3 + 4x^2 + 0 + 3$ 。
如果進行兩多項式加法運算時，過缺項可以補 0，代替該項。





教材內容說明：

1. 本教材第 5～8 頁的教學重點在幫助學生理解多項式加法的運算。

2. 第(6)題含有兩子問題，要求學生計算它們的和。

子問題①：給定 $[5x^3 + 2x^2 + (-7)x + 6] + [7x^3 + 3x^2 + 4x + (-5)]$ 。

子問題②：給定 $(4x^3 + 3x + 5) + (6x^3 + 4x^2 + 3)$ 。

子問題①方法：教師要求學生用直式加法與橫式記錄進行兩多項式加法運算。

子問題②方法：教師先幫助學生將 $4x^3 + 3x + 5$ 、 $6x^3 + 4x^2 + 3$ 兩多項式記錄到位值(x 的次方)表格，發現 $4x^3 + 3x + 5$ 缺 x^2 項補 0， $6x^3 + 4x^2 + 3$ 缺 x 項補 0，將同次方的係數相加，再對應到直式加法記錄，最後改記成橫式記錄，得到 $10x^3 + 4x^2 + 3x + 8$ 。

3. 本頁對話框在幫助學生當遇到多項式缺項時，需要補 0，再進行直式加法，也就是說，該次數項的係數為 0。



基本學習內容：AC-8-2-1、AC-8-3-1

基本學習內容：AC-8-2-1 理解 x 多項式的定義及相關名詞；AC-8-3-1 整係數多項式的加、減法運算



隨堂練習

(1) 計算 $(x^2 + 6x + 5) + (3x^2 + 2x + 4)$ 的結果。

答： $4x^2 + 8x + 9$

(2) 計算 $(-2x^3 + 3x^2 + 5) + (7x^3 - 3x + 6)$ 的結果。

答： $5x^3 + 3x^2 - 3x + 11$



教材內容說明：

1. 本教材第 5～8 頁的教學重點在幫助學生理解多項式加法的運算。

2. 本頁隨堂練習，

第(1)題給定 $(x^2 + 6x + 5) + (3x^2 + 2x + 4)$ ，要求學生計算結果。

第(2)題給定 $(-2x^3 + 3x^2 + 5) + (7x^3 - 3x + 6)$ ，要求學生計算結果。



基本學習內容：AC-8-2-1 理解 x 多項式的定義及相關名詞；AC-8-3-1 整係數多項式的加、減法運算

◎多項式減法運算

(7) 計算 $(5x^3 + 7x^2 + 3x + 6) - (4x^3 + 2x^2 + x + 3)$ 的結果。

解：

直式減法：

$$\begin{array}{r}
 5x^3 + 7x^2 + 3x + 6 \\
 -) \quad 4x^3 + 2x^2 + 1x + 3 \\
 \hline
 1x^3 + 5x^2 + 2x + 3
 \end{array}$$

將結果記為 $x^3 + 5x^2 + 2x + 3$

橫式：

$$\begin{aligned}
 & (5x^3 + 7x^2 + 3x + 6) - (4x^3 + 2x^2 + x + 3) \\
 &= (5-4)x^3 + (7-2)x^2 + (3-1)x + (6-3) \\
 &= x^3 + 5x^2 + 2x + 3
 \end{aligned}$$

在第(7)題中，我們利用直式計算兩多項式相減時，將
 兩個 x^3 項係數相減， $(5-4)x^3$ ；
 兩個 x^2 項係數相減， $(7-2)x^2$ ；
 兩個 x 項係數相減， $(3-1)x$ ；
 兩個常數項相減， $(6-3)$ ，再將各項結果相加。

$$\begin{aligned}
 & \text{表示 } (5x^3 + 7x^2 + 3x + 6) - (4x^3 + 2x^2 + x + 3) \\
 &= (5-4)x^3 + (7-2)x^2 + (3-1)x + (6-3)
 \end{aligned}$$

所以兩多項式相減時可以記錄成同類項合併，得到 x 的各次方單項式相加運算。





教材內容說明：

1. 本教材第 9～14 頁的教學重點在幫助學生理解多項式減法的運算。

● 本教材第 9～14 頁利用直式減法記錄多項式減法運算，再改記成橫式記錄。

2. 第(7)題給定 $(5x^3 + 7x^2 + 3x + 6) - (4x^3 + 2x^2 + x + 3)$ ，要求學生計算它們的結果。

教師先幫助學生將 $(5x^3 + 7x^2 + 3x + 6) - (4x^3 + 2x^2 + x + 3)$ 用直式減法記錄，將同次數項的係數相減；改記成橫式記錄，將同類項係數相減，得到 $x^3 + 5x^2 + 2x + 3$ 。

3. 本頁對話框在幫助學生作兩多項式減法時，將同類項係數合併相減，得到 x 的各次方單項式相加運算。



基本學習內容：AC-8-2-1 理解 x 多項式的定義及相關名詞；AC-8-3-1 整係數多項式的加、減法運算

(8)①請完成下列多項式直式減法，並計算結果：

$$\begin{array}{r} 4x^3 + 5x^2 + (-7)x + (-2) \\ -) \quad 6x^3 + (-4)x^2 + (-3)x + (-5) \\ \hline \end{array}$$

② 請用橫式計算記錄①的過程與結果。

解：

①

直式減法：

$$\begin{array}{r} 4x^3 + 5x^2 + (-7)x + (-2) \\ -) \quad 6x^3 + (-4)x^2 + (-3)x + (-5) \\ \hline (-2)x^3 + 9x^2 + (-4)x + 3 \end{array}$$

將結果記為 $-2x^3 + 9x^2 - 4x + 3$

②

橫式：

$$\begin{aligned} & [4x^3 + 5x^2 + (-7)x + (-2)] - [6x^3 + (-4)x^2 + (-3)x + (-5)] \\ &= (4-6)x^3 + [5-(-4)]x^2 + [(-7)-(-3)]x + [(-2)-(-5)] \\ &= (-2)x^3 + 9x^2 + (-4)x + 3 \end{aligned}$$

在第(8)題中，

$$\begin{aligned} & (5x^3 + 7x^2 + 3x + 6) - [(-2)x^3 + (-1)x^2 + 5x + (-4)] \\ &= [5-(-2)]x^3 + [7-(-1)]x^2 + (3-5)x + [6-(-4)] \end{aligned}$$

表示兩多項式相減時可以記錄成同類項合併，得到 x 的各次方單項式相加運算。





教材內容說明：

1. 本教材第 9～14 頁的教學重點在幫助學生理解多項式減法的運算。

2. 第(8)題含有兩子問題，依照兩個子題記錄：

子問題①：給定 $4x^3 + 5x^2 + (-7)x + (-2)$ 、 $6x^3 + (-4)x^2 + (-3)x + (-5)$ 兩多項式直式減法記錄，
要求學生計算結果。

子問題②：子問題①的過程與結果用橫式記錄下來。

子問題①方法：教師幫助學生依照直式減法將各次方項係數相減。

子問題②方法：教師先幫助學生將子問題①記成

$[4x^3 + 5x^2 + (-7)x + (-2)] - [6x^3 + (-4)x^2 + (-3)x + (-5)]$ ，將同類項合併，記為

$(4-6)x^3 + [5-(-4)]x^2 + [(-7)-(-3)]x + [(-2)-(-5)]$ ，得到 $(-2)x^3 + 9x^2 + (-4)x + 3$ 。

3. 本頁對話框在幫助學生作兩多項式減法時，將同類項係數合併相減，得到 x 的各次方單項式相加運算。

基本學習內容：AC-8-2-1 理解 x 多項式的定義及相關名詞；AC-8-3-1 整係數多項式的加、減法運算

(9) 請計算 $(2x^2 + 3x + 6) - [(-3)x^2 + (-5)]$ 的結果。

解：

直式減法：

$$\begin{array}{r} 2x^2 + 3x + 6 \\ -) \quad (-3)x^2 + 0 + (-5) \\ \hline 5x^2 + 3x + 11 \end{array}$$

將結果記為 $5x^2 + 3x + 11$

橫式：

$$\begin{aligned} & (2x^2 + 3x + 6) - [(-3)x^2 + (-5)] \\ &= [2 - (-3)]x^2 + 3x + [6 - (-5)] \\ &= 5x^2 + 3x + 11 \end{aligned}$$

在第(9)題中，我們發現多項式 $[(-3)x^2 + (-5)]$ 缺了 x 項，所以寫成 $[(-3)x^2 + 0x + 5] = [(-3)x^2 + 0 + 5]$ 。
如果進行兩多項式直式減法運算時，遇缺項可以補 0，代替該項。



(10) ① $x^2 + (-2)x + (-3)$ 與 $x^2 - 2x - 3$ 是否相等？

② $(-1)x^2 + (-1)x + (-1)$ 與 $-x^2 - x - 1$ 是否相等？

解：

①

$$\begin{aligned} & [x^2 + (-2)x + (-3)] - (x^2 - 2x - 3) \\ &= [1x^2 + (-2)x + (-3)] - (1x^2 - 2x - 3) \\ &= (1-1)x^2 + [(-2) - (-2)]x + [(-3) - (-3)] \\ &= 0 \\ &\text{因為 } [x^2 + (-2)x + (-3)] - (x^2 - 2x - 3) = 0, \\ &\text{所以 } x^2 + (-2)x + (-3) = x^2 - 2x - 3. \end{aligned}$$



教材內容說明：

1. 本教材第 9～14 頁的教學重點在幫助學生理解多項式減法的運算。

2. 第(9)題給定 $(2x^2 + 3x + 6) - [(-3)x^2 + (-5)]$ ，要求學生計算結果。

教師先幫助學生將 $(2x^2 + 3x + 6) - [(-3)x^2 + (-5)]$ 用直式減法記錄，發現 $[(-3)x^2 + (-5)]$ 缺 x 項補 0，再將同次方項的係數相減；最後改記成橫式記錄，得到 $5x^2 + 3x + 11$ 。

3. 本頁對話框在幫助學生當遇到多項式缺項時，需要補 0，再進行直式減法，也就是說，該次數項的係數為 0。

4. 第(10)題含有兩個子問題，要求學生比較兩多項式的結果是否相等：

子問題①： $x^2 + (-2)x + (-3)$ 與 $x^2 - 2x - 3$ 的結果是否相等。

子問題②： $(-1)x^2 + (-1)x + (-1)$ 與 $-x^2 - x - 1$ 的結果是否相等。

子問題①②方法：將兩多項式相減，將同類項合併係數相減，發現結果都為 0，表示兩個子問題的多項式相等，記為

$x^2 + (-2)x + (-3) = x^2 - 2x - 3$ ， $(-1)x^2 + (-1)x + (-1) = -x^2 - 1x - 1$ 。



基本學習內容：AC-8-2-1 理解 x 多項式的定義及相關名詞；AC-8-3-1 整係數多項式的加、減法運算

②

$$\begin{aligned} & [(-1)x^2 + (-1)x + (-1)] - (-x^2 - x - 1) \\ &= [(-1)x^2 + (-1)x + (-1)] - (-1x^2 - 1x - 1) \\ &= [(-1) - (-1)]x^2 + [(-1) - (-1)]x + [(-1) - (-1)] \\ &= 0 \\ &\text{因為 } [(-1)x^2 + (-1)x + (-1)] - (-x^2 - x - 1) = 0, \\ &\text{所以 } (-1)x^2 + (-1)x + (-1) = -x^2 - x - 1。 \end{aligned}$$

從第(10)題發現：

$$x^2 + (-2)x + (-3) = x^2 - 2x - 3, \text{ 表示 } x^2 + (-2)x + (-3)$$

為了省略括號，可簡記為 $x^2 - 2x - 3$ 。

$$(-1)x^2 + (-1)x + (-1) = -1x^2 - 1x - 1, \text{ 表示 } (-1)x^2 + (-1)x + (-1)$$

為了省略括號，可簡記成 $-1x^2 - 1x - 1$ ；

$$-1x^2 - 1x - 1 = -x^2 - x - 1, \text{ 表示}$$

$$-1x^2 - 1x - 1 \text{ 中的 } -1x^2 \text{ 簡記成 } -x^2, -1x \text{ 簡記成 } -x,$$

但常數項 -1 不能再簡記。



(11)①計算 $(x^3 + x^2 + x + 1) + [(-4)x^3 + (-3)x^2 + 5x + 6]$ 的結果。

②計算 $(x^3 + x^2 + x + 1) - (4x^3 + 3x^2 - 5x - 6)$ 的結果。

③說說看， $(x^3 + x^2 + x + 1) + [(-4)x^3 + (-3)x^2 + 5x + 6]$ 與

$$(x^3 + x^2 + x + 1) - (4x^3 + 3x^2 - 5x - 6) \text{ 的結果相等嗎？}$$

解：

$$\begin{aligned} \text{① } & (x^3 + x^2 + x + 1) + [(-4)x^3 + (-3)x^2 + 5x + 6] \\ &= (1x^3 + 1x^2 + 1x + 1) + [(-4)x^3 + (-3)x^2 + 5x + 6] \\ &= [1 + (-4)]x^3 + [1 + (-3)]x^2 + (1 + 5)x + (1 + 6) \\ &= (-3)x^3 + (-2)x^2 + 6x + 7 \\ &= -3x^3 - 2x^2 + 6x + 7 \end{aligned}$$



教材內容說明：

1. 本教材第 9～14 頁的教學重點在幫助學生理解多項式減法的運算。
2. 本頁教師對話框幫助學生發現第(4)題整係數多項式，為了省略括號可記為自然係數多項式。
3. 第(11)題含有三個子問題，要求學生計算結果，並比較兩多項式的結果是否相等：

子問題①：計算 $(x^3 + x^2 + x + 1) + [(-4)x^3 + (-3)x^2 + 5x + 6]$ 的結果。

子問題②：計算 $(x^3 + x^2 + x + 1) - (4x^3 + 3x^2 - 5x - 6)$ 的結果。

子問題③：比較 $(x^3 + x^2 + x + 1) + [(-4)x^3 + (-3)x^2 + 5x + 6]$
 與 $(x^3 + x^2 + x + 1) - (4x^3 + 3x^2 - 5x - 6)$ 的結果是否相等。

● 教師先幫助學生計算子問題①，得到 $-3x^3 - 2x^2 + 6x + 7$ 。

接著子問題②方法：將 $(x^3 + x^2 + x + 1) - (4x^3 + 3x^2 - 5x - 6)$ 改記成整係數多項式 $(1x^3 + 1x^2 + 1x + 1) - [4x^3 + 3x^2 + (-5)x + (-6)]$ 進行計算，得到 $-3x^3 - 2x^2 + 6x + 7$ 。

子問題③方法：根據子問題①②結果知道 $(x^3 + x^2 + x + 1) + [(-4)x^3 + (-3)x^2 + 5x + 6]$
 與 $(x^3 + x^2 + x + 1) - (4x^3 + 3x^2 - 5x - 6)$ 的結果相等，

● 教師可以幫助學生從第(5)題作結論， $x^3 + x^2 + x + 1$ 減去 $4x^3 + 3x^2 - 5x - 6$ ，
 即為 $x^3 + x^2 + x + 1$ 加上相反係數多項式 $[(-4)x^3 + (-3)x^2 + 5x + 6]$ 。



基本學習內容：AC-8-2-1、AC-8-3-1

基本學習內容：AC-8-2-1 理解 x 多項式的定義及相關名詞；AC-8-3-1 整係數多項式的加、減法運算② 將 $(x^3 + x^2 + x + 1) - (4x^3 + 3x^2 - 5x - 6)$ 改記為

$$\begin{aligned} & (1x^3 + 1x^2 + 1x + 1) - [4x^3 + 3x^2 + (-5)x + (-6)] \\ &= (1-4)x^3 + (1-3)x^2 + [1-(-5)]x + [1-(-6)] \\ &= (-3)x^3 + (-2)x^2 + 6x + 7 \\ &= -3x^3 - 2x^2 + 6x + 7 \end{aligned}$$

③ 因為 $(x^3 + x^2 + x + 1) + [(-4)x^3 + (-3)x^2 + 5x + 6] = -3x^3 - 2x^2 + 6x + 7$ ，

$$(x^3 + x^2 + x + 1) - (4x^3 + 3x^2 - 5x - 6) = -3x^3 - 2x^2 + 6x + 7，$$

所以

$$(x^3 + x^2 + x + 1) + [(-4)x^3 + (-3)x^2 + 5x + 6] = (x^3 + x^2 + x + 1) - (4x^3 + 3x^2 - 5x - 6)$$

從第(11)題發現：

$$(x^3 + x^2 + x + 1) + [(-4)x^3 + (-3)x^2 + 5x + 6] = (x^3 + x^2 + x + 1) - (4x^3 + 3x^2 - 5x - 6)，$$

表示 $[(-4)x^3 + (-3)x^2 + 5x + 6] = -(4x^3 + 3x^2 - 5x - 6)$ ，也就是說
減去 $(4x^3 + 3x^2 - 5x - 6)$ 可記為加上 $[(-4)x^3 + (-3)x^2 + 5x + 6]$ 。另外， $(4x^3 + 3x^2 - 5x - 6) = [4x^3 + 3x^2 + (-5)x + (-6)]$ 的各項係數與
 $[(-4)x^3 + (-3)x^2 + 5x + 6]$ 的各項係數互為相反數，
例如：4 和 (-4) ，3 和 (-3) ， (-5) 和 5， (-6) 和 6。如果 P 為多項式， $P - (ax^3 + bx^2 + cx + d)$ 可記為 $P + [(-a)x^3 + (-b)x^2 + (-c)x + (-d)]$ ，表示

$$P - (ax^3 + bx^2 + cx + d) = P + [(-a)x^3 + (-b)x^2 + (-c)x + (-d)]。$$

(12) 計算 $(3x^2 + 2x - 1) - (5x - 4x^2 - 6)$ 的結果。

解：

方法一、

$$\begin{aligned} & (3x^2 + 2x - 1) - (5x - 4x^2 - 6) \\ &= (3x^2 + 2x - 1) - (-4x^2 + 5x - 6) \\ &= (3x^2 + 2x - 1) - [(-4)x^2 + 5x + (-6)] \\ &= [3 - (-4)]x^2 + (2 - 5)x + [(-1) - (-6)] \\ &= 7x^2 - 3x + 5 \end{aligned}$$



教材內容說明：

1. 本教材第 9～14 頁的教學重點在幫助學生理解多項式減法的運算。

2. 本頁第一個教師對話框幫助學生發現第(5)題多項式減法中，

減去 $(4x^3 + 3x^2 - 5x - 6)$ 可記為加上 $[(-4)x^3 + (-3)x^2 + 5x + 6]$ 。

另外， $4x^3 + 3x^2 - 5x - 6$ 的各項係數與 $[(-4)x^3 + (-3)x^2 + 5x + 6]$ 的各項係數互為相反數。

3. 本頁第二個教師對話框幫助學生歸納進行多項式減法運算時可利用

$$P - (ax^3 + bx^2 + cx + d) = P + [(-a)x^3 + (-b)x^2 + (-c)x + (-d)]。$$

4. 第(12)題給定 $(3x^2 + 2x - 1) - (5x - 4x^2 - 6)$ ，要求學生計算結果。

方法一：教師可以幫助學生將 $(3x^2 + 2x - 1) - (5x - 4x^2 - 6)$ ，改記成整係

數多項式減法 $(3x^2 + 2x - 1) - [(-4)x^2 + 5x + (-6)]$ 進行計算。

方法二：教師也可以幫助學生利用 $3x^2 + 2x - 1$ 減去 $5x - 4x^2 - 6$ ，

即為 $3x^2 + 2x - 1$ 加上相反係數的多項式 $-5x + 4x^2 + 6$ 進行計算。



基本學習內容：AC-8-2-1、AC-8-3-1

基本學習內容：AC-8-2-1 理解 x 多項式的定義及相關名詞；AC-8-3-1 整係數多項式的加、減法運算

方法二、

$$\begin{aligned} & (3x^2+2x-1)-(5x-4x^2-6) \\ & = (3x^2+2x-1)-(-4x^2+5x-6) \\ & = (3x^2+2x-1)+[4x^2+(-5)x+6] \\ & = 7x^2-3x+5 \end{aligned}$$

(13) 計算 $(x^3+2x-1)-(3x^3-4x^2+5)$ 的結果。

解：

$$\begin{aligned} & (x^3+2x-1)-(3x^3-4x^2+5) \\ & = (1x^3+0+2x-1)-(3x^3-4x^2+0+5) \\ & = (1x^3+0+2x-1)+[(-3)x^3+4x^2+0+(-5)] \\ & = -2x^3+4x^2+2x-6 \end{aligned}$$



隨堂練習

(1) 計算 $(x^2+6x+5)-(3x^2+2x+4)$ 的結果。

答： $-2x^2+4x+1$

(2) 計算 $(3x^3+x-5)-(6x^3-2x^2+4)$ 的結果。

答： $-3x^3+2x^2+x-9$



教材內容說明：

1. 本教材第 9～14 頁的教學重點在幫助學生理解多項式減法的運算。

2. 第(13)題給定 $(x^3 + 2x - 1) - (3x^3 - 4x^2 + 5)$ ，要求學生計算結果。

教師可以幫助學生將多項式減法，改記成整係數多項式減法進行計算；

也可以利用 $-(ax^2 + bx + c)$ ，即為加上相反係數的多項式，記為 $+(-ax^2 - bx - c)$ 進行計算。

● 本頁引入第(7)題在幫助學生熟練多項式減法的運算。

3. 本頁隨堂練習，

第(1)題給定 $(x^2 + 6x + 5) - (3x^2 + 2x + 4)$ ，要求學生計算結果。

第(2)題給定 $(3x^3 + x - 5) - (6x^3 - 2x^2 + 4)$ ，要求學生計算結果。

基本學習內容：AC-8-2-1 理解 x 多項式的定義及相關名詞；AC-8-3-1 整係數多項式的加、減法運算



小試身手

(1) 根據題目的多項式，於空格內填入適當的數：

多項式	x^2 項係數	x 項係數	常數項
$3x+7$			
$-2x^2+4x+9$			
$3x^2+15$			
-5			

答：

多項式	x^2 項係數	x 項係數	常數項
$3x+7$	0	3	7
$-2x^2+4x+9$	-2	4	9
$3x^2+15$	3	0	15
-5	0	0	-5

(2) 將多項式 $-2x^3-7-5x^2+x$ 依升冪排列，並寫出結果。

答： $-7+x-5x^2-2x^3$

(3) 將多項式 $x^2-6+4x-2x^3$ 依降冪排列，並寫出結果。

答： $-2x^3+x^2+4x-6$

(4) 計算 $(5x^2+3x+6)+(-2x^2+4x+9)$ 的結果。

答： $3x^2+7x+15$

(5) 計算 $(2x^2-5x^3+6)+(6+4x+2x^3)$ 的結果。

答： $-3x^3+2x^2+4x+12$

(6) 計算 $(4x^2-2x-6)-(-2x^2+3x+9)$ 的結果。

答： $6x^2-5x-15$

(7) 計算 $(2x^2-6)-(9-2x+3x^2)$ 的結果。

答： $-x^2+2x-15$

(8) 已知有一多項式 A 與 x^2+4x-5 的和為 $-3x^2-7x+9$ ，
請問多項式 A 為多少？

答： $-4x^2-11x+14$



教材內容說明：

1. 本教材第 15 頁為小試身手。
2. 第(1)題給定 $3x+7$ 、 $-2x^2+4x+9$ 、 $3x^2+15$ 、 -5 四個多項式，要求學生分別寫出四個多項式的 x^2 、 x 項係數與常數項。
3. 第(2)題給定多項式 $-2x^3-7-5x^2+x$ ，要求學生寫出升冪排列的結果。
4. 第(3)題給定多項式 $x^2-6+4x-2x^3$ ，要求學生寫出降冪排列的結果。
5. 第(4)題給定 $(5x^2+3x+6)+(-2x^2+4x+9)$ ，要求學生計算結果。
6. 第(5)題給定 $(2x^2-5x^3+6)+(6+4x+2x^3)$ ，要求學生計算結果。
7. 第(6)題給定 $(4x^2-2x-6)-(-2x^2+3x+9)$ ，要求學生計算結果。
8. 第(7)題給定 $(2x^2-6)-(9-2x+3x^2)$ ，要求學生計算結果。
9. 第(8)題給定多項式 A 與 x^2+4x-5 的和為 $-3x^2-7x+9$ ，要求學生解出多項式 A 。



教育部國民及學前教育署 編

國民中學
學生學習扶助教材 **8** 年級數學

