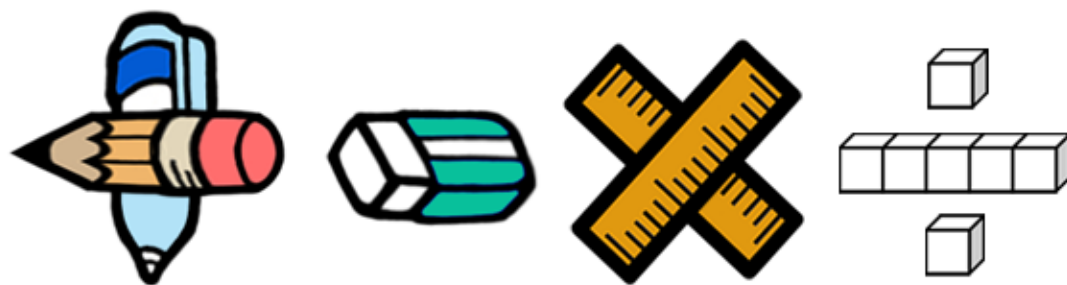


基本學習內容：AC-8-4-1、2

整係數多項式的因式、倍式

認識因式分解的意義

【教師用】





基本學習內容：AC-8-4-1、2

學習內容：

A-8-4 因式分解：因式的意義(限制在二次多項式的一次因式)；二次多項式的因式分解意義。

基本學習內容：

AC-8-4-1 整係數多項式的因式、倍式。

AC-8-4-2 認識因式分解的意義。

基本學習表現：

ACP-8-4-1-1 認識因式、倍式。

ACP-8-4-1-2 能利用除法判別兩整係數多項式間是否有因式、倍式的關係。

ACP-8-4-1-3 能從「 $A \div B = Q$ 」中判別 A 是 B 和 Q 的倍式， B 和 Q 是 A 的因式(以整係數多項式為限)。

ACP-8-4-1-4 能從「 $A = B \times Q$ 」中判別 A 是 B 和 Q 的倍式， B 和 Q 是 A 的因式(以整係數多項式為限)。

ACP-8-4-2-1 認識因式分解的意義。



概要說明：

整係數多項式的因式、倍式

- 本基本學習內容 AC-8-4-1 為 AC-8-3-2 和 AC-8-3-3 之後續學習概念，故學生應該已熟練多項式的乘法與除法運算。
- 本基本學習內容教學的重點在於幫助學生將國小因數、倍數的經驗類比到多項式進行因式和倍式的討論。因此，本基本學習內容教材分成三個部分：
 - (1)複習國小因數與倍數。
 - (2)從除法算式判斷因式與倍式關係。
 - (3)從乘法算式判斷因式與倍式關係。
- 本基本學習內容在整係數多項式的限制下，討論因式、倍式的問題。
- 本基本學習內容限制多項式只能分解成兩個一次因式的乘積，不討論分解成常數與二次因式的乘積。

認識因式分解的意義

- 基本學習內容 AC-8-4-2 為 AC-8-4-1 之後續學習概念，故學生應該已理解因式與倍式的意義。
- 本基本學習內容教學的重點在於幫助學生理解因式分解的意義。因式分解的範圍限制被分解的多項式為二次式，因此，本基本學習內容教材分成三個部分：
 - (1)能從「 $A \div B = Q$ 」推得「 $A = B \times Q$ 」，我們稱 A 的因式分解為「 $B \times Q$ 」。
 - (2)多項式有整數因數時，提出或不提出整數因數的結果都可以稱為因式分解。
舉例如下：

$$2x^2 - 6x + 4 = (2x - 2)(x - 2) = 2(x - 1)(x - 2)$$
 則 $(2x - 2)(x - 2)$ 和 $2(x - 1)(x - 2)$ 都稱為 $2x^2 - 6x + 4$ 的因式分解。
 - (3)給定 $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)(x - 1) = (x - 1)^2$
 我們稱 $(x - 1)^2$ 為 $x^2 - 2x + 1$ 的因式分解，也稱 $x^2 - 2x + 1$ 為完全平方式。
- 本基本學習內容在整係數多項式的限制下，討論因式分解的意義。



基本學習內容：AC-8-4-1、2 整係數多項式的因式、倍式；認識因式分解的意義

◎整係數多項式的因式、倍式

複習因數與倍數

(1) 已知 $132 \div 12 = 11 \cdots 0$ ，下列敘述何者正確？

正確敘述請畫○，錯誤敘述請畫×。

_____ ① 11 是 132 的因數。

_____ ② 12 是 132 的因數。

_____ ③ 132 是 11 的倍數。

_____ ④ 12 是 132 的倍數。

解：

_____○ ① 11 是 132 的因數。

_____○ ② 12 是 132 的因數。

_____○ ③ 132 是 11 的倍數。

_____× ④ 12 是 132 的倍數。

因為 $132 \div 12 = 11 \cdots 0$ ，也可以記為 $11 \times 12 = 132$ ，

所以我們可以從除法算式、乘法算式知道

11、12 是 132 的因數，132 是 11、12 的倍數。



重點整理

$a \div b = c \cdots 0$ ， a 、 b 、 c 都是正整數，也可以記為 $b \times c = a$ ，

我們稱 b 、 c 是 a 的因數，稱 a 是 b 、 c 的倍數。



教材內容說明：

1. 本教材第 1 頁的教學重點是複習因數與倍數的意義。
2. 第(1)題給定 $132 \div 12 = 11 \cdots 0$ ，要求學生判斷三數 132、12、11 的因數與倍數關係。

本教材提供解法如下：

教師引導學生看到 $132 \div 12 = 11 \cdots 0$ ，說明餘數為 0 就代表整除，

也可以記為 $132 = 11 \times 12$ ，從除法算式、乘法算式都可以知道 11 和 12 都是 132 的因數、132 是 11 的倍數，也是 12 的倍數。

● 教師應幫助學生能從除法算式中看到被除數、除數和商之間的因倍數關係，也能從乘法算式看到被乘數、乘數和積之間的因倍數關係。

3. 本頁重點整理在說明當三個正整數滿足 $a \div b = c \cdots 0$ 時，也可以記為，幫助學生從除法算式和乘法算式皆可以看到 b 、 c 都是 a 的因數， a 是 b 、 c 的倍數。

基本學習內容：AC-8-4-1、2 整係數多項式的因式、倍式；認識因式分解的意義

認識因式與倍式

$90 \div 9 = 10 \cdots 0$ ，因為 $90 \div 9$ 的餘數是 0，

所以 9 是 90 的因數，90 是 9 的倍數。

$91 \div 9 = 10 \cdots 1$ ，因為 $91 \div 9$ 的餘數不是 0，

所以 9 不是 91 的因數，91 不是 9 的倍數。



$(x^2 + 3x + 2) \div (x + 1) = (x + 2) \cdots 0$ ，因為 $(x^2 + 3x + 2) \div (x + 1)$ 的餘式是 0，

我們稱 $x + 1$ 是 $x^2 + 3x + 2$ 的**因式**， $x^2 + 3x + 2$ 是 $x + 1$ 的**倍式**。

$(x^2 + 3x + 4) \div (x + 1) = (x + 2) \cdots 2$ ，因為 $(x^2 + 3x + 4) \div (x + 1)$ 的餘式不是 0，

我們稱 $x + 1$ 不是 $x^2 + 3x + 4$ 的**因式**， $x^2 + 3x + 4$ 不是 $x + 1$ 的**倍式**。

(1) ① 判斷 $x + 1$ 是否為 $x^2 + 2x + 1$ 的因式。

② 判斷 x 是否為 $2x^2 + 3x + 2$ 的因式。

解：①

$$\begin{array}{r}
 \overline{) x^2 + 2x + 1} \\
 \underline{x^2 + x} \\
 x + 1 \\
 \underline{x + 1} \\
 0
 \end{array}$$

因為 $(x^2 + 2x + 1) \div (x + 1)$ 的餘式是 0，
所以 $(x + 1)$ 是 $(x^2 + 2x + 1)$ 的**因式**。

②

$$\begin{array}{r}
 \overline{) 2x^2 + 3x + 2} \\
 \underline{2x^2 + 0x} \\
 3x + 2 \\
 \underline{3x + 0} \\
 2
 \end{array}$$

因為 $(2x^2 + 3x + 2) \div x$ 的餘式不是 0，
所以 x 不是 $(2x^2 + 3x + 2)$ 的**因式**。



教材內容說明：

1. 本教材第 2～5 頁的教學重點在幫助學生認識因式與倍式。
2. 本頁對話框在幫助學生從因數與倍數的意義理解因式與倍式的定義。

給定 $90 \div 9 = 10 \cdots 0$ ，因為餘數是 0，所以 9 是 90 的因數，90 是 9 的倍數。

給定 $91 \div 9 = 10 \cdots 1$ ，因為餘數不是 0，所以 9 不是 91 的因數，91 不是 9 的倍數。

類推至整係數多項式可以看到，

給定 $(x^2 + 3x + 2) \div (x + 1) = (x + 2) \cdots 0$ ，因為餘式是 0，

所以 $(x + 1)$ 是 $(x^2 + 3x + 2)$ 的因式， $(x^2 + 3x + 2)$ 是 $(x + 1)$ 的倍式。

給定 $(x^2 + 3x + 4) \div (x + 1) = (x + 2) \cdots 2$ ，因為餘式不是 0，

所以 $(x + 1)$ 不是 $(x^2 + 3x + 4)$ 的因式， $(x^2 + 3x + 4)$ 不是 $(x + 1)$ 的倍式。

3. 第(1)題包含子問題①和子問題②：

子問題①：給定除式 $x + 1$ ，被除式是平方項係數為 1 的二次式，

要求學生判斷 $(x + 1)$ 是否為 $(x^2 + 2x + 1)$ 的因式。

教師引導學生利用長除法，發現 $(x^2 + 2x + 1) \div (x + 1)$ 的餘式是 0，

所以 $(x + 1)$ 是 $(x^2 + 2x + 1)$ 的因式。

子問題②：給定除式 x ，被除式是平方項係數為 2 的二次式，

要求學生判斷 x 是否為 $(2x^2 + 3x + 2)$ 的因式。

教師引導學生利用長除法，發現 $(2x^2 + 3x + 2) \div x$ 的餘式不是 0，

所以 x 不是 $(2x^2 + 3x + 2)$ 的因式。

- 若學生對長除法的計算不熟練，教師可參閱 AC-8-3-3 的教師版，或提供 AC-8-3-3 的教材給學生練習。



基本學習內容：AC-8-4-1、2

基本學習內容：AC-8-4-1、2 整係數多項式的因式、倍式；認識因式分解的意義

(2) ① 判斷 $x+2$ 是否為 $x^2-3x-10$ 的因式。

② 判斷 $2x-4$ 是否為 $3x^2-6x+1$ 的因式。

解：①

被除式

$$x^2-3x-10=x^2+(-3)x+(-10)$$

$$\begin{array}{r} \overline{) x^2 + (-3)x + (-10)} \\ \underline{x^2 + 2x } \\ (-5)x + (-10) \\ \underline{(-5)x + (-10)} \\ 0 \end{array}$$

因為 $(x^2-3x-10) \div (x+2)$ 的餘式是 0，
所以 $(x+2)$ 是 $(x^2-3x-10)$ 的因式。

②

除式 $2x-4=2x+(-4)$

$$\text{被除式 } 3x^2-6x+1=3x^2+(-6)x+1$$

$$\begin{array}{r} \overline{) 3x^2 + (-6)x + 1} \\ \underline{\frac{3}{2}x + 0} \\ 3x^2 + (-6)x + 1 \\ \underline{3x^2 + (-6)x} \\ 1 \end{array}$$

因為 $(3x^2-6x+1) \div (2x-4)$ 的餘式不是 0，
所以 $(2x-4)$ 不是 $(3x^2-6x+1)$ 的因式。

(3) 已知多項式 $(x^2+3x+2) \div (x+1) = (x+2)$ ，

說說看， $(x+2)$ 是否為 (x^2+3x+2) 的因式， (x^2+3x+2) 是否為 $(x+2)$ 的倍式。

解：

將 (x^2+3x+2) 除以 $(x+2)$ 得到餘式為 0，

所以 $(x+2)$ 是 (x^2+3x+2) 的因式，

(x^2+3x+2) 是 $(x+2)$ 的倍式。

$$\begin{array}{r} \overline{) x^2 + 3x + 2} \\ \underline{x^2 + 2x} \\ x + 2 \\ \underline{x + 2} \\ 0 \end{array}$$



教材內容說明：

1. 本教材第 2～5 頁的教學重點在幫助學生認識因式與倍式。

2. 第(2)題包含子問題①和子問題②：

- 前頁第(1)題多項式各項係數均為正數，本題係數開始出現負數。

子問題①：要求學生判斷 $(x+2)$ 是否為 $(x^2-3x-10)$ 的因式。

- 教師引導學生先將包含「 $-$ 」的被除式改寫成以加號連結的多項式，將 $x^2-3x-10$ 寫成 $x^2+(-3)x+(-10)$ 後再進行除法計算，發現 $(x^2-3x-10) \div (x+2)$ 的餘式是 0，

所以 $(x+2)$ 是 $(x^2-3x-10)$ 的因式。

子問題②：要求學生判斷 $(2x-4)$ 是否為 $(3x^2-6x+1)$ 的因式。

3. 第(3)題給定 $(x^2+3x+2) \div (x+1) = (x+2)$ ，要求學生判斷 $(x+2)$ 是否為 (x^2+3x+2) 的因式、 (x^2+3x+2) 是否為 $(x+2)$ 的倍式。

教師應幫助學生透過 $(x^2+3x+2) \div (x+2)$ 的餘式為 0，判斷 $(x+2)$ 為 (x^2+3x+2) 的因式、 (x^2+3x+2) 是 $(x+2)$ 的倍式。

- 因為學生尚無法由 $(x^2+3x+2) \div (x+1) = (x+2)$ 判斷商為被除式的因式，所以必須透過 $(x^2+3x+2) \div (x+2)$ 來判斷。



基本學習內容：AC-8-4-1、2 整係數多項式的因式、倍式；認識因式分解的意義

重點整理

從餘式為 0 的除法算式 $A \div B = C \cdots 0$ ，

可以知道『A 是 B、C 的倍式，B、C 都是 A 的因式』。

在整除的算式中，可以知道『被除式是除式和商的倍式，除式和商都是被除式的因式』。

(4) 已知多項式 $(x^2 - 3x + a) \div (x - 5) = (x + 2)$ ，其中 a 為整數。

請問 $(x - 5)$ 、 $(x + 2)$ 和 $(x^2 - 3x + a)$ 三個多項式間有什麼關係？

請用因式和倍式的關係說說看。

解：

在整除的算式中，可以知道『被除式是除式和商的倍式，除式和商都是被除式的因式』。

所以 $(x^2 - 3x + a)$ 是 $(x - 5)$ 、 $(x + 2)$ 的倍式、

$(x - 5)$ 、 $(x + 2)$ 是 $(x^2 - 3x + a)$ 的因式。



隨堂練習

(1) ① 判斷 $x + 2$ 是否為 $x^2 + x + 6$ 的因式。答：是。

② 判斷 $2x$ 是否為 $4x^2 + 6x + 1$ 的因式。答：不是。

(2) ① 判斷 $x + 1$ 是否為 $x^2 - x - 6$ 的因式。答：不是。

② 判斷 $2x - 6$ 是否為 $3x^2 - 9x + 5$ 的因式。答：不是。

(3) 已知多項式 $(6x^2 - x - a) \div (3x + 1) = (2x - 1)$ ，其中 a 為整數。

請問 $(3x + 1)$ 、 $(2x - 1)$ 和 $(6x^2 - x - a)$ 三個多項式間有什麼關係？

請用因式和倍式的關係說說看。

答： $(3x + 1)$ 、 $(2x - 1)$ 是 $(6x^2 - x - a)$ 的因式，

$(6x^2 - x - a)$ 是 $(3x + 1)$ 、 $(2x - 1)$ 的倍式。



教材內容說明：

1. 本教材第 2~5 頁的教學重點在幫助學生認識因式與倍式。
2. 上一頁已幫助學生透過 $(x^2 + 3x + 2) \div (x + 1) = (x + 2)$ 發現商 $(x + 2)$ 也是被除式 $(x^2 + 3x + 2)$ 的因式。

本頁重點整理在說明給定特定的 A、B、C 三個多項式，滿足 $A \div B = C \cdots 0$ ，因為餘式為 0，可知『A 是 B、C 的倍式，B、C 是 A 的因式』。也就是『被除式是除式和商的倍式、除式和商都是被除式的因式』。

- 教師可多提供一些例題，幫助學生理解『被除式是除式和商的倍式、除式和商都是被除式的因式』。

3. 本頁第(4)題給定 $(x^2 - 3x + a) \div (x - 5) = (x + 2)$ ，其中 a 為整數，要求學生判斷 $(x - 5)$ 、 $(x + 2)$ 和 $(x^2 - 3x + a)$ 三個多項式之間的因倍式關係。

教師應幫助學生不用將 a 求出，利用重點整理就能判定因倍式的關係。

- 如果學生先求出 a 再判斷 $(x - 5)$ 、 $(x + 2)$ 和 $(x^2 - 3x + a)$ 三個多項式之間的因倍式關係，教師應先接受，再幫助學生不用求出 a 就能判斷。
- 本題刻意在被除式放了未知數，是為了讓學生理解，無論多項式是否含有未知數，只要是整除的算式，都可以說『被除式是除式和商的倍式、除式和商都是被除式的因式』。

4. 本頁隨堂練習的評量重點是幫助學生判斷因倍式關係。

第(1)題包含子問題①②，要求學生利用除法判斷因式關係。

第(2)題包含子問題①②，要求學生利用除法判斷因式關係。

第(3)題給定除法算式，要求學生判斷被除適合和除適及商式的因被式關係。



基本學習內容：AC-8-4-1、2

基本學習內容：AC-8-4-1、2 整係數多項式的因式、倍式；認識因式分解的意義

因為 $(x^2 + 3x + 2) \div (x + 1) = (x + 2) \cdots 0$ ，
也可以寫成 $(x^2 + 3x + 2) = (x + 1)(x + 2)$ ，
所以我們從乘法算式也可以看到 $(x + 1)$ 、 $(x + 2)$ 都是 $(x^2 + 3x + 2)$ 的
因式， $(x^2 + 3x + 2)$ 是 $(x + 1)$ 、 $(x + 2)$ 的倍式。



(5) 已知多項式 $(x + 2) \times (x + 3) = (x^2 + 5x + 6)$ ，
說說看，被乘式 $(x + 2)$ 與乘式 $(x + 3)$ 是否都為積 $(x^2 + 5x + 6)$ 的因式。

解：我用除法算式檢驗，
發現 $(x^2 + 5x + 6) \div (x + 2) = (x + 3) \cdots 0$ ，
因為餘式是 0，
所以 $(x + 2)$ 、 $(x + 3)$ 都是 $(x^2 + 5x + 6)$ 的因式。

重點整理

從乘法算式 $B \times C = A$ ，
可以知道『 B 、 C 都是 A 的因式， A 是 B 、 C 的倍式』。
在乘法算式中，可以知道『被乘式和乘式都是積的因式，積是被乘式和乘式的倍式』。

(6) 已知多項式 $(x + 2) \times (x + a) = (x^2 - 7x - 18)$ ，其中 a 為整數。
請問 $(x + 2)$ 、 $(x + a)$ 和 $(x^2 - 7x - 18)$ 這三個多項式有什麼關係？
請用因式和倍式的關係說說看。

解：
在乘法算式中，
可以知道『被乘式和乘式都是積的因式，積是被乘式和乘式的倍式』。
所以 $(x^2 - 7x - 18)$ 是 $(x + 2)$ 、 $(x + a)$ 的倍式、
 $(x + 2)$ 、 $(x + a)$ 是 $(x^2 - 7x - 18)$ 的因式。



教材內容說明：

1. 本教材第 2～5 頁的教學重點在幫助學生認識因式與倍式。

2. 本頁教師提示重點先幫助學生透過「乘除互逆」，

將 $(x^2 + 3x + 2) \div (x + 1) = (x + 2) \cdots 0$ 改寫成 $(x^2 + 3x + 2) = (x + 1)(x + 2)$ 。

再幫助學生透過 $(x^2 + 3x + 2) = (x + 1)(x + 2)$ 理解 $(x + 1)$ 和 $(x + 2)$ 都是 $(x^2 + 3x + 2)$ 的因式，

$(x^2 + 3x + 2)$ 也是 $(x + 1)$ 和 $(x + 2)$ 的倍式。

3. 本頁第(5)題給定多項式 $(x + 2) \times (x + 3) = (x^2 + 5x + 6)$ ，要求學生判斷被乘式 $(x + 2)$ 和乘式 $(x + 3)$ 是否都為積 $(x^2 + 5x + 6)$ 的因式。

教師幫助學生利用除法算式，得到 $(x^2 + 5x + 6) \div (x + 2) = (x + 3) \cdots 0$ ，所以 $(x + 2)$ 和 $(x + 3)$ 都是 $(x^2 + 5x + 6)$ 的因式，所以被乘式和乘式都是積的因式。

● 本題透過除法算式幫助學生理解可以直接由乘法算式判斷因倍式關係，建議學生解題時由乘法算式直接判斷因倍式關係。

4. 本頁重點整理引導學生從乘法算式 $B \times C = A$ 可以知道『 B 、 C 都是 A 的因式， A 是 B 、 C 的倍式』，並推廣至所有的乘法算式中，可以知道『被乘式和乘式都是積的因式，積是被乘式和乘式的倍式』。

5. 本頁第(6)題給定 $(x + 2) \times (x + a) = (x^2 - 7x - 18)$ ，其中 a 為整數，要求學生判斷 $(x + 2)$ 、 $(x + a)$ 和 $(x^2 - 7x - 18)$ 三個多項式之間的因倍式關係。

教師應幫助學生不用將 a 求出，直接透過乘法算式

$(x + 2) \times (x + a) = (x^2 - 7x - 18)$ 判斷 $(x^2 - 7x - 18)$ 是 $(x + 2)$ 、 $(x + a)$ 的倍式，

$(x + 2)$ 、 $(x + a)$ 是 $(x^2 - 7x - 18)$ 的因式。



基本學習內容：AC-8-4-1、2 整係數多項式的因式、倍式；認識因式分解的意義



小試身手

(1) 已知 $234 \div 13 = 18$ ，下列敘述何者正確？正確敘述請畫○，錯誤敘述請畫×

○ ① 13 是 234 的因數。

○ ② 18 是 234 的因數。

○ ③ 234 是 13 的倍數。

× ④ 18 是 234 的倍數。

(2) 已知多項式 $(2x^2 + x - 6) \div (x - 2) = (2x + 3)$ ，

判斷下列式子何者正確？正確敘述請畫○，錯誤敘述請畫×

○ ① $x - 2$ 是 $2x^2 + x - 6$ 的因式。

○ ② $2x + 3$ 是 $2x^2 + x - 6$ 的因式。

○ ③ $2x^2 + x - 6$ 是 $x - 2$ 的倍式。

× ④ $2x + 3$ 是 $2x^2 + x - 6$ 的倍式。

(3) 已知 $(3x - 2) \times (2x + 5) = (6x^2 + 11x - 10)$ ，

判斷下列式子何者正確？正確敘述請畫○，錯誤敘述請畫×

○ ① $3x - 2$ 是 $6x^2 + 11x - 10$ 的因式。

○ ② $2x + 5$ 是 $6x^2 + 11x - 10$ 的因式。

○ ③ $6x^2 + 11x - 10$ 是 $3x - 2$ 的倍式。

× ④ $2x + 5$ 是 $6x^2 + 11x - 10$ 的倍式。

(4) 判斷 $x^2 + 4x + 3$ 是否為 $x + 3$ 的倍式。答：是。

(5) 已知多項式 $(x^2 + 5x + 6) \div (x + 2) = (x + 3)$ ，

說說看， $(x + 3)$ 是否為 $(x^2 + 5x + 6)$ 的因式， $(x^2 + 5x + 6)$ 是否為 $(x + 3)$ 的倍式。

答：是，是。

(6) 已知多項式 $(x - 5) \times (2x + 4) = (2x^2 - 6x - 20)$ ，

說說看，多項式 $(x - 5)$ 、 $(2x + 4)$ 是否都為 $(2x^2 - 6x - 20)$ 的因式。

答：皆是。



教材內容說明：

1. 本頁小試身手針對整係數多項式的因式、倍式問題進行練習。
2. 第(1)題透過除法算式，要求學生判斷三數之間的因倍式關係。
3. 第(2)題透過除法算式，要求學生判斷被除式、除式和商式之間的因倍式關係。
4. 第(3)題透過乘法算式，要求學生判斷被乘式、乘式和積之間的因倍式關係。
5. 第(4)題要求學生利用除法判斷兩多項式間的倍式關係。
6. 第(5)題要求學生從除法算式判斷因式與倍式的關係。
7. 第(6)題要求學生從乘法算式判斷因式與倍式的關係。



基本學習內容：AC-8-4-1、2 整係數多項式的因式、倍式；認識因式分解的意義

◎認識因式分解的意義

認識因式分解

(1) ① 算算看， $(x+1)$ 和 $(x+2)$ 是否都是 x^2+3x+2 的因式？

② x^2+3x+2 可以寫成哪兩個因式的乘積？

解：

$$\textcircled{1} (x^2+3x+2) \div (x+1) = (x+2) \cdots 0$$

因為餘式是0，除式和商都是被除式的因式

所以 $(x+1)$ 和 $(x+2)$ 都是 x^2+3x+2 的因式。

$$\begin{array}{r} x+2 \\ x+1 \overline{) x^2+3x+2} \\ \underline{x^2+1x} \\ 2x+2 \\ \underline{2x+2} \\ 0 \end{array}$$

$$\textcircled{2} \text{ 因為 } (x^2+3x+2) \div (x+1) = (x+2) \cdots 0$$

$$\text{所以 } x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$$

像這樣 $x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$ ，將 x^2+3x+2 寫成兩個一次因式的乘積，

我們稱將多項式 x^2+3x+2 作**因式分解**，

也稱 x^2+3x+2 的因式分解是 $(x+1)(x+2)$ ，

記為 $x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$ 。

將一個二次多項式寫成兩個一次多項式的乘積，

我們就稱為二次多項式的因式分解。





教材內容說明：

1. 本教材第 7～12 頁的教學重點在幫助學生認識因式分解的意義。

2. 第(1)題包含 2 個子問題：

子問題①：要求學生判斷 $(x+1)$ 和 $(x+2)$ 是否都是 x^2+3x+2 的因式。

教師引導學生用除法算式檢驗，發現 $(x^2+3x+2) \div (x+1) = (x+2) \cdots 0$ ，

因為餘式為 0，所以除式 $(x+1)$ 和商 $(x+2)$ 都是被除式 x^2+3x+2 的因式。

子問題②：要求學生將 x^2+3x+2 寫成兩個一次因式的乘積。

教師幫助學生從除法算式 $(x^2+3x+2) \div (x+1) = (x+2) \cdots 0$ 中找到

x^2+3x+2 的兩個因式分別為 $(x+1)$ 和 $(x+2)$ ，

並能寫成 $x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$ 。

● 本題為引出因式分解的意義佈題。教師幫助學生從除法算式知道餘式為 0 時，除式和商都是被除式的因式，並將被除式寫成兩個因式的乘積。

3. 本頁對話框在幫助學生理解因式分解的意義，例如： x^2+3x+2 的因式分解為 $(x+1)(x+2)$ ，可以記為 $x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$ 。

教師應強調『將一個二次多項式寫成兩個一次多項式的乘積，我們就稱為二次多項式的因式分解』。

4. 當我們說因式分解 x^2+3x+2 的答案是 $(x+1)(x+2)$ 時，此時因式分解作為動詞使用。當我們說 $(x+1)(x+2)$ 是 x^2+3x+2 的因式分解時，此時因式分解作為名詞使用。



基本學習內容：AC-8-4-1、2 整係數多項式的因式、倍式；認識因式分解的意義

(2) ①下列何者為 $x^2 - 7x + 10$ 的因式分解？

- (A) $x(x-7)+10$ (B) $(x-2)(x-3)-2(x-2)$
(C) $(x-2)(x-5)$

②下列哪些為 $2x^2+6x+4$ 的因式分解？

- (A) $(2x+2)(x+2)$ (B) $(x+1)(2x+4)$
(C) $2(x^2+3x+2)$

解：

將一個二次多項式寫成兩個一次多項式的乘積，我們就稱為二次多項式的因式分解。

①(A) $x(x-7)+10$ 是兩個一次多項式的乘積再加上常數，所以不是因式分解

(B) $(x-2)(x-3)-2(x-2)$ 是兩個一次多項式的乘積再加上一次多項式，

所以不是因式分解

(C) $(x-2)(x-5)$ 是兩個一次多項式 $(x-2)$ 和 $(x-5)$ 的乘積，

所以是 $x^2-7x+10$ 的因式分解

所以(C)是 $x^2-7x+10$ 的因式分解。

②(A)是兩個一次多項式 $(2x+2)$ 和 $(x+2)$ 的乘積，所以是 $2x^2+6x+4$ 的因式分解

(B)是兩個一次多項式 $(x+1)$ 和 $(2x+4)$ 的乘積，所以是 $2x^2+6x+4$ 的因式分解

(C) (x^2+3x+2) 是二次多項式，2 和 (x^2+3x+2) 都不是一次多項式，

所以不是因式分解

所以(A)(B)都是 $2x^2+6x+4$ 的因式分解。

因為 $(2x+2)$ 也可以記成 $2(x+1)$ ，

所以 $2x^2+6x+4=2(x+1)(x+2)$ ，

我們稱 $2(x+1)(x+2)$ 也是 $2x^2+6x+4$ 的因式分解。

所以 $2x^2+6x+4=(2x+2)(x+2)$ 、 $2x^2+6x+4=2(x+1)(x+2)$ 和
 $2x^2+6x+4=(x+1)(2x+4)$ 都是因式分解。





教材內容說明：

1. 本教材第 7～12 頁的教學重點在幫助學生認識因式分解的意義。

2. 第(2)題包含 2 個子問題：

子問題①：要求學生判斷何者是 $x^2 - 7x + 10$ 的因式分解。

教師引導學生找到兩個一次因式的乘積，就是 $x^2 - 7x + 10$ 的因式分解。

所以(C)是 $x^2 - 7x + 10$ 的因式分解。

子問題②：要求學生判斷哪些是 $2x^2 + 6x + 4$ 的因式分解。

教師引導學生找到兩個一次因式的乘積，就是 $2x^2 + 6x + 4$ 的因式分解。

所以(A)(B)都是 $2x^2 + 6x + 4$ 的因式分解。

● 本題在幫助學生理解因式分解的意義在於「將二次多項式寫成兩個一次因式的乘積」。

● 本題的子問題②給定包含因數 2 的多項式，教師幫助學生不需特別提出因數 2，只需檢驗是否符合兩個一次因式的乘積的條件即可。

3. 本頁教師提示重點在幫助學生理解因式分解有不同形式。

因為 $(2x+2)=2(x+1)$ ，所以 $2x^2 + 6x + 4$ 的因式分解也可以寫成 $2(x+1)(x+2)$ 。

教師引導學生看到 $2x^2 + 6x + 4 = (2x+2)(x+2)$ 、 $2x^2 + 6x + 4 = 2(x+1)(x+2)$ 和

$2x^2 + 6x + 4 = (x+1)(2x+4)$ 都是因式分解。



基本學習內容：AC-8-4-1、2

基本學習內容：AC-8-4-1、2 整係數多項式的因式、倍式；認識因式分解的意義

(3) ①算算看， $(2x+3)$ 和 $(x+1)$ 是否皆為 $2x^2+5x+3$ 的因式？

②因式分解 $2x^2+5x+3$ 。

解：

① $(2x^2+5x+3) \div (2x+3) = (x+1) \cdots 0$

因為餘式是0，

所以 $(2x+3)$ 和 $(x+1)$ 都是 $2x^2+5x+3$ 的因式。

$$\begin{array}{r}
 \overline{) 2x^2 + 5x + 3} \\
 \underline{2x^2 + 3x} \\
 2x + 3 \\
 \underline{2x + 3} \\
 0
 \end{array}$$

② 因式分解就是

$$2x^2+5x+3=(2x+3)(x+1)$$



隨堂練習

(1) 下列何者為 $2x^2+8x+6$ 的因式分解？答：(B) (C) (D)。

(A) $2x^2+8x+6=x(2x+4)+6$ (B) $2x^2+8x+6=(2x+2)(x+3)$

(C) $2x^2+8x+6=(x+1)(2x+6)$ (D) $2x^2+8x+6=2(x+1)(x+3)$

(E) $2x^2+8x+6=2(x^2+4x+3)$

(2) ①算算看， $(3x-2)$ 和 $(x+2)$ 是否皆為 $3x^2+4x-4$ 的因式？答：皆是。

②承上題，因式分解 $3x^2+4x-4$ 。答： $3x^2+4x-4=(3x-2)(x+2)$ 。



教材內容說明：

1. 本教材第 7～12 頁的教學重點在幫助學生認識因式分解的意義。

2. 第(3)題包含 2 個子問題：

子問題①：要求學生判斷 $(2x+3)$ 和 $(x+1)$ 是否皆為 $2x^2+5x+3$ 的因式。

教師幫助學生利用除法檢驗，發現 $(2x^2+5x+3) \div (2x+3) = (x+1) \cdots 0$ ，

因為餘式是 0，所以都是 $2x^2+5x+3$ 的因式。

子問題②：要求學生因式分解 $2x^2+5x+3$ 。

從子問題①知道 $(2x+3)$ 和 $(x+1)$ 都是 $2x^2+5x+3$ 的因式，

所以因式分解就是 $2x^2+5x+3=(2x+3)(x+1)$ 。

● 教師幫助學生看到 $(2x+3)$ 和 $(x+1)$ 都是 $2x^2+5x+3$ 的因式，

則 $2x^2+5x+3$ 的因式分解就是 $(2x+3)$ 和 $(x+1)$ 。

3. 本頁隨堂練習提供學生因式分解的練習。

第(1)題要求學生判斷哪些選項是 $2x^2+8x+6$ 的因式分解。

第(2)題包含兩個子問題，

子問題①給定兩個一次多項式，要求學生能判斷是否為二次多項式的因式。

子問題②要求學生能根據子問題①的結論寫出 $3x^2+4x-4$ 的因式分解。



基本學習內容：AC-8-4-1、2

基本學習內容：AC-8-4-1、2 整係數多項式的因式、倍式；認識因式分解的意義

(4) ① 已知 $(x-2)$ 為 x^2+x-6 的因式，因式分解 x^2+x-6 。

② 已知 $(x-2)$ 為 $2x^2-x-6$ 的因式，因式分解 $2x^2-x-6$ 。

③ 已知 $(x-2)$ 為 $3x^2-9x+6$ 的因式，因式分解 $3x^2-9x+6$ 。

解：

①

$$(x^2 + x - 6) \div (x - 2) = (x + 3) \cdots 0$$

因為餘式是 0，商也是被除式的因式

所以 $(x+3)$ 也是 (x^2+x-6) 的因式

因式分解就是

$$x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + 3)$$

$$\begin{array}{r} x + 3 \\ x + (-2) \overline{) x^2 + x + (-6)} \\ \underline{x^2 + (-2)x} \\ 3x + (-6) \\ \underline{3x + (-6)} \\ 0 \end{array}$$

②

$$(2x^2 - x - 6) \div (x - 2) = (2x + 3) \cdots 0$$

因為餘式是 0，

所以 $(2x+3)$ 也是 $(2x^2-x-6)$ 的因式

因式分解就是

$$2x^2 - x - 6 = (x - 2)(2x + 3)$$

$$\begin{array}{r} 2x + 3 \\ x + (-2) \overline{) 2x^2 + (-1)x + (-6)} \\ \underline{2x^2 + (-4)x} \\ 3x + (-6) \\ \underline{3x + (-6)} \\ 0 \end{array}$$

③

$$(3x^2 - 9x + 6) \div (x - 2) = (3x - 3) \cdots 0$$

因為餘式是 0，

所以 $(3x-3)$ 也是 $(3x^2-9x+6)$ 的因式

因式分解就是

$$3x^2 - 9x + 6 = (x - 2)(3x - 3)$$

$$\begin{array}{r} 3x - 3 \\ x + (-2) \overline{) 3x^2 + (-9)x + 6} \\ \underline{3x^2 + (-6)x} \\ -3x + 6 \\ \underline{-3x + 6} \\ 0 \end{array}$$



教材內容說明：

1. 本教材第 7～12 頁的教學重點在幫助學生認識因式分解的意義。
2. 第(4)題包含 3 個子問題：

本題的 3 個子問題均給定一次因式 $x-2$ ，要求學生利用長除法找出另一個因式，並將原來的算式記為因式分解的形式。本教材提供子問題①～③解題步驟如下，以子問題①為例說明：

步驟一：利用長除法 $(x^2 + x - 6) \div (x - 2)$ 的結果，發現商為 $(x+3)$ ，餘式為 0。

步驟二：因為餘式為 0，所以商 $(x+3)$ 也是 (x^2+x-6) 的因式。

步驟三：因為 $(x-2)$ 和 $(x+3)$ 都是 (x^2+x-6) 的因式，

所以因式分解就是 $(x^2+x-6) = (x-2)(x+3)$ 。



基本學習內容：AC-8-4-1、2 整係數多項式的因式、倍式；認識因式分解的意義

(5) ① 算算看， $(x+2)$ 是否為 x^2+4x+4 的因式？

② 因式分解 x^2+4x+4 。

解：

①

$$(x^2 + 4x + 4) \div (x + 2) = (x + 2) \cdots 0$$

因為餘式是 0，

所以 $(x+2)$ 是 x^2+4x+4 的因式。

$$\begin{array}{r} x+2 \\ x+2 \overline{) x^2 + 4x + 4} \\ \underline{x^2 + 2x} \\ 2x + 4 \\ \underline{2x + 4} \\ 0 \end{array}$$

②

因式分解就是

$$x^2+4x+4=(x+2)(x+2)$$

我發現， x^2+4x+4 剛好可以寫成兩個相同一次因式的乘積。



因為 $5 \times 5 = 5^2$ ，所以 $(x+2)(x+2)$ 也可以記為 $(x+2)^2$ 。

也就是 $x^2+4x+4=(x+2)^2$ ，這樣也稱為因式分解。

一個二次多項式如果可以寫成兩個相同一次多項式的乘積，也就是一次因式的平方，就稱此二次多項式為完全平方式。

例如：數學上稱 $(x+2)^2$ 是完全平方式，

因為 $(x+2)(x+2)$ 和 x^2+4x+4 都可以記為 $(x+2)^2$ ，

所以 $(x+2)(x+2)$ 和 x^2+4x+4 也稱為完全平方式。





教材內容說明：

1. 本教材第 7～12 頁的教學重點在幫助學生認識因式分解的意義。

2. 第(5)題包含 2 個子問題：

子問題①：要求學生判斷 $(x+2)$ 是否為 x^2+4x+4 的因式。

教師幫助學生利用除法檢驗，發現 $(x^2+4x+4) \div (x+2) = (x+2) \cdots 0$ ，

發現餘式是 0，且除式和商都是 $(x+2)$ 。

子問題②：要求學生因式分解 x^2+4x+4 。

從子問題①知道 x^2+4x+4 的因式是 $(x+2)$ 和 $(x+2)$ ，是兩個相同的一次因式，

所以因式分解就是 $x^2+4x+4 = (x+2)(x+2)$ 。

3. 本頁教師提醒內容在引入完全平方式的概念。教師先引導學生說出 5×5 可以寫成 5^2 ，類推至多項式，所以 $(x+2)(x+2)$ 也可以寫成 $(x+2)^2$ 。教師說明 $(x+2)(x+2)$ 和 $(x+2)^2$ 都可以稱為 x^2+4x+4 的因式分解。

教師引導學生理解「一個二次多項式如果可以寫成兩個相同一次多項式的乘積，也就是一次因式的平方，就稱此二次多項式為完全平方式」。

● 建議教師多舉一些例子幫助學生了解完全平方式的意義。



基本學習內容：AC-8-4-1、2 整係數多項式的因式、倍式；認識因式分解的意義

(6) 下列是多項式的因式分解，哪些是完全平方式？

(A) $x^2 + 3x + 2 = (x + 2)(x + 1)$

(B) $3x^2 + 8x + 4 = (x + 2)(3x + 2)$

(C) $4x^2 + 4x + 1 = (2x + 1)(2x + 1)$

(D) $x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$

(E) $3x^2 + 6x + 3 = 3(x + 1)(x + 1)$

(F) $9 - 6x + x^2 = (3 - x)(3 - x)$

解：

一個二次多項式如果可以寫成兩個相同一次多項式的乘積，也就是一次因式的平方，就稱此二次多項式為完全平方式。

(A) $(x+2)$ 和 $(x+1)$ 不是相同一次多項式的乘積，所以不是完全平方式

(B) $(x+2)$ 和 $(3x+2)$ 不是相同一次多項式的乘積，所以不是完全平方式

(C) $(2x+1)(2x+1)=(2x+1)^2$ 是一次因式的平方，所以是完全平方式

(D) $(x+2)$ 和 $(x-2)$ 不是相同一次多項式的乘積，所以不是完全平方式

(E) $3(x+1)=(3x+3)$ 和 $(x+1)$ 不是相同一次多項式的乘積，

所以不是完全平方式

(F) $(3-x)(3-x)=(3-x)^2$ 是一次因式的平方，所以是完全平方式

所以(C)(F)是完全平方式



教材內容說明：

1. 本教材第 7～12 頁的教學重點在幫助學生認識因式分解的意義。
2. 第(6)題要求學生判斷哪些選項為完全平方式。

教師幫助學生說出完全平方式的意義是「一個二次多項式如果可以寫成兩個相同一次多項式的乘積，也就是一次因式的平方，就稱此二次多項式為完全平方式」。利用此概念判斷 (A)(D)(G) 是完全平方式。



基本學習內容：AC-8-4-1、2 整係數多項式的因式、倍式；認識因式分解的意義



小試身手

(1) 下列何者為 $3x^2 - 6x - 9$ 的因式分解？答：(B) (C) (D)。

(A) $3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3)$ (B) $3x^2 - 6x - 9 = (3x - 9)(x + 1)$

(C) $3x^2 - 6x - 9 = (3x + 3)(x - 3)$ (D) $3x^2 - 6x - 9 = 3(x + 1)(x - 3)$

(E) $3x^2 - 6x - 9 = 3x(x - 2) - 9$

(2) ① 算算看， $(x + 4)$ 是否為 $x^2 + 8x + 16$ 的因式？答：是。

② 承上題，因式分解 $x^2 + 8x + 16$ 。答： $x^2 + 8x + 16 = (x + 4)(x + 4)$ 。

(3) 下列是多項式的因式分解，哪些是完全平方式？答：(B) (D) (F)。

(A) $x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$

(B) $9x^2 - 6x + 1 = (3x - 1)(3x - 1)$

(C) $3x^2 - 5x - 2 = (3x + 1)(x - 2)$

(D) $x^2 - 10x + 25 = (x - 5)(x - 5)$

(E) $2x^2 - 8x + 8 = 2(x - 2)(x - 2)$

(F) $4 + 4x + x^2 = (2 + x)(2 + x)$

(4) ① 已知 $(x + 2)$ 為 $3x^2 + 5x - 2$ 的因式，因式分解 $3x^2 + 5x - 2$ 。

答： $3x^2 + 5x - 2 = (x + 2)(3x - 1)$ 。

② 已知 $(x + 2)$ 為 $4x^2 + 4x - 8$ 的因式，因式分解 $4x^2 + 4x - 8$ 。

答： $4x^2 + 4x - 8 = (x + 2)(4x - 4)$ 。



教材內容說明：

1. 本頁小試身手包含 4 題，檢查學生是否理解因式分解的意義。
2. 第(1)題要求學生判斷何者是 $3x^2 - 6x - 9$ 的因式分解。
3. 第(2)題包含 2 個子問題，
子問題①：給定一個一次多項式，要求學生判斷是否為二次多項式的因式。
子問題②：要求根據學生因式分解多項式。
4. 第(3)題給定二次多項式因式分解的結果，要求學生判斷哪些二次多項式是完全平方式。
第(4)題包含 2 個子問題，給定二次多項式的一個因式，要求學生將二次多項式因式分解。



教育部國民及學前教育署 編

國民中學

學生學習扶助教材

8 年級數學

