

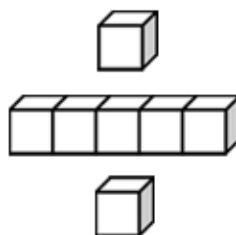
基本學習內容：FC-8-1-1、2

對應關係與函數

常數函數與一次函數

班級：_____

姓名：_____



◎變數與函數

- (1) 一個數隨著情境或時間改變，它的值可能會變動，我們會以代號代替這個值可能會變動的數，一般我們會以 x 、 y 、 z 、... 等命名。例如：設老師的年齡為 x (歲)，今年老師為 40 歲，則 x 可以代表 40，若是明年，則 x 代表 41，像這種值會變動的數就稱為「**變數**」。
- (2) 一個數不管情境或時間如何改變，它的值都不會改變，有些時候會以代號表示這個數，像這種值固定的數就稱就「**常數**」。例如：1、2.3、-4、圓周率 π ($=3.1415926\cdots$) 都是常數。

給定兩個變數 x 和 y ，如果每一個 x 的值都對應到一個 y 的值，此時就說「 **y 是 x 的函數**」



- (1) 小明暑假某天去登阿里山，假設爬山經過 x (分) 後，小明所處的海拔高度為 y (公尺)，下表為經過時間 x (分) 與所處的海拔高度 y (公尺) 的對照表：

經過時間 x	10	20	30	40	50	60	70	80	90
所處的海拔高度 y	1000	1150	1180	1150	1150	1230	1250	1300	1260

- ① 請問每一個 x 的值都對應到一個 y 的值嗎？
- ② 請問每一個 y 的值都對應到一個 x 的值嗎？

解：

- ① 由對照表可以發現，每一個給定的時間 x 都只恰有一個海拔高度 y 與其對應，所以 y 是 x 的函數，也就是變數「海拔高度」是變數「經過時間」的函數。
- ② 由對照表可以發現，當給定所處海拔高度 1150 公尺會對應到三個不同的經過時間：20 (分)、40 (分)、50 (分)，所以 x 不是 y 的函數，也就是變數「經過時間」不是 變數「海拔高度」的函數。



- (2) 承(1)，根據研究，夏季時海拔高度每上升 100 公尺，氣溫約降低 0.6°C 。
當天平地溫度為 30°C ，假設小明爬到高度 x 公尺處的溫度為 $y^{\circ}\text{C}$ 。

- ① 請完成 y 與 x 的對照表。
② 請問 y 是 x 的函數嗎？

高度 x (公尺)	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
溫度 y ($^{\circ}\text{C}$)										

解：①

高度 x (公尺)	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
溫度 y ($^{\circ}\text{C}$)	29.4	28.8	28.2	27.6	27	26.4	25.8	25.2	24.6	24

- ② 由上述對照表可以發現，每一個給定的 x 都只對應到惟一的 y ，所以 y 是 x 的函數，也就是變數「高度」是變數「溫度」的函數。

- (3) 下表列出 x 與 y 的對應關係，判斷 y 是否為 x 的函數？

①	<table> <tr><td>x</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr> <tr><td>y</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr> </table>	x	1	2	3	4	5	y	2	3	4	5	6	②	<table> <tr><td>x</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr> <tr><td>y</td><td>5</td><td>5</td><td>5</td><td>5</td><td>5</td></tr> </table>	x	1	2	3	4	5	y	5	5	5	5	5	③	<table> <tr><td>x</td><td>1</td><td>1</td><td>2</td><td>2</td><td>3</td></tr> <tr><td>y</td><td>5</td><td>4</td><td>3</td><td>2</td><td>1</td></tr> </table>	x	1	1	2	2	3	y	5	4	3	2	1
x	1	2	3	4	5																																				
y	2	3	4	5	6																																				
x	1	2	3	4	5																																				
y	5	5	5	5	5																																				
x	1	1	2	2	3																																				
y	5	4	3	2	1																																				

解：① 因為每給定一個 x ，都恰有一個 y 與它對應，所以 y 是 x 的函數。

② 因為每給定一個 x ，都恰有一個 y 與它對應，所以 y 是 x 的函數。

③ 給定 $x=1$ 對應到不同的 y ($y=5$ 、 $y=4$)，另外給定 $x=2$ 也對應到不同的 y ($y=3$ 、 $y=2$)，所以 y 不是 x 的函數。

◎以關係式來表達函數

- (4) 庫奇烘培坊餅乾一個 5 元，下表是店員將 10 塊以內(含)的餅乾個數與餅乾費用的對照表。

餅乾個數 x (個)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
購買費用 y (元)	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50

- ① 假設購買餅乾個數 x 個，購買費用 y 元，請問 y 是 x 的函數嗎？
② 請寫出 y 和 x 的關係式。

解：① 給定每一個 x 都對應一個 y ，也就是 x 的 5 倍($5 \cdot x$)，所以 y 是 x 的函數。

② 餅乾個數與餅乾費用的對照表：

餅乾個數 x (個)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
購買費用 y (元)	5×1 =5	5×2 =10	5×3 =15	5×4 =20	5×5 =25	5×6 =30	5×7 =35	5×8 =40	5×9 =45	5×10 =50

所以 $y=5x$ ， x 是 1,2,3,...,10

我們可以用 y 和 x 的關係式來表示 y 是 x 的函數，

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50

例如：上表中， y 是 x 的函數可以用

$y=5x$ ， $x=1,2,3,\dots,10$ 來取代表格。



- (5) 庫克烘焙坊牛角麵包一個 20 元，包裝盒一個 2 元，下表是店員將 6 塊以內(含)的牛角麵包與加買 1 個包裝盒費用的對照表。

牛角麵包個數 x (個)	1	2	3	4	5	6
購買費用 y (元)	22	42	62	82	102	122

假設購買牛角麵包個數 x 個，購買費用 y 元，請寫出 y 和 x 的關係式。

解：牛角麵包個數與加買 1 個包裝盒費用的對照表

牛角麵包個數 x (個)	1	2	3	4	5	6
購買費用 y (元)	$20 \times 1 + 2$ =22	$20 \times 2 + 2$ =42	$20 \times 3 + 2$ =62	$20 \times 4 + 2$ =82	$20 \times 5 + 2$ =102	$20 \times 6 + 2$ =122

由上表得 $y=20x+2$ ， $x=1,2,3,4,5,6$

- (6) 在傳統市場，小盤商商品的進貨成本常以公斤計價，販售的定價常以台斤計價。下表是 x 台斤與 y 公斤換算的部份對照表請寫出 y 和 x 的關係式。

x (台斤)	1	2	3	4	5
y (公斤)	0.6	1.2	1.8	2.4	3

解：

x (台斤)	1	2	3	4	5
y (公斤)	0.6	1.2	1.8	2.4	3

$y=0.6x$ $x=1,2,3,4,5$

台斤和公斤的換算，並不限定 x 為整數， x 是小數也可以，所以我們只需用「 $y=0.6x$ 」來表達 x 和 y 的函數關係就可以！





(7) 下表為紅茶杯數與購買紅茶費用的對照表，假設購買紅茶杯數為 x (杯)，購買紅茶費用為 y (元)：

紅茶杯數 x (杯)	1	2	3	4	5	6	7	8
紅茶金額 y (元)	25	50	75	100	125	150	175	200

- ① y 與 x 是否成正比？它們的比值是多少？
- ② 請找出 y 和 x 的關係式？
- ③ 請問 y 是 x 的函數嗎？

解：

① 因為 $\frac{y}{x} = \frac{25}{1} = \frac{50}{2} = \frac{75}{3} = \frac{100}{4} = \frac{125}{5} = \frac{150}{6} = \frac{175}{7} = \frac{200}{8} = 25$ ，比值都是 25

所以 y 與 x 成正比。

② 因為 $\frac{y}{x} = 25$ ，所以 $y:x=25:1$ ，由比例式的內項乘積等於外項乘積得到

$$y = 25x$$

③ 利用 $y = 25x$ ，我們將對照表中的紅茶金額改寫成 $25 \times$ 杯數(x)

紅茶杯數(x)	1	2	3	4	5	6	7	8
紅茶金額(y)	25×1 =25	25×2 =50	25×3 =75	25×4 =100	25×5 =125	25×6 =150	25×7 =175	25×8 =200

因為每給定一個 x ，都恰有一個 y 與它對應，所以 y 是 x 的函數。

(1) 當變數 x 與 y 成正比時， y 與 x 的關係式就是 $y=kx$ ($k \neq 0$)，其中 k 為 $y:x$ 的比值。

(2) 當變數 x 與 y 成正比時， y 會是 x 的函數。





(8) 給定下列兩組變數 x 、 y 的對照表，請問 y 與 x 是否成正比，如果成正比，它們的關係式為何？

①

x	2	4	6	8	10
y	10	20	30	40	50

②

x	2	4	6	8	10
y	4	6	8	10	12

解：① 若 y 與 x 成正比，可以假設 $y=kx$ ，將第 1 組資料 $x=2$ 、 $y=10$ 代入 $y=kx$

可得 $10=2k$ ， $k=5$ ，利用 $y=5x$ 接下來檢查第 2、3、4、5 組資料

第 2 組： $x=4$ 、 $y=20$ ， $5 \times 4=20$

第 3 組： $x=6$ 、 $y=30$ ， $5 \times 6=30$

第 4 組： $x=8$ 、 $y=40$ ， $5 \times 8=40$

第 5 組： $x=10$ 、 $y=50$ ， $5 \times 10=50$

由上可知 y 與 x 成正比， y 與 x 的關係式為 $y=5x$ 。

② 若 y 與 x 成正比，可以假設 $y=kx$ ，將第 1 組資料 $x=2$ 、 $y=4$ 代入 $y=kx$

可得 $4=2k$ ， $k=2$ ，利用 $y=2x$ 接下來檢查第 2、3、4、5 組資料

第 2 組： $x=4$ 、 $y=6$ ， $2 \times 4 \neq 6$ ，接下來第 3~5 組資料不用再檢查可得

y 與 x 不成正比。

(9) 直線跑道有一遙控汽車以每秒 2 公尺的速率前進，從距離遙控玩家在 3 公尺出發，假設出發後 x 秒距離遙控玩家為 y 公尺，下表為 x 與 y 的對照表：

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y	3	5	7	9	11	13	15	17	19

① 試寫出 x 和 y 的關係式？

② 請問 y 是 x 的函數嗎？

解：① 出發後 x 秒，遙控汽車已前進了 $2x$ 公尺，所以離遙控玩家 $2x+3$ 公尺故 $y=2x+3$ 。

② 因為每給定一個 x ，都恰有一個 y 與它對應，所以 y 是 x 的函數。

給定兩個變數 x 、 y ，已知變數可以表示成 $y=ax+b$ （其中 a 、 b 為常數，且 $a \neq 0$ ），由例(6)~(8)，我們看到都符合「給定一個 x ，都恰有一個 y 與它對應」，所以關係式 $y=ax+b$ ($a \neq 0$) 可表示 y 是 x 的函數，又因為變數 x 的最高次數為一次，因此稱 y 是 x 的**一次函數**。



(10) 攝氏溫度為 $x(^{\circ}\text{C})$ 與華氏溫度為 $y(^{\circ}\text{F})$ 的關係式： $y = \frac{9}{5}x + 32$ 。

① 請完成下列 x 和 y 的對照表。 ② 請問 y 是 x 的一次函數嗎？

$x(^{\circ}\text{C})$	-40	-30	-20	-10	0	10	20	30
$y(^{\circ}\text{F})$								

解：① 此時 x 與 y 的對應關係列表如下：

$x(^{\circ}\text{C})$	-40	-30	-20	-10
$y(^{\circ}\text{F})$	$\frac{9}{5} \times (-40) + 32$ =-40	$\frac{9}{5} \times (-30) + 32$ =-22	$\frac{9}{5} \times (-20) + 32$ =-4	$\frac{9}{5} \times (-10) + 32$ =14

$x(^{\circ}\text{C})$	0	10	20	30
$y(^{\circ}\text{F})$	$\frac{9}{5} \times 0 + 32$ =32	$\frac{9}{5} \times 10 + 32$ =50	$\frac{9}{5} \times 20 + 32$ =68	$\frac{9}{5} \times 30 + 32$ =86

② 由上表可得 $y = \frac{9}{5}x + 32$ 滿足 $y = ax + b$ 的型式，其中 $a = \frac{9}{5}$ ， $b = 32$ ，

所以 y 是 x 的一次函數。



隨堂練習

(1) 已知正方形的邊長為 x 公分，周長為 y 公分，

① 請完成下列 x 和 y 的對照表。

② 請問 y 是否為 x 的一次函數？

邊長 x (公分)	1	2	3	4	5	6
周長 y (公分)						



(11) 庫奇烘培坊週年慶，推出購買一個 20 元的紙袋就可以將免費的餅乾不限數量任你裝到紙袋。若假設餅乾的個數為 x (個)，買一個紙袋及裝入免費餅乾所需的費用為 y (元)。

- ① 請將 y 寫成 x 的關係式。 ② 請問 y 是 x 的函數嗎？

解：① 因為每個餅乾都免費，所以餅乾的費用可以寫成 $0 \cdot x = 0x$ (元)，紙袋的費用 20 (元)，得到變數 x 、 y 的關係式為 $y = 0x + 20$ ，可化簡為 $y = 20$ 。

② 此時 x 與 y 的對應關係列表如下：

x (個)	1	2	3	4	5	...
y (元)	$0 \times 1 + 20$ $= 20$	$0 \times 2 + 20$ $= 20$	$0 \times 3 + 20$ $= 20$	$0 \times 4 + 20$ $= 20$	$0 \times 5 + 20$ $= 20$...

由上表，每一種餅乾個數 x ，都恰對應到費用 y (20 元)，所以 y 是 x 的函數。

給定兩個變數 x 、 y ，已知變數 y 表示成 $y = 0x + b$ (其中 b 為常數)，也可以看成 $y = b$ ，由例(11)我們看到無論變數 x 是多少，都對應到同樣的變數 y (常數)，像這樣的函數就稱 y 是 x 的**常數函數**。

(12) 大樂 KTV 推出「每人 300 元，不限時間無限歡唱」的周年慶活動。假設參加這個活動在 KTV 歡唱的時間為 x 小時，歡唱的費用為 y 元。

- ① 請將 y 寫成 x 的關係式。 ② 請問 y 是 x 的函數嗎？

解：① 依題意可得到變數 x 、 y 的關係式為 $y = 0x + 300$ ，可化簡為 $y = 300$ 。

② 此時 x 與 y 的對應關係列表如下：

x (小時)	1	2	3	4	5	...
y (元)	$0 \times 1 + 300$ $= 300$	$0 \times 2 + 300$ $= 300$	$0 \times 3 + 300$ $= 300$	$0 \times 4 + 300$ $= 300$	$0 \times 5 + 300$ $= 300$...

觀察上表，無論歡唱時數 x 為何，都只有一個費用 y (300 元) 與它對應，所以 y 是 x 的常數函數。

重點整理

給定變數 x 和 y ，在函數 $y = ax + b$ 中

① 若 $a \neq 0$ ， b 為常數，則 y 是 x 的一次函數。

② 若 $a = 0$ ， b 為常數，則 y 是 x 的常數函數。



- (13) 甲： $y = x^2 + 2x - 3$ 乙： $y = 3x - 1$ 丙： $y = -2x$
 丁： $y = \frac{2}{3}$ 戊： $y = 0x - 1$

- ① 上列 y 與 x 的關係式，何者 y 是 x 的一次函數？
 ② 上列 y 與 x 的關係式，何者 y 是 x 的常數函數？

解：① 一次函數 ($y = ax + b$)：乙、丙。 ② 常數函數 ($y = 0x + b$)：丁、戊。

- (14) ① 一次函數 $y = 3x$ ，當 $x = 1$ 時，請問 $y = ?$
 ② 一次函數 $y = -2x + 1$ ，當 $x = 2$ 時，請問 $y = ?$
 ③ 常數函數 $y = 5$ ，當 $x = 3$ 時，請問 $y = ?$

解：① $x = 1$ 時， y 為 $y = 3 \times 1$ ， $y = 3$ 。
 ② $x = 2$ 時， y 為 $y = (-2) \times 2 + 1$ ， $y = -3$
 ③ 常數函數 $y = 5$ 可以看成 $y = 0x + 5$ ， $x = 3$ 時， y 為 $y = 0 \times 3 + 5$ ， $y = 5$



隨堂練習

- (1) 一次函數 $y = \frac{9}{5}x + 32$ ，當 $x = 15$ 時， $y = ?$
 (2) 常數函數 $y = 15$ ，當 $x = 5$ 時， $y = ?$

- (15) ① 已知一次函數 $y = 2x + 1$ 與一次函數 $y = x - 3$ ，當 $x = a$ 時的兩個 y 值會相等，則 $a = ?$
 ② 已知一次函數 $y = 3x + 1$ 與常數函數 $y = -5$ ，當 $x = b$ 時的兩個 y 值會相等，則 $b = ?$

解：① 一次函數 $y = 2x + 1$ 在 $x = a$ 時， y 為 $y = 2a + 1$
 一次函數 $y = x - 3$ 在 $x = a$ 時， $y = a - 3$
 得到 $2a + 1 = a - 3$ ， $a = -4$



基本學習內容：FC-8-1-1、2

② 一次函數 $y = 3x + 1$ 在 $x = b$ 時， y 為 $y = 3b + 1$

常數函數 $y = -5$ (即 $y = 0x - 5$) 在 $x = b$ 時， $y = 0 \times b - 5$ ， $y = -5$

得到 $3b + 1 = -5$ ， $b = -2$

(16) 一次函數 $y = ax + b$ ，當 $x = 2$ 時的 y 為 5， $x = 3$ 時的 y 為 7，請問此一次函數為何？

解：一次函數 $y = ax + b$ ，

代入 $x = 2$ ， $y = 5$ ，得到 $5 = 2a + b$ ①

代入 $x = 3$ ， $y = 7$ ，得到 $7 = 3a + b$ ②

由①、②聯立可得 $\begin{cases} 2a + b = 5 \dots\dots(1) \\ 3a + b = 7 \dots\dots(2) \end{cases}$

由(2)式減(1)式得 $a = 2$ 代回(1)式解得 $b = 1$

故此一次函數為 $y = 2x + 1$



隨堂練習

(1) 函數 $y = ax + b$ ，當 $x = -1$ 時的 y 為 3， $x = 2$ 時的 y 為 3，請問此函數為何？



小試身手

(1) 下表列出 x 與 y 的對應關係，請問哪一組 y 不是 x 的函數？

①

x	1	2	3	4	5
y	8	6	4	2	0

②

x	1	2	3	4	5
y	3	3	3	3	3

③

x	1	2	3	2	1
y	1	2	3	-2	-1

(2) 已知一次函數 $y = -2x - 3$ 與一次函數 $y = x + 6$ ，當 $x = k$ 時的兩個 y 值會相等，

請問 k 為多少？

(3) 若一次函數 $y = ax + b$ ，當 $x = 5$ 時的 y 為 -4 ， $x = 1$ 時的 $y = 4$ ，請問此一次函數為何？



教育部國民及學前教育署 編

國民中學

學生學習扶助教材

8 年級數學

