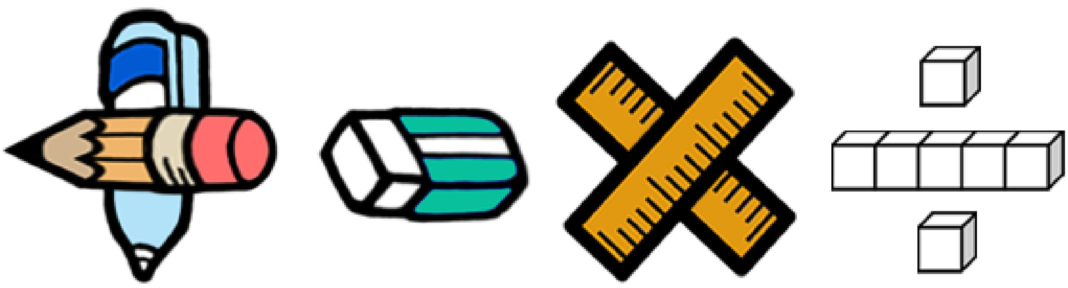
基本學習內容：NC-8-3-1
NC-8-4-1、2

數列的意義
等差數列的意義
等差數列第 n 項公式

班級：__________

姓名：__________



教育部國民及學前教育署 編

中華民國 111 年 8 月

基本學習內容：NC-8-3-1；NC-8-4-1、2

◎認識數列

(1)請觀察這些圖形，依照圖(1)、圖(2)、圖(3)、圖(4)、圖(5)、圖(6)的順序，把各個圖形中圈圈的個數記成一列。

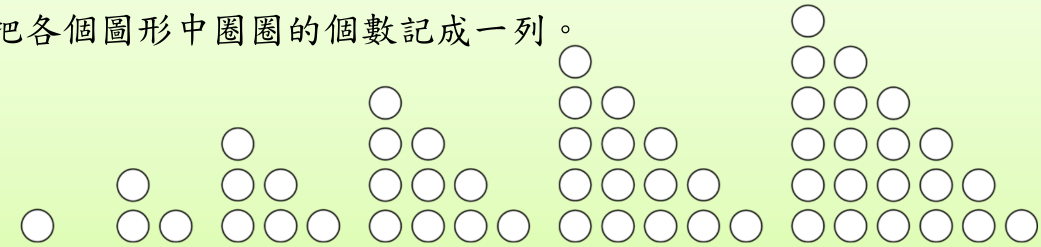


圖 1　圖 2　圖 3　圖 4　圖 5　圖 6

解：我們先點數發現，圖(1)有1個圈圈，圖(2)有3個圈圈，圖(3)有6個圈圈，圖(4)有10個點，圖(5)有15個圈圈，圖(6)有21個圈圈。

我把這些圈圈的數量記成一列 ：1、3、6、10、15、21，

第一個數是1表示圖(1)的圈圈的數量，第二個數是3表示圖(2)的圈圈的數量，第三個數是6表示圖(3)的圈圈的數量，第四個數是10表示圖(4)的圈圈的數量，第五個數是15表示圖(5)的圈圈的數量，第六個數是21表示圖(6)的圈圈的數量。

答：1、3、6、10、15、21

依照圖(1)、圖(2)的順序，把圈圈的個數排成一列，並以逗點分開，稱為數列。

例如: 1, 3, 6, 10, 15, 21

(2)有一位植物學家從 5 月 1 日到 5 月 8 日把植物生長高度是幾公分依序記紀錄如下:　3,7,10,15,18,20,23,25

請問 5 月 3 日植物生長的高度是幾公分?

解：5 月 1 日是 3 公分，5 月 2 日是 7 公分，5 月 3 日是 10 公分。

答：10 公分

3,7,10,15,18,20,23,25 中，數字由左開始依序排列，這樣的記錄稱為**數列**。

這個數列總共有 8 個項，數列中第 1 個數字是 3，稱為第 1 項(又稱為**首項**)，可以記為 a_1=3，第 2 個數字是 7，稱為第 2 項，記為 a_2=7，……，依此類推。最後 1 個數字為 25，稱為**末項，可以記為** a_8=25。

(3)小明將最近一週高雄市 covid-19 確診例子列成數列:

703 , 653, 324, 568, 840, 990, 787

請問第一天有幾人確診?第五天有幾人確診?最後一天有幾人確診?

解：我們將確診例子整理成表格如下:

第一天	第二天	第三天	第四天	第五天	第六天	第七天
703	653	324	568	840	990	787

將第一天看成這個數列的第一項，第二天看成這個數列的第二項，以此類推，此數列總共有七項，為了方便記錄，我們用 a_1 表示這個數列的第一項，用 a_1 表示這個數列的第二項，a_3 表示這個數列的第三項，以此類推。

a_1=703，a_1=653，a_3=324，a_4=568，a_5=840，a_6=990，a_7=787，

答：第一天有 703 人，第五天有 840 人，第七天有 787 人。

重點整理

項：數列中的每一個數叫做項，

其中第一個數稱為第 1 項或首相，通常記為 a_1；

第二個數稱為第 2 項，記為 a_2；

第三個數稱為第 3 項，記為 a_3；

最後一個數稱為末項，記為 a_n，其中 n 代表項數。

其實只是一個統稱，例如項數 n=13，則 a_n=a_{13} 表示第 13 項。

基本學習內容：NC-8-3-1；NC-8-4-1、2

◎等差數列

(1)

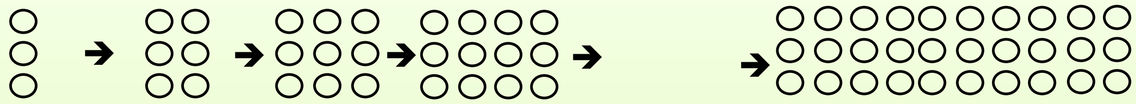


圖 1　　圖 2　　圖 3　　圖 4　　　　　　圖 10

如上圖，棋子的排列有規律，

圖 1 有一排棋子 3×1 個，圖 2 有二排棋子 3×2 個，

圖 3 有三排棋子 3×3 個，圖 4 有四排棋子 3×4 個，……

用一個算式把圖 1~圖 10 的棋子排數和棋子個數對應記下來，

你要怎麼表示這個算式？

解：我把各個圖的棋子排數跟棋子個數做對應，整理如下：

(棋子排數)		(棋子個數)
1	→	3×1(個)
2	→	3×2(個)
3	→	3×3(個)
4	→	3×4(個)
……		
10	→	3×10(個

➔

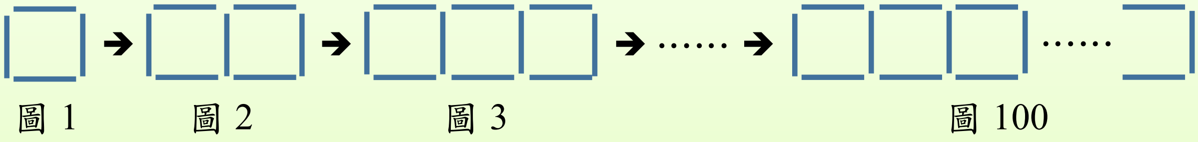
我發現棋子排數和棋子個數有對應關係，

可以用一個算式記下來：

(棋子排數)		(棋子個數)
n	→	$3\times n$(個)
$n=1,2,3,\ldots\ldots,10$		

答：$3\times n$ ($n=1,2,3,\ldots\ldots,10$)

(2)

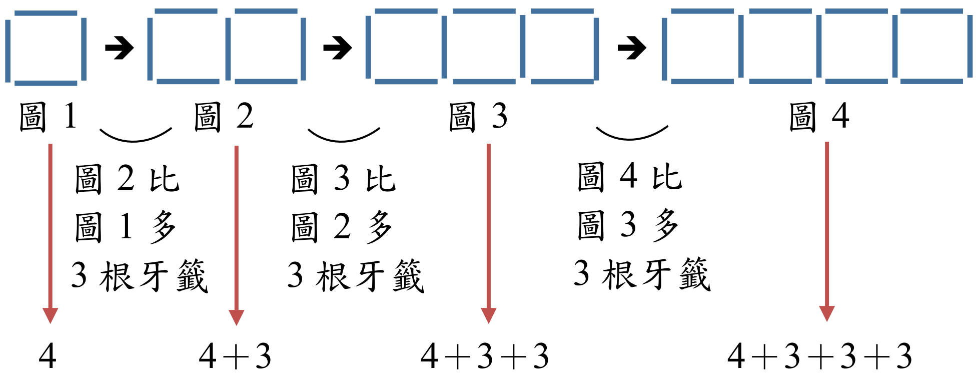


如上圖，用牙籤排列正方形，圖 1 有 1 個正方形，圖 2 有 2 個正方形，圖 3 有 3 個正方形，…，圖 100 有 100 個正方形，請問：

① 圖 4 有 4 個正方形，請問有幾根牙籤？

② 用一個算式來表示從圖 1 到圖 100 的正方形數與牙籤數的對應，你要怎麼表示這個算式？

解：①我觀察後發現，每個圖形的正方形個數都比前一個圖形的正方形個數多 1 個，而每多一個正方形就會多 3 根牙籤，我只要把前一個圖形的牙籤數加 3，就可以得到下一個圖形的牙籤數，所以圖 4 需要 4＋3＋3＋3 根牙籤。



②我把圖 1~圖 100 的正方形數與牙籤數作對應整理

(正方形數)		(牙籤數)
1	→	4
2	→	4＋3
3	→	4＋3＋3
4	→	4＋3＋3＋3
	……	
100	→	4＋3＋3＋3＋…＋3

➔

（正方形數）	（牙籤數）
1	→ 4
2	→ 4＋3×1
3	→ 4＋3×2
4	→ 4＋3×3
……	
100	→ 4＋3×99

我發現正方形數跟牙籤數有對應關係，可以改記為：

(正方形數)	(牙籤數)
1	→ 4
2	→ 4＋3×(2－1)
3	→ 4＋3×(3－1)
4	→ 4＋3×(4－1)
……	
100	→ 4＋3×(100－1)

➔

(正方形數)	(牙籤數)
1	→ 4＋3×(1－1)
2	→ 4＋3×(2－1)
3	→ 4＋3×(3－1)
4	→ 4＋3×(4－1)
……	
100	→ 4＋3×(100－1)

我可以用一個算式記下來：

(正方形數)	(牙籤數)
n	→ 4＋3×(n－1)，n＝1,2,3,…,100

另外一個記法是，我把圖 n 的牙籤數寫做 a_n ，可以用算式記成：

a_n ＝4＋3×(n－1)，n＝1,2,3,…,100

答： ①4＋3＋3＋3 根②a_n ＝4＋3×(n－1)，n＝1,2,3,…,100

(3)

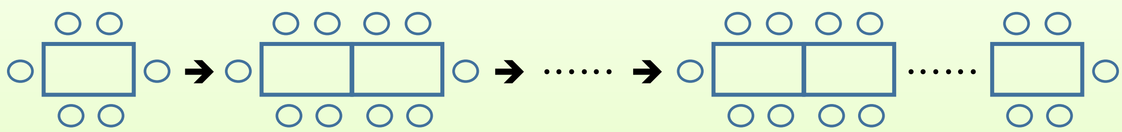


圖 1　　圖 2　　圖 100

如上圖，圖 1 有 1 張桌子 6 張椅子，圖 2 有 2 張桌子 10 張椅子，依此類推總共有 100 張圖，請問：

①圖 3 有 3 張桌子，請問椅子有幾張？

②用一個算式來表示從圖 1 到圖 100 裡桌子數和椅子數的對應，你要怎麼表示這個算式？

解：① 我整理圖 3 的桌子數與椅子數，發現一張桌子的上下二端共有 4 個椅子，還要加上左右二端的 2 張椅子，所以椅子數有 2＋4＋4＋4＝2＋4×3＝14 張。

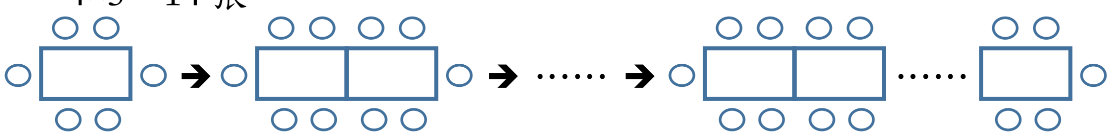


圖 1　　圖 2　　圖 100

椅子數 2＋4　　2＋4＋4　　$\underbrace{2+4+4+4+4+\ldots+4}_{100\text{ 個}}$

② 我把圖 1~圖 100 的算式重新整理

（桌子數）（椅子數）
1 → $2+4\times1$ (根)
2 → $2+4\times2$ (根)
3 → $2+4\times3$ (根)
4 → $2+4\times4$ (根)
……
100 → $2+4\times100$（根）

➔

我可以用一個算式記下來：

(桌子數) (椅子數)
n → $2+4\times n$(根)，$n=$

我把圖 n 的椅子數寫做 a_n，
用一個算式記下來：

$a_n=2+4\times n$，$n=1,2,3,\ldots,100$

答： ①14 張② $a_n=2+4\times n$，$n=1,2,3,\ldots,100$

數列 1,4,7,10,13,16 中，任何相鄰二項，其後項減去前項所得的差都相等，如 4－1=7－4=10－7=13－10=16－13=3。
像這樣後項減去前項所得的差都相等的數列，稱為**等差數列**。
每個後項減前項的差，稱為**公差**，記為 d。
如上述的等差數列，公差 d 是 3。
還有像下面的數列也都是**等差數列**。
例題(2)的棋子數：3,6,9,12,15,18,……,30，公差 d 是 3。
例題(3)的牙籤數：4,7,10,13,……,301，公差 d 是 3。
例題(4)的椅子數：6,10,14,18,……,402，公差 d 是 4。

(4) 請判斷下列哪一個是等差數列？

① 2, 5, 8, 11, 14, 17

② 19, 13, 7, 1, －5, －11

③ 3, －3, 3, －3, 3, －3, 3

解：①後項－前項=5－2=8－5=11－8=14－11=17－14=3，所以是等差數列。

②後項－前項=13－19=7－13=1－7=(－5) －1=(－11)－(－5)=－6，所以是等差數列。

③第二項－第一項=(－3) －3=－6

第三項－第二項=3－(－3)=6

因為後項－前項的結果不一樣，所以不是等差數列。

答：①是，公差=3

②是，公差=－6

③不是

(5) 下列的等差數列，請問公差各是多少？

① 2,5,8,11,14,17

② 19,13,7,1,-5,-11

解：①後項－前項=5－2=8－5=11－8=14－11=17－14=3，所以公差是 3。

②後項－前項=13－19=7－13=1－7=(－5)－1=(－11)－(－5)=－6，所以公差是－6。

答：①公差=3

②公差=－6

(6) 在等差數列 4, 7, 10, 13, 16, 19 中，公差為 3，
用一個算式表示此等差數列，你要怎麼表示這個算式？

解：我把每一項的數字做整理，發現：

(項)	(數字)
1	$\to 4$
2	$\to 7$
3	$\to 10$
4	$\to 13$
5	$\to 16$
6	$\to 19$

➔

(項)	(數字)
1	$\to 4$
2	$\to 4+3$
3	$\to 4+3+3$
4	$\to 4+3+3+3$
5	$\to 4+3+3+3+3$
6	$\to 4+3+3+3+3+3$

➔

(項)	(數字)
1	$\to 4$
2	$\to 4+3\times1$
3	$\to 4+3\times2$
4	$\to 4+3\times3$
5	$\to 4+3\times4$
6	$\to 4+3\times5$

➔

(項)	(數字)
1	$\to 4$
2	$\to 4+3\times(2-1)$
3	$\to 4+3\times(3-1)$
4	$\to 4+3\times(4-1)$
5	$\to 4+3\times(5-1)$
6	$\to 4+3\times(6-1)$

➔

(項)	(數字)
1	$\to 4+3\times(1-1)$
2	$\to 4+3\times(2-1)$
3	$\to 4+3\times(3-1)$
4	$\to 4+3\times(4-1)$
5	$\to 4+3\times(5-1)$
6	$\to 4+3\times(6-1)$

➔ 我們可以用一個算式記下來：

(項)	(數字)
n	$\to 4+3\times(n-1)$，$n=1,2,3,4,5,6$

另外一個記法，把對應的數字改寫成 a_n，算式可以記成

$a_n=4+3\times(n-1)$，$n=1,2,3,4,5,6$

答：$a_n=4+3\times(n-1)$，$n=1,2,3,4,5,6$

隨堂練習

在等差數列 2,5,8,11,14,17,20 中，公差為 3，第 n 項寫成 a_n，
用一個算式表示此等差數列，你要怎麼表示這個算式？

(7) 在等差數列 301, 298, 295, 292, 289, 286, 283 中，公差為－3，用一個算式表示此等差數列，你要怎麼表示這個算式？

解： 我把每一項的數字做整理，發現:

(項)	(數字)
1	→301
2	→298
3	→295
4	→292
5	→289
6	→286
7	→283

➔

(項)	(數字)
1	→ 301
2	→ 301+(－3)
3	→ 301+(－3)+(－3)
4	→ 301+(－3)+(－3) +(－3)
5	→ 301+(－3)+(－3) +(－3)+(－3)
6	→ 301+(－3)+(－3) +(－3) +(－3)+(－3)
7	→ 301+(－3)+(－3) +(－3)+(－3) +(－3)+(－3)

➔

(項)	(數字)
1	→ 301+0×(－3)
2	→ 301+1×(－3)
3	→ 301+2×(－3)
4	→ 301+3×(－3)
5	→ 301+4×(－3)
6	→ 301+5×(－3)
7	→ 301+6×(－3)

➔

(項)	(數字)
1	→301+(1－1)×(－3)
2	→301+(2－1)×(－3)
3	→301+(3－1)×(－3)
4	→301+(4－1)×(－3)
5	→301+(5－1)×(－3)
6	→301+(6－1)×(－3)
7	→301+(7－1)×(－3)

我可以用一個算式記下來：

(項)	(數字)
n	→301+(n－1) ×(－3)，n＝1,2,3,…,8

另外一個記法，我把對應的數字寫成 a_n ，

可以記成 a_n ＝301+(n－1) ×(－3)，n＝1, 2, 3,…, 8

答： a_n ＝301+(n－1) ×(－3)，n＝1, 2, 3,…, 8

等差數列：3,5,7,9,11,13,15,17,19,21,23,25,27,29
可以省略寫成 3,5,7,…,29

(8) 在等差數列 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28,……, 298 中，公差為 3，
請問末項 298 是第幾項？

解： 在例題(7)中，我用一個算式 $a_n =4+3\times(n-1)$，$n=1,2,3,4,5,6$，
來表示 4,7,10,13,16,19。
等差數列 4,7,10,13,16,19,22,25,28,……，298 是前述數列的延長。
若末項是 298，假設它是第 n 項，我從算式 $a_n =4+3\times(n-1)$知道，
$4+3\times(n-1)=298$
$3\times(n-1)=294$
$n-1=98$
$n=99$
所以 298 是第 99 項。

答： 第 99 項

如果 $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ 為等差數列，第 n 項寫成 a_n，公差寫成 d，
我們可以發現：

$a_1 \to a_1 \to a_1+d\times0 \to a_1+d\times(1-1)$
$a_2 \to a_1+d \to a_1+d\times1 \to a_1+d\times(2-1)$
$a_3 \to a_1+d+d \to a_1+d\times2 \to a_1+d\times(3-1)$
$a_4 \to a_1+d+d+d \to a_1+d\times3 \to a_1+d\times(4-1)$
……

➔ 所以我們可以得到一個計算公式：

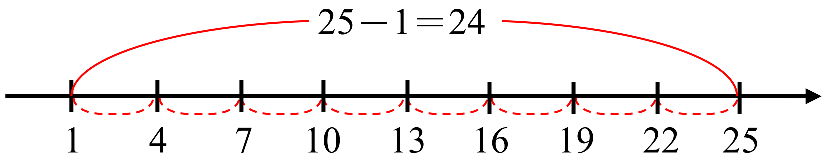
$$a_n = a_1+d\times(n-1)，n=1,2,3,\ldots$$

隨堂練習

在等差數列 1,3,5,7,9,11,13,15,17,19,……,51，公差為 2，
請問 51 是第幾項？

(9) 等差數列 1,4,7,10,13,16,19,22,25,…,61 中，首項是 1，末項是 61，請問此數列共有幾項？

解：小明說：我把每項數字當作數線上的一點，先觀察 1~25 相差 24，公差 3，



我發現(25－1)÷3 可以得到 8 個線段和 9 項數字。
同樣方式，觀察 1~61 相差 60，公差 3，(61－1)÷3＝20，
可以得到 20 個線段和 21 項數字。

小英說：我用對應關係整理數字，發現：

（項）		（數字）		（數字）		（數字）
1	→	1	→	$1+3\times0$	→	$1+3\times(1-1)$
2	→	4	→	$1+3\times1$	→	$1+3\times(2-1)$
3	→	7	→	$1+3\times2$	→	$1+3\times(3-1)$
4	→	10	→	$1+3\times3$	→	$1+3\times(4-1)$
5	→	13	→	$1+3\times4$	→	$1+3\times(5-1)$
…		…		…		
?	→	61	→	$1+3\times20$	→	$1+3\times(21-1)$

從 $61=1+3\times(21-1)$發現 61 是第 21 項，得到數列共有 21 項。

小華說：我利用等差數列公式：$a_n=a_1+d\times(n-1)$，得到 $1+3\times(n-1)=61$

$3\times(n-1)=60$

$n-1=20$，$n=21$

也就是共有 21 項。

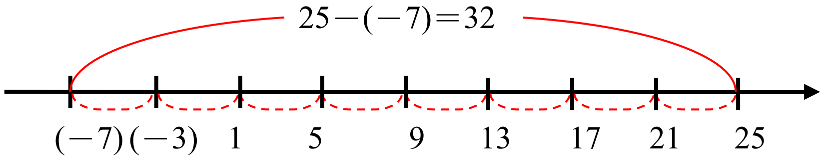
答：21 項

隨堂練習

等差數列 2,5,8,11,14,17,…,41 中，共有幾項？

(10) 等差數列$(-7),(-3),1,5,9,13,17,21,25,\ldots,41$ 中，共有幾項？

解：小明說：我把每項數字當作數線上的一點，先觀察(-7)～25 相差 32，公差 4，



我發現$[25-(-7)]\div4$ 可以得到 8 個線段和 9 項數字。

同樣方式，觀察(-7)～41 相差 48，公差 4，$[41-(-7)]\div4=12$，

可以得到 12 個線段和 13 項數字。

小華說：我利用等差數列公式：$a_n=a_1+d\times(n-1)$，得到$(-7)+4\times(n-1)=41$

$4\times(n-1)=41-(-7)=48$

$n-1=48\div4=12$

$n=12+1=13$

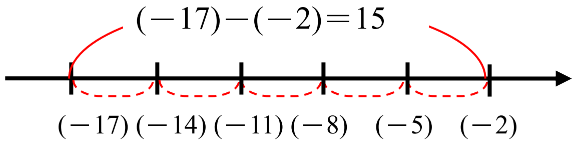
也就是共有 13 項。

答：13 項

(11) 等差數列$(-2),(-5),(-8),(-11),(-14),(-17),\ldots,(-41)$中，共有幾項？

解：小明說：我把每項數字當作數線上的一點，先觀察(-2)～(-17)相差 15，

公差(-3)，



我發現$[(-17)-(-2)]\div3$ 可以得到 5 個線段和 6 項數字。

同樣方式，觀察(-2)～(-41)相差(-39)，公差(-3)，

$[(-41)-(-2)]\div(-3)=13$，

可以得到 13 個線段和 14 項數字。

小華說：我利用等差數列公式：$a_n=a_1+d\times(n-1)$，

得到$(-2)+(-3)\times(n-1)=(-41)$

$(-3)\times(n-1)=(-41)-(-2)=(-41)+2=(-39)$

$n-1=(-39)\div(-3)=13$

$n=13+1=14$

也就是共有 14 項。

答：14 項

小試身手

①觀察下列數列的規律，在空格中填入適當的數。

(1) $-3,-6,-9,-12,\square$

(2) $2,4,8,\square,32,64$

(3) $-1,3,\square,11,15$

(4) $-1,2,-3,4,-5,6,\square,8,-9,10$

②判斷下列數列是否為等差數列。如果是等差數列，寫出它的公差。

(1) $-2,-2,-2,-2,-2,-2$

(2) $1,-2,3,-4,5,-6$

(3) $6,3,0,-3,-6$

(4) $-2,-5,-9,-14,-20,-27$

(5) $5,10,15,20,25,30$

③若等差數列的首項為 12，公差為-2，求此等差數列的第 16 項。

④已知 7,11,15,……,67 為等差數列，則此等差數列共有幾項？

教育部國民及學前教育署 編

國民中學

學生學習扶助教材 8 年級數學