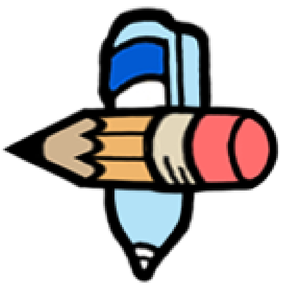
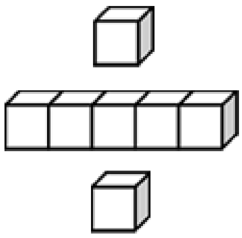
基本學習內容：NC-8-5-1

等差級數求和

班級：____________

姓名：____________



教育部國民及學前教育署 編

中華民國 111 年 8 月

複習等差數列

(1) 判斷下列何者是等差數列。如果是等差數列，寫出它的公差。

① 1，4，7，10，13

② 2，1，0，-1，-2

③ -1，-1，-1，-1，-1，-1

④ $\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{5}$，$\frac{1}{6}$

解：

① 因為 $4-1=7-4=10-7=13-10=3$

所以是等差數列，公差＝3。

② 因為 $1-2=0-1=-1-0=-2-(-1)=-1$

所以是等差數列，公差＝-1。

③ 因為 $-1-(-1)=-1-(-1)=-1-(-1)=-1-(-1)=0$

所以是等差數列，公差＝0。

④ 因為 $\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{6}$、$\frac{1}{4}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{12}$

我檢查前面三項，因為後項－前項的值不相等，

所以不是等差數列。

重點整理

1，4，7，10，13，…，28

+3 +3 +3 +3

像這樣任意相鄰兩項，後項減前項的差都相等的數列，稱為等差數列，而這個差稱為公差，一般記為 d。

等差級數求和

(2) 計算 1＋2＋3＋4＋5＋6＋7＋8＋9＝？

解：

小明說：我一步一步慢慢算，
得到 1＋2＋3＋4＋5＋6＋7＋8＋9＝45。

小英說：從「1＋2＋3＋4＋5＋6＋7＋8＋9」中，
我發現 1＋9、2＋8、3＋7、4＋6 的答案都是 10，還剩 1 個 5。
得到 1＋2＋3＋4＋5＋6＋7＋8＋9＝45。

小華說：我發現
1＋9、2＋8、3＋7、4＋6、5＋5、6＋4、7＋3、8＋2、9＋1
的答案都是 10，用下列算式表示：

$$
\begin{array}{rccccccccccccccccccl}
 & 1 & + & 2 & + & 3 & + & 4 & + & 5 & + & 6 & + & 7 & + & 8 & + & 9 & \cdots① \\
+) & 9 & + & 8 & + & 7 & + & 6 & + & 5 & + & 4 & + & 3 & + & 2 & + & 1 & \cdots② \\
\hline
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & 10 & + & 10 & + & 10 & + & 10 & + & 10 & + & 10 & + & 10 & + & 10 & + & 10 &
\end{array}
$$

算式①和算式②的答案相等，10×9＝90
得到 1＋2＋3＋4＋5＋6＋7＋8＋9＝10×9÷2＝90÷2＝45

(3) 計算(3＋5＋7＋9＋11＋13)＋(4＋8＋12＋16＋20＋24)＝？

解：

小凱說：我先算前面的和，再算後面的和，算完的和再相加。
$3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 = 16 \times 6 \div 2 = 48$
$4 + 8 + 12 + 16 + 20 + 24 = 28 \times 6 \div 2 = 84$
所以(3＋5＋7＋9＋11＋13)＋(4＋8＋12＋16＋20＋24)＝ 48 ＋ 84 ＝ 132

小豪說：因為項數相同，我先算出每一項的和，發現 7、13、…、37 也是等差數列，所以我算出等差數列的和，就是原來兩個等差數列的和。

$$
\begin{array}{rccccccccccc}
 & 3 & + & 5 & + & 7 & + & 9 & + & 11 & + & 13 \\
+) & 4 & + & 8 & + & 12 & + & 16 & + & 20 & + & 24 \\
\hline
 & 7 & + & 13 & + & 19 & + & 25 & + & 31 & + & 37
\end{array}
$$

所以 $7 + 13 + 19 + 25 + 31 + 37 = 44 \times 6 \div 2 = 132$

(1)把等差數列的每一項用加號連接起來，就稱為等差級數。

例如：

等差數列：1，2，3，4，5

等差級數：1＋2＋3＋4＋5

等差數列：3，5，7，9，11，13，15，17，19，21，23，25，27

可以省略寫成 3，5，7，⋯，27

等差級數：3＋5＋7＋9＋11＋13＋15＋17＋19＋21＋23＋25＋27

可以省略寫成 3＋5＋7＋⋯＋27

(2)算出等差級數的和就稱為此等差數列的和。

例如：

1＋2＋3＋4＋5＋6＋7＋8＋9＋10＝55，

我們稱 55 為此等差級數的和。

(3)項數相同的兩個等差數列之逐項和，所成的數列仍為等差數列，而且公差為原來兩個等差數列公差的和。

例如：

	2	＋	4	＋	6	＋	8	＋	10	**公差＝2**
＋)	1	＋	4	＋	7	＋	10	＋	13	**公差＝3**
	3	＋	8	＋	13	＋	18	＋	23	**公差＝2＋3＝5**

隨堂練習

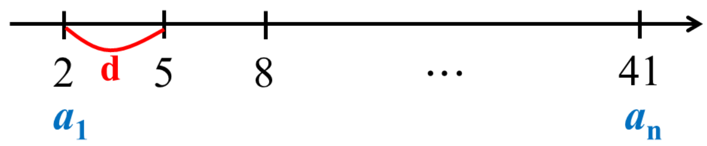
計算(4＋5＋6＋7＋8＋9＋10)＋(1＋7＋13＋19＋25＋31＋37)＝？

(4) 等差級數 2＋5＋8＋11＋…＋41＝？

解：

小豪說：我發現 2＋41、5＋38、8＋35、11＋32、14＋29、17＋26、20＋23、23＋20、26＋17、29＋14、32＋11、35＋8、38＋5、41＋2 都是 43，我慢慢數發現有 14 組數字，43×14＝602
得到 2＋5＋8＋11＋…＋41＝602÷2＝301

小明說：如下圖，我把每項數字當作數線上的一點：



先算出頭尾相差 $41-2=39$，
因為公差為 3，將 $39\div 3=13$，所以有 13 個線段，
將 $13+1=14$，得到 14 個數字，也就是有 14 項。
再利用小豪的算法，得到 2＋5＋8＋…＋41＝43×14＝602÷2＝301

小凱說：我先算出等差數列 2，5，8，11，…，41 有幾項，
讓小豪的算法變得更方便。
要數出有幾個數字，
可以利用等差數列的公式：$a_n=a_1+(n-1)\times d$，
得到

$$
\begin{aligned}
2+(n-1)\times 3 &= 41\\
(n-1)\times 3 &= 39\\
n-1 &= 13\\
n &= 14
\end{aligned}
$$

再利用小豪的算法，得到 2＋5＋8＋⋯＋41＝43×14＝602÷2＝301

我們可以用 S 表示總和，讓計算過程看起來更加清楚。

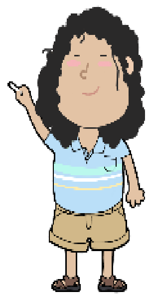
以 S 表示 2＋5＋8＋11＋…＋41 的總和。
項數用小凱的公式算法：

$a_n = a_1 + (n-1)\times d \Rightarrow 41 = 2 + (n-1)\times 3$，

得到 $n = 14$。

$$
\begin{array}{lccccccccccccc}
 & S= & 2 & + & 5 & + & 8 & + & 11 & + & \cdots & + & 41 \\
+) & S= & 41 & + & 38 & + & 35 & + & 32 & + & \cdots & + & 2 \\
\hline
 & S+S= & 43 & + & 43 & + & 43 & + & 43 & + & \cdots & + & 43
\end{array}
$$

$2\times S = 43\times 14 = 602$
得到 $S = 602\div 2 = 301$



(5) 等差級數 1＋4＋7＋10＋13＋16＋19＋22＋…＋61＝？

解：

小凱說：利用等差數列公式：$a_n = a_1 + (n-1)\times d$，
得到 $61 = 1 + (n-1)\times 3$
得到 $(n-1)\times 3 = 61 - 1 = 60$，得到 $n-1 = 60\div 3 = 20$，
得到 $n = 20 + 1 = 21$，
也就是共有 21 項。

$$
\begin{array}{lcccccccccccccccccccc}
 & S= & 1 & + & 4 & + & 7 & + & 10 & + & 13 & + & 16 & + & 19 & + & 22 & + & \cdots & + & 61 \\
+) & S= & 61 & + & 58 & + & 55 & + & 52 & + & 49 & + & 46 & + & 43 & + & 40 & + & \cdots & + & 1 \\
\hline
 & S+S= & 62 & + & 62 & + & 62 & + & 62 & + & 62 & + & 62 & + & 62 & + & 62 & + & \cdots & + & 62 = 62\times 21
\end{array}
$$

$S \times 2 = 62 \times 21$
$S = 62 \times 21 \div 2 = 651$

(6) 等差級數$(-7)+(-3)+1+5+9+13+\ldots+41=$？

解：

小凱說：利用等差數列公式：$a_n=a_1+(n-1)\times d$，

得到 $41=(-7)+(n-1)\times 4$

$(n-1)\times 4=41-(-7)=41+7=48$

$n-1=48\div 4=12$

$n=12+1=13$

也就是共有 13 項。

$$
\begin{array}{rcccccccccccccc}
 & S= & (-7) & + & (-3) & + & 1 & + & 5 & + & 9 & + & \ldots & + & 41 \\
+) & S= & 41 & + & 37 & + & 33 & + & 29 & + & 25 & + & \ldots & + & (-7) \\
\hline
 & S+S= & 34 & + & 34 & + & 34 & + & 34 & + & 34 & + & \ldots & + & 34=34\times 13
\end{array}
$$

$S\times 2=34\times 13$

$S=34\times 13\div 2=221$

(7) 等差級數 $41+37+33+29+25+\ldots+(-3)+(-7)=$？

解：我發現，把算式 $41+37+33+29+25+\ldots+(-3)+(-7)$的次序前後對調後，

跟第(4)題的$(-7)+(-3)+1+5+9+13+\ldots+41$ 是一樣的。

所以答案是 221。

隨堂練習

計算下列等差級數的和。

① $3+6+9+12+15+18+\ldots+54=$？

② $(-10)+(-5)+0+5+10+15+\ldots+55=$？

(8) 等差級數$(-2)+(-5)+(-8)+(-11)+(-14)+\ldots+(-41)=$？

解：

小凱說：利用等差數列公式：$a_n=a_1+(n-1)\times d$，

得到$(-\underline{41})=(-2)+(n-1)\times(-3)$

$(n-1)\times(-3)=(-41)-(-2)=(-41)+2=(-39)$

$n-1=(-39)\div(-3)=13$

$n=13+1=14$

也就是共有 14 項。

$$
\begin{array}{lccccccccccccc}
 & S= & (-2) & + & (-5) & + & (-8) & + & (-11) & + & (-14) & + \ldots + & (-41) & \\
+) & S= & (-41) & + & (-38) & + & (-35) & + & (-32) & + & (-29) & + \ldots + & (-2) & \\
\hline
 & S+S= & (-43) & + & (-43) & + & (-43) & + & (-43) & + & (-43) & + \ldots + & (-43) & =(-43)\times 14
\end{array}
$$

$S\times 2=(-43)\times 14$

$S=(-43)\times 14\div 2=-301$

如果 $a_1+\ldots+a_n$ 為等差級數，第 n 項寫成 a_n，

我們可以得到一個計算公式：

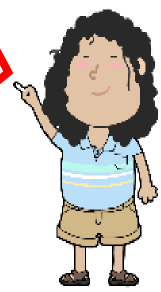
$$
\begin{array}{lcccccc}
 & S= & a_1 & + & \cdots & + & a_n \\
+) & S= & a_n & + & \cdots & + & a_1 \\
\hline
 & S+S= & (a_1+a_n) & + & \cdots & + & (a_1+a_n)
\end{array}
$$

$S\times 2=(a_1+a_n)\times n$

$S=(a_1+a_n)\times n\div 2$

也可以寫成$S=\dfrac{n\times(a_1+a_n)}{2}$

等差級數和的公式就是$S=\dfrac{n\times(a_1+a_n)}{2}$



(9) 等差級數 7＋11＋15＋19＋23＋27＋31＋35＝？

解：利用等差級數和的公式：$S = \dfrac{n \times (a_1 + a_n)}{2}$

我發現：$a_1 = 7$、$n = 8$、$a_8 = 35$

得到 $S = \dfrac{8 \times (7 + 35)}{2}$

$= 4 \times (7 + 35)$

$= 4 \times 42$

$= 168$

(10) 等差級數(－3)＋2＋7＋12＋17＋…＋42＝？

解：利用等差級數和的公式：$S = \dfrac{n \times (a_1 + a_n)}{2}$

我只知道 $a_1 = (-3)$、$a_n = 42$，還要求出 n 才能計算等差級數的和。

所以把 $a_1 = (-3)$、$a_n = 42$ 代入**等差數列公式**：$a_n = a_1 + (n-1) \times d$，

得到 $42 = (-3) + (n-1) \times 5$

$(n-1) \times 5 = 42 - (-3) = 42 + 3 = 45$

$n - 1 = 45 \div 5 = 9$

$n = 9 + 1 = 10$

也就是共有 10 項。

把 $a_1 = (-3)$、$n = 10$、$a_{10} = 42$ 代入等差級數和的公式

得到 $S = \dfrac{10 \times [(-3) + 42]}{2}$

$= 5 \times [(-3) + 42]$

$= 5 \times 39 = 195$

(11)已知等差級數$(-6)+(-1)+4+9+\cdots$共有 20 項，則此等差級數的和為多少？

解：利用等差級數和的公式：$S=\dfrac{n\times(a_1+a_n)}{2}$

我只知道$a_1=(-6)$、$n=20$，還要求出a_{20}才能計算等差級數的和。

所以把$a_1=(-6)$、$n=20$、$d=5$代入**等差數列公式**：$a_n=a_1+(n-1)\times d$，

得到$a_{20}=(-6)+(20-1)\times 5$

$=(-6)+19\times 5$

$=(-6)+95$

$=89$

再把$a_1=(-6)$、$n=20$、$a_n=89$代入**等差級數和公式**：$S=\dfrac{n\times(a_1+a_n)}{2}$

得到$S=\dfrac{20\times[(-6)+89]}{2}$

$=10\times 83$

$=830$

小試身手

求下列等差級數的和。

① $4+9+14+19+24+29+34+39=$？

② $3+5+7+9+11+13+15+17+\ldots+63=$？

③ $(-9)+(-5)+(-1)+3+7+11+\ldots+51=$？

④ $(-3)+(-6)+(-9)+(-12)+(-15)+\ldots+(-54)=$？

教育部國民及學前教育署 編

國民中學 學生學習扶助教材 8 年級數學