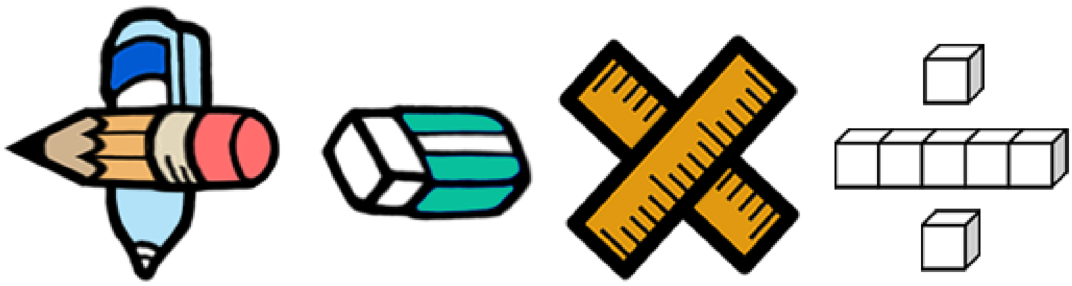
基本學習內容：NC-8-6-1、2

等比數列之意義、

等比數列第 n 項公式

班級：__________

姓名：__________



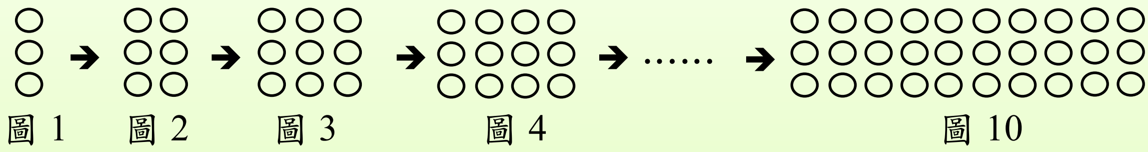
教育部國民及學前教育署 編

中華民國 111 年 8 月

基本學習內容：NC-8-6-1、2

◎複習等差數列

(1)



如上圖，棋子的排列有規律，

圖 1 有一排棋子 3×1 個，圖 2 有二排棋子 3×2 個，

圖 3 有三排棋子 3×3 個，圖 4 有四排棋子 3×4 個，……

用一個算式把圖 1~圖 10 的棋子排數和棋子個數對應記下來，

你要怎麼表示這個算式？並列出此棋子的排列數。

解：我把各個圖的棋子排數跟棋子個數做對應，整理如下：

（棋子排數）		（棋子個數）
1	→	3×1(個)
2	→	3×2(個)
3	→	3×3(個)
4	→	3×4(個)
	……	
10	→	3×10(個)

n

我發現棋子排數和棋子個數有對應關係，

可以用一個算式記下來：

（棋子排數）		（棋子個數）
n	→	3×n(個)

n＝1,2,3,……,10

因此圖一至圖十棋子數分別為 3,6,9,12,15,18,21,24,27,30 個。

如上例圖一至圖十的棋子個數分別是 3,6,9,12,15,18,21,24,27,30，
相鄰二項，其後項減去前項所得的差都相等，如 $a_2-a_1=6-3=3$,
$a_3-a_2=9-6=3$, $a_4-a_3=12-9=3$, $a_5-a_4=15-12=3$, $a_6-a_5=18-15=3$,
$a_7-a_6=21-18=3$, $a_8-a_7=24-21=3$, $a_9-a_8=27-24=3$, $a_{10}-a_9=30-27=3$,
像這樣相鄰後項減去前項所得的差都相等的數列，稱為**等差數列**。
每個後項減前項的差，稱為**公差**，記為 d。
如上述的等差數列，公差 d 是 3，記為 d=3。

(2)在等差數列 4,7,10,13,16,19…中，公差為 3，
用一個算式表示此等差數列，你要怎麼表示這個算式？

解：我把每一項的數字做整理，發現：

（項）（數字）
$1 \rightarrow 4$
$2 \rightarrow 7$
$3 \rightarrow 10$
$4 \rightarrow 13$
$5 \rightarrow 16$
$6 \rightarrow 19$
……

➔

（項）（數字）
$1 \rightarrow 4$
$2 \rightarrow 4+3$
$3 \rightarrow 4+3+3$
$4 \rightarrow 4+3+3+3$
$5 \rightarrow 4+3+3+3+3$
$6 \rightarrow 4+3+3+3+3+3$
……

➔

（項）（數字）
$1 \rightarrow 4$
$2 \rightarrow 4+3\times1$
$3 \rightarrow 4+3\times2$
$4 \rightarrow 4+3\times3$
$5 \rightarrow 4+3\times4$
$6 \rightarrow 4+3\times5$
……

➔

（項）（數字）
$1 \rightarrow 4$
$2 \rightarrow 4+3\times(2-1)$
$3 \rightarrow 4+3\times(3-1)$
$4 \rightarrow 4+3\times(4-1)$
$5 \rightarrow 4+3\times(5-1)$
$6 \rightarrow 4+3\times(6-1)$
……

➔

（項）（數字）
$1 \rightarrow 4+3\times(1-1)$
$2 \rightarrow 4+3\times(2-1)$
$3 \rightarrow 4+3\times(3-1)$
$4 \rightarrow 4+3\times(4-1)$
$5 \rightarrow 4+3\times(5-1)$
$6 \rightarrow 4+3\times(6-1)$
……

n

我可以用一個算式記下來：

（項）（數字）
$n \rightarrow 4+3\times(n-1)$，$n=1,2,3,4,\cdots$

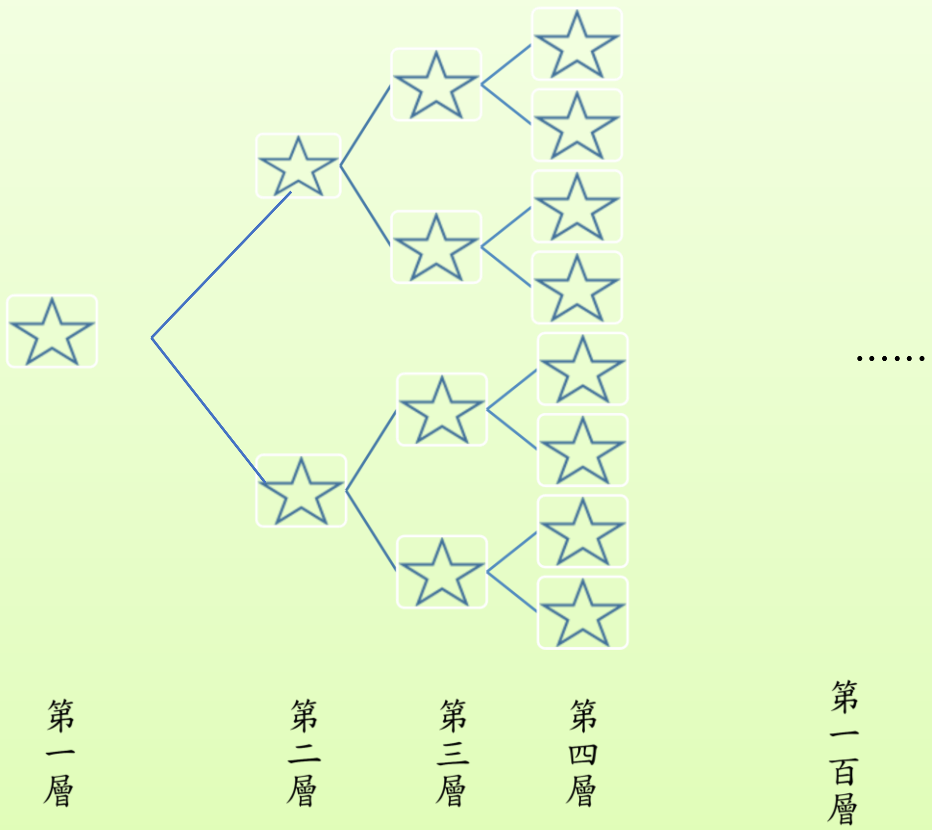
另外一個記法，我把對應的數字寫做 $a(n)$
或是改寫成 a_n，算式可以記成

$a_n=4+3\times(n-1)$，$n=1,2,3,4,\cdots$

基本學習內容：NC-8-6-1、2

◎等比數列

(1)



如上圖，樹狀圖第一層有 1 顆星，第二層有 1×2 顆星，
第三層有 $1\times2\times2$ 顆星，第四層有 $1\times2\times2\times2$ 顆星，依此類推有一百層，
請問：依此關係，用一個算式來表示從第一層到第一百層星星的層數和
星星數對應記下來，你要怎麼表示這個算式？

解：我把各層的層數跟星星個數做對應，整理如下：

（層數）		（星星個數）	
1	→	1	(個)
2	→	1×2	(個)
3	→	$1\times2\times2$	(個)
4	→	$1\times2\times2\times2$	(個)
……			
100	→	$1\times2\times2\times\ldots\times2$	(個)

➔

（層數）		（星星個數）	
1	→	1	(個)
2	→	1×2^1	(個)
3	→	1×2^2	(個)
4	→	1×2^3	(個)
……			
100	→	1×2^{99}	(個)

（層數）		（星星個數）	
1	$\rightarrow$	$1\times 2^{(1-1)}$	(個)
2	$\rightarrow$	$1\times 2^{(2-1)}$	(個)
3	$\rightarrow$	$1\times 2^{(3-1)}$	(個)
4	$\rightarrow$	$1\times 2^{(4-1)}$	(個)
	……		
100	$\rightarrow$	$1\times 2^{(100-1)}$	(個)

n

我發現層數和星星個數有對應關係，可以用一個算式記下來:

（層數）　　（星星個數）

$n \rightarrow 1\times 2^{(n-1)}$ (個) ， $n=1,2,3,\cdots\cdots,100$

另外一個記法

$a_1 = 1\times 2^{(1-1)}$　　$a_2 = 1\times 2^{(2-1)}$　　$a_3 = 1\times 2^{(3-1)}$

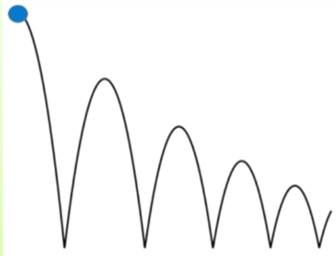
$a_4 = 1\times 2^{(4-1)}$　　$a_5 = 1\times 2^{(5-1)}$

我把第 n 層的星星個數寫成 a_n，算是可記成

$a_n = 1\times 2^{(n-1)}$ ，$n=1,2,3,4,\cdots,100$

由上例數列 1,2,4,8,16 中，
任何相鄰二項，其後項除以前項所得的商都相等，如
$a_2\div a_1=2\div 1=2$, $a_3\div a_2=4\div 2=2$, $a_4\div a_3=8\div 4=2$, $a_5\div a_4=16\div 8=2$，
像這樣相鄰後項除以前項所得的商都相等的數列，稱為**等比數列**。
每個後項除以前項的商，稱為**公比**，記為 r。
上述的等比數列，公比 r 是 2，記為 r=2。

(2)一球由高 135 公尺處落下，若每次反跳高度為落下高度的 2/3，第一次落下彈起的高度是 90 公尺，如圖所示，請依此關係，用一個算式來表示從落下到第十次的反跳高度對應數，你要怎麼表示這個算式？



解：

（次數）	（高度）
1 →	90
2 →	$90\times\frac{2}{3}$
3 →	$90\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}$
4 →	$90\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}$
5 →	$90\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}$
6 →	$90\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}$
7 →	$90\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}$
……	

➔

（次數）		（高度）
1	→	90
2	→	$90\times(\frac{2}{3})^{1}$
3	→	$90\times(\frac{2}{3})^{2}$
4	→	$90\times(\frac{2}{3})^{3}$
5	→	$90\times(\frac{2}{3})^{4}$
6	→	$90\times(\frac{2}{3})^{5}$
7	→	$90\times(\frac{2}{3})^{6}$
……		

➔

（次數）		（高度）
1	→	$90\times\ 1$
2	→	$90\times(\frac{2}{3})^{1}$
3	→	$90\times(\frac{2}{3})^{2}$
4	→	$90\times(\frac{2}{3})^{3}$
5	→	$90\times(\frac{2}{3})^{4}$
6	→	$90\times(\frac{2}{3})^{5}$
7	→	$90\times(\frac{2}{3})^{6}$
……		

➔

（次數）		（高度）
1	→	$90\times(\frac{2}{3})^{0}$
2	→	$90\times(\frac{2}{3})^{1}$
3	→	$90\times(\frac{2}{3})^{2}$
4	→	$90\times(\frac{2}{3})^{3}$
5	→	$90\times(\frac{2}{3})^{4}$
6	→	$90\times(\frac{2}{3})^{5}$
7	→	$90\times(\frac{2}{3})^{6}$
……		

➔

（次數）		（高度）
1	→	$90\times(\frac{2}{3})^{(1-1)}$
2	→	$90\times(\frac{2}{3})^{(2-1)}$
3	→	$90\times(\frac{2}{3})^{(3-1)}$
4	→	$90\times(\frac{2}{3})^{(4-1)}$
5	→	$90\times(\frac{2}{3})^{(5-1)}$
6	→	$90\times(\frac{2}{3})^{(6-1)}$
7	→	$90\times(\frac{2}{3})^{(7-1)}$
……		

n

我可以用一個算式記下來：

（次數）		（高度）
n	→	$90\times(\frac{2}{3})^{(n-1)}$ ， $n=1,2,3,4,5,6,7,\cdots 10$

另外一個記法，我把落下反彈對應的高度寫成 a_n，算式可以記成

$$a_n=90\times(\frac{2}{3})^{(n-1)}，n=1,2,3,4,\cdots 10$$

如果 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ 為等比數列，第 n 項寫成 a_n，公比寫成 r，
我們可以發現：

1 $\rightarrow a_1 \quad = a_1 \times r^0 \quad = a_1 \times r^{(1-1)}$

2 $\rightarrow a_2 = a_1 \times r \quad = a_1 \times r^1 \quad = a_1 \times r^{(2-1)}$

3 $\rightarrow a_3 = a_1 \times r \times r \quad = a_1 \times r^2 \quad = a_1 \times r^{(3-1)}$

4 $\rightarrow a_4 = a_1 \times r \times r \times r \quad = a_1 \times r^3 \quad = a_1 \times r^{(4-1)}$

……

所以我們可以得到一個計算公式：$a_n = a_1 \times r^{(n-1)}$，$n = 1,2,3,\cdots$

(3) 請判斷下列哪一個是等比數列？若為等比數列，請說明公比是多少？

① 2,5,8,11,14,17

②19,13,7,1,-5,-11

③ 1,2,4,8,16,32

④ 7,7,7,7,7,7

⑤ 3,-3,3,-3,3,-3

解：①$a_2 \div a_1=5\div 2=2.5$

$a_3 \div a_2=8\div 5=1.6$

因為 2.5≠1.6，我發現 $a_2 \div a_1 \neq a_3 \div a_2$，所以不是等比數列。

②$a_2 \div a_1=13\div 19=\frac{13}{19}$

$a_3 \div a_2=7\div 13=\frac{7}{13}$

因為$\frac{13}{19} \neq \frac{7}{13}$，我發現相 $a_2 \div a_1 \neq a_3 \div a_2$，所以不是等比數列。

③$a_2 \div a_1=2\div 1=2$

$a_3 \div a_2=4\div 2=2$

$a_4 \div a_3=8\div 4=2$

$a_5 \div a_4=16\div 8=2$

$a_6 \div a_5=32\div 16=2$

因為 2=2=2=2=2，我發現 $a_2 \div a_1=a_3 \div a_2=a_4 \div a_3=a_5 \div a_4=a_6 \div a_5$，所以是等比數列，公比為 2。

④$a_2 \div a_1=7\div 7=1$

$a_3 \div a_2=7\div 7=1$

$a_4 \div a_3=7\div 7=1$

$a_5 \div a_4=7\div 7=1$

$a_6 \div a_5=7\div 7=1$

因為 1=1=1=1=1，我發現 $a_2 \div a_1=a_3 \div a_2=a_4 \div a_3=a_5 \div a_4=a_6 \div a_5$，所以是等比數列，公比為 1。

⑤$a_2 \div a_1=(-3)\div 3=-1$

$a_3 \div a_2=3\div (-3)=-1$

$a_4 \div a_3=(-3)\div 3=-1$

$a_5 \div a_4=3\div (-3)=-1$

$a_6 \div a_5=(-3)\div 3=-1$

因為-1=-1=-1=-1=-1，我發現 $a_2 \div a_1=a_3 \div a_2=a_4 \div a_3=a_5 \div a_4=a_6 \div a_5$，所以是等比數列，公比為-1。

(4) 已知某等比數列的首項為 3 且公比為 2，請列出此等比數列的前五項。

學生可能的解法:

方法一

(n)	(a_n)		(a_n)	(a_n)
1 →	$a_1=3$	→	3	= 3
2 →	$a_2=3\times2$	→	3×2	= 6
3 →	$a_3=3\times2\times2$	→	3×2^2	= 12
4 →	$a_4=3\times2\times2\times2$	→	3×2^3	= 24
5 →	$a_5=3\times2\times2\times2\times2$	→	3×2^4	= 48

等比數列的前五項為 3,6,12,24,48

方法二

$a_1=3$

$a_2= a_1\times r=3\times2=6$

$a_3= a_2\times r=6\times2=12$

$a_4= a_3\times r=12\times2=24$

$a_5= a_4\times r=24\times2=48$

等比數列的前五項為 3,6,12,24,48

方法三

$a_1=3$

$a_2= a_1\times r^{2-1}=3\times2^{2-1}=3\times2=6$

$a_3= a_1\times r^{3-1}=3\times2^{3-1}=3\times2^2=3\times4=12$

$a_4= a_1\times r^{4-1}=3\times2^{4-1}=3\times2^3=3\times8=24$

$a_5= a_1\times r^{5-1}=3\times2^{5-1}=3\times2^4=3\times16=48$

等比數列的前五項為 3,6,12,24,48

(5) 在下列□中填入適當的數，使得每個數列成為等比數列：

① 16 ,□ , 4 , 2 , □

② □ , 27 , 9 , □ , □

解：①在等比數列 16 , □ , 4 , 2 , □中，令 $a_1=16$, $a_3=4$, $a_4=2$，

知道相鄰的兩項且知道數字的只有 $a_3=4$ 和 $a_4=2$

得知 $r= a_4 \div a_3=2\div 4=\frac{1}{2}$

因為 $a_2=a_1\times r$,

故 $a_2= 16\times \frac{1}{2}=8$

又因 $a_5=a_4\times r$,

故 $a_5= 2\times \frac{1}{2}=1$

②在等比數列□ , 27 ,9 , □ , □中，令 $a_2=27$, $a_3=9$,

相鄰的兩項且知道數字的只有 $a_2=27$ 和 $a_3=9$

得知 $r= a_3\div a_2=9\div 27=\frac{1}{3}$

因為 $r=a_2\div a_1$, $\frac{1}{3}=27\div a_1$,

故 $a_1=27\div \frac{1}{3}=81$

又因 $a_4=a_3 \times r$,

故 $a_4=9\times \frac{1}{3}=3$

再因 $a_5=a_4 \times r$,

故 $a_5=3\times \frac{1}{3}=1$

(6) 已知某等比數列的第五項為 10 且公比為$\frac{1}{2}$，請列出此等比數列的前十項。

方法一

在等比數列 $a_1, a_2, a_3, a_4, 10, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}$,其中 $a_5=10$，$r=\frac{1}{2}$

$a_6=10\times\frac{1}{2}=5$

$a_7=10\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$

$a_8=10\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{4}$

$a_9=10\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{8}$

$a_{10}=10\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{16}$

$r=a_5\div a_4$，$\frac{1}{2}=10\div a_4$，$a_4=20$; $r=a_4\div a_3$，$\frac{1}{2}=20\div a_3$，$a_3=40$

$r=a_3\div a_2$，$\frac{1}{2}=40\div a_2$，$a_2=80$; $r=a_2\div a_1$，$\frac{1}{2}=80\div a_1$，$a_1=160$

故此等比數列的前十項為 160,80,40,20,10,5, $\frac{5}{2}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{5}{16}$

方法二

在等比數列 $a_1, a_2, a_3, a_4, 10, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}$,其中 $a_5=10$，$r=\frac{1}{2}$

$a_5=a_1\times r^{5-1}$ ， $10=a_1\times(\frac{1}{2})^{5-1}$ ，$10=a_1\times\frac{1}{16}$ ，$a_1=10\times16=160$

$a_2=a_1\times r^{2-1}$ ， $a_2=160\times(\frac{1}{2})^{2-1}=160\times\frac{1}{2}=80$

$a_3=a_1\times r^{3-1}$ ， $a_3=160\times(\frac{1}{2})^{3-1}=160\times\frac{1}{4}=40$

$a_4=a_1\times r^{4-1}$ ， $a_4=160\times(\frac{1}{2})^{4-1}=160\times\frac{1}{8}=20$

$a_6=a_5\times r=10\times\frac{1}{2}=5$

$a_7=a_5\times r^2=10\times(\frac{1}{2})^2=10\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$

$a_8=a_5\times r^3=10\times(\frac{1}{2})^3=10\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{4}$

$a_9=a_5\times r^4=10\times(\frac{1}{2})^4=10\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{8}$

$a_{10}=a_5\times r^5=10\times(\frac{1}{2})^5=10\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{16}$

故此等比數列的前十項為 160,80,40,20,10,5, $\frac{5}{2}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{5}{16}$

(7) 在等比數列 4,12,36,108,324,972,……，26244 中，公比為 3，請問末項 26244 是第幾項？

解：

小英說：我用對應關係整理數字，發現：

(n)	(a_n)	(a_n)	(a_n)	(a_n)
1	→ 4	→ 4	→ 4×3^0	→ $4\times3^{(1-1)}$
2	→ 12	→ 4×3	→ 4×3^1	→ $4\times3^{(2-1)}$
3	→ 36	→ 4×3×3	→ 4×3^2	→ $4\times3^{(3-1)}$
4	→ 108	→ 4×3×3×3	→ 4×3^3	→ $4\times3^{(4-1)}$
5	→ 324	→ 4×3×3×3×3	→ 4×3^4	→ $4\times3^{(5-1)}$
…	…	…	…	…
?	→ 26244	→ 4×3×3×3×⋯×3	→ 4×3^8	→ $4\times3^{(n-1)}$

從 $26244=4\times3^{(9-1)}$發現 $4\times3^8=4\times3^{(n-1)}$，$3^8=3^{(n-1)}$

故 26244 是第 9 項，得到數列共有 9 項。

小華說：等比數列 4,12,36,108,324,972,……，26244 ，其中 $a_1=4$，

$r=a_2\div a_1=12\div4=3$

末項是 26244，假設末項是第 n 項，由公式 $a_n=a_1\times r^{n-1}$ 知道，

$4\times3^{(n-1)}=26244$

$3^{(n-1)}=6561$

$3^{(n-1)}=3^8$

$n-1=8$

$n=9$

所以 26244 是第 9 項。

隨堂練習

(1) 在等比數列 1,2,4,8,16,32,64,……,512，公比為 2，請問 512 是第幾項？

(8) 等比數列 1,-2,4,-8,16,-32,64,⋯,1024 中，首項是 1，末項是 1024，請問此數列共有幾項？

解：小英說：我用對應關係整理數字，發現：

(n)		(a_n)		(a_n)		(a_n)
1	→	1	→	$1\times(-2)^0$	→	$1\times(-2)^{(1-1)}$
2	→	-2	→	$1\times(-2)$	→	$1\times(-2)^{(2-1)}$
3	→	4	→	$1\times(-2)\times(-2)$	→	$1\times(-2)^{(3-1)}$
4	→	-8	→	$1\times(-2)\times(-2)\times(-2)$	→	$1\times(-2)^{(4-1)}$
5	→	16	→	$1\times(-2)\times(-2)\times(-2)\times(-2)$	→	$1\times(-2)^{(5-1)}$
⋯		⋯		⋯		⋯
？	→	1024	→	$1\times(-2)^{10}$	→	$1\times(-2)^{(n-1)}$

從 $1024=1\times(-2)^{(n-1)}$發現$(-2)^{10}=(-2)^{(n-1)}$，

故 1024 是第 11 項，得到數列共有 11 項。

小華說：我利用等比數列公式：$a_n=a_1\times r^{(n-1)}$，得到 $1\times(-2)^{(n-1)}=1024$

$(-2)^{(n-1)}=(-2)^{10}$

$n-1=10$，$n=11$

也就是共有 11 項。

(9) 等比數列 $4,4\times3^1,4\times3^2,4\times3^3,4\times3^4,4\times3^5,\cdots,4\times3^{50}$ 中，首項是 4，末項是 4×3^{50}，請問 4×3^{50} 為第幾項？

解：小英說：我用對應關係整理數字，發現：

(n)		(a_n)		(a_n)
1	→	4×3^0	→	$4\times3^{(1-1)}$
2	→	4×3^1	→	$4\times3^{(2-1)}$
3	→	4×3^2	→	$4\times3^{(3-1)}$
4	→	4×3^3	→	$4\times3^{(4-1)}$
5	→	4×3^4	→	$4\times3^{(5-1)}$
⋯		⋯		⋯
？	→	4×3^{50}	→	$4\times3^{(n-1)}$

從 $4\times3^{50}=4\times3^{(n-1)}$ 發現 $3^{50}=3^{(n-1)}$ ，故 4×3^{50} 是第 51 項。

小華說：我利用等比數列公式：$a_n=a_1\times r^{(n-1)}$，得到 $4\times3^{(n-1)}=4\times3^{50}$

$3^{(n-1)}=3^{50}$

$n-1=50$，$n=51$

也就是第 51 項。

隨堂練習

(1) 等比數列 1,3,9,27,81,⋯,729 中，共有幾項？

(10) 等比數列 $2^3,2^4,2^5,2^6,2^7,\cdots,2^{50}$ 中，首項是 2^3，末項是 2^{50}，請問此數列共有幾項？

解：小英說：我用對應關係整理數字，發現：

(n)	(a_n)	(a_n)	(a_n)	(a_n)
1	$\to 2^3$	$\to 2^3$	$\to 2^3\times2^0$	$\to 2^3\times2^{(1-1)}$
2	$\to 2^4$	$\to 2^3\times2$	$\to 2^3\times2^1$	$\to 2^3\times2^{(2-1)}$
3	$\to 2^5$	$\to 2^3\times2\times2$	$\to 2^3\times2^2$	$\to 2^3\times2^{(3-1)}$
4	$\to 2^6$	$\to 2^3\times2\times2\times2$	$\to 2^3\times2^3$	$\to 2^3\times2^{(4-1)}$
5	$\to 2^7$	$\to 2^3\times2\times2\times2\times2$	$\to 2^3\times2^4$	$\to 2^3\times2^{(5-1)}$
…	…	…	…	…
？	$\to 2^{50}$	$\to 2^3\times\ldots\times2$	$\to 2^3\times2^{47}$	$\to 2^3\times2^{(n-1)}$

從 $2^{50}=2^3\times2^{(n-1)}$ 發現 $2^{(n-1)}=2^{47}$，

故 2^{50} 是第 48 項，得到數列共有 48 項。

小華說：我利用等比數列公式：$a_n=a_1\times r^{(n-1)}$，得到 $2^3\times(2)^{(n-1)}=2^{50}$

$3+(n-1)=50$

$n=48$

也就是共有 48 項。

教育部國民及學前教育署 編

國民中學

學生學習扶助教材 8 年級數學