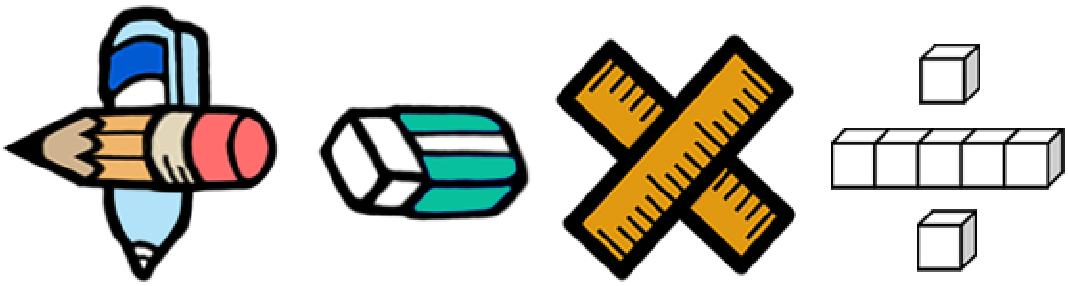
基本學習內容：SC-8-6-1

畢氏定理

班級：__________

姓名：__________

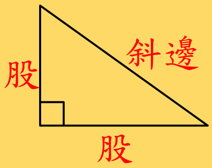


教育部國民及學前教育署 編

中華民國 111 年 8 月

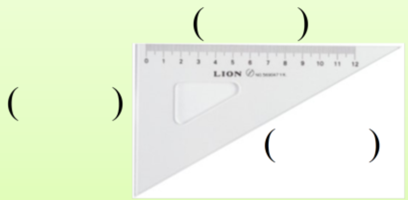
畢氏定理

如右圖，直角三角形的直角所對的邊稱為斜邊，
其餘兩個邊稱為股。



(1) 一般使用的三角板，都是直角三角形，請填入下列三角形的股及斜邊。

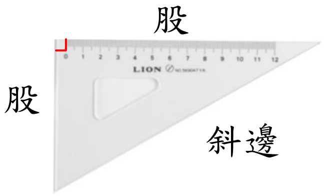
①



②

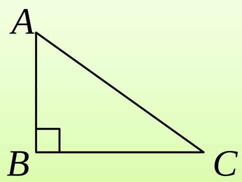
解：直角所對的邊為斜邊，其餘兩個邊為股。如下圖：

①



②

(2) 右圖為直角三角形 ABC，
請問 $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 和 $\overline{AC}$ 何者最長？



解：方法一：用尺量量看，發現 $\overline{AC}$ 最長。

方法二：A 點到 $\overline{BC}$ 的最短距離是 $\overline{AB}$，

也就是 $\overline{BC}$ 上其它點到 A 的距離會大於 $\overline{AB}$ ，即 $\overline{AC} > \overline{AB}$ 。

同理，考慮 C 點到 $\overline{AB}$ 的距離，也可以得到 $\overline{AC} > \overline{BC}$ 。

故 $\overline{AC}$ 最長。

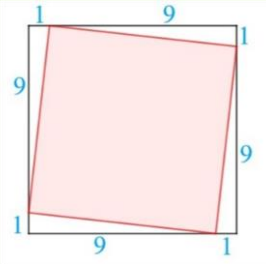
斜邊是直角三角形中最長的邊。

(3) 下圖是邊長為 10 的正方形，我們在四個邊各取一點，

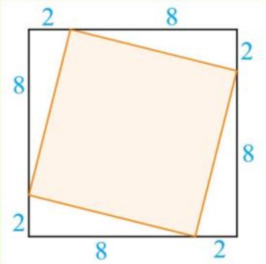
使得每邊都被分成兩段，再把 4 點連起來，圍成一個小正方形。

圖一是將邊長分割成 1 和 9、圖二是將邊長分割成 2 和 8、

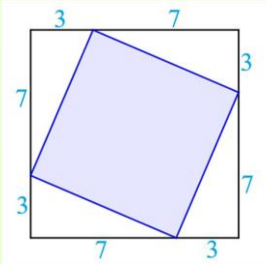
圖三是將邊長分割成 3 和 7、圖四是將邊長分割成 4 和 6。



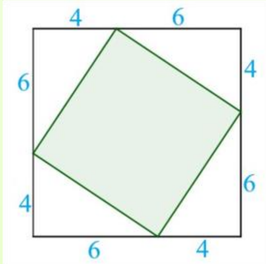
圖一



圖二



圖三



圖四

我們可以利用「正方形面積減去 4 個全等的直角三角形面積」，

算出圖一中小正方形的面積是 82。請完成下表。

	第一段的長度	第二段的長度	小正方形面積
圖一	1	9	82
圖二	2	8	
圖三	3	7	
圖四	4	6	

說說看，你發現了什麼？

解： 小正方形面積為正方形面積減去 4 個全等的直角三角形面積，計算過程如下：

圖一小正方形面積 $=10\times10-1\times9\times\frac{1}{2}\times4=100-18=82$。

圖二小正方形面積 $=10\times10-2\times8\times\frac{1}{2}\times4=100-32=68$。

圖三小正方形面積 $=10\times10-3\times7\times\frac{1}{2}\times4=100-42=58$。

圖四小正方形面積 $=10\times10-4\times6\times\frac{1}{2}\times4=100-48=52$。

(4) 將第(3)題表格的第一段的長度及第二段的長度都平方，如下表：

	第一段長度的平方	第二段長度的平方	小正方形面積
圖一	$1^2=1$	$9^2=81$	82
圖二	$2^2=4$	$8^2=64$	68
圖三	$3^2=9$	$7^2=49$	58
圖四	$4^2=16$	$6^2=36$	52

說說看，這三欄的數字有什麼關係？

解：我們發現圖一：$1+81=82$，圖二：$4+64=68$，

圖三：$9+49=58$，圖四：$16+36=52$，

得知，第一段長度的平方＋第二段長度的平方＝小正方形面積。

即 圖一：$1^2+9^2=82$，圖二：$2^2+8^2=68$，

圖三：$3^2+7^2=58$，圖四：$4^2+6^2=52$。

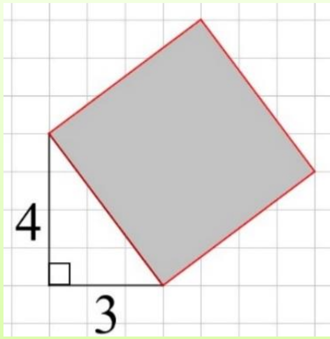
直角三角形兩股平方和等於以斜邊為邊長的正方形面積。

(5)如圖，直角三角形兩股長分別為 3 和 4，

灰色區域是正方形，它的一邊恰好是直角三角形的斜邊。

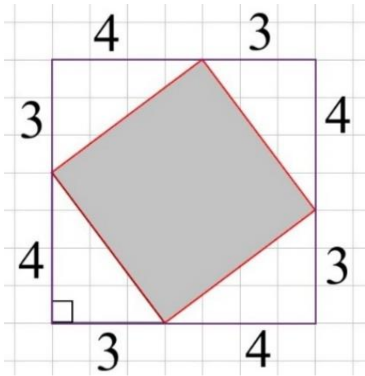
請問 ① 灰色區域的面積＝？

② 直角三角形斜邊長＝？



解：方法一：

如圖，我們知道灰色區域的面積可由向外延伸出的大正方形面積減去 4 個全等的直角三角形面積來計算：



灰色區域的面積$=7\times7-3\times4\times\frac{1}{2}\times4=49-24=25$。

所以直角三角形斜邊長＝5。

方法二：

直角三角形的兩股分別為 3 和 4，

得知，灰色區域的面積$=3^2+4^2=9+16=25$。直角三角形斜邊長＝5。

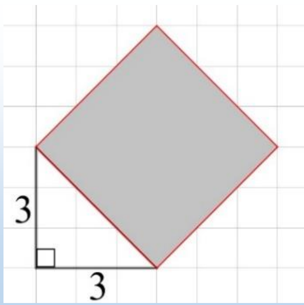
隨堂練習

如圖，直角三角形兩股長皆為 3，

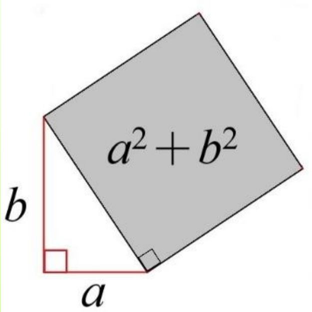
灰色區域是正方形，它的一邊恰好是直角三角形的斜邊

請問 ① 灰色區域的面積＝？

② 直角三角形斜邊長＝？



(6) 如圖，已知直角三角形的兩股分別為分別為 a、b，
以三角形斜邊為邊長的正方形的面積為 a^2+b^2
假設直角三角形的斜邊長為 c，
請寫出三角形邊長 a、b、c 的關係。



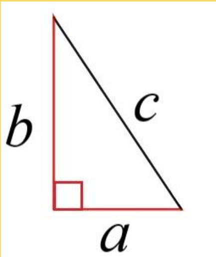
解： 已知直角三角形的兩股為 a、b，
以三角形斜邊為邊長的正方形的面積為 a^2+b^2。
直角三角形的斜邊長 c 就是正方形的邊長，正方形面積為 c^2。
得知 $a^2+b^2=c^2$。
由此可知，
直角三角形的兩股長分為 a、b，斜邊長為 c，
則直角三角形三邊長的關係為 $a^2+b^2=c^2$。

畢氏定理

在直角三角形中，兩股長的平方和等於斜邊長的平方。

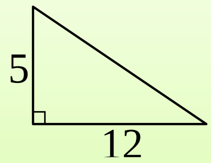
如圖，直角三角形的兩股長分別為 a、b，斜邊長為 c，

則三邊長的關係為 $a^2+b^2=c^2$。



(7) ① 如右圖，直角三角形的兩股長分別為 5、12，

請問斜邊長為何？



② 已知直角三角形的兩股長分別為 5、6，請問斜邊長為何？

解：① 直角三角形的兩股長分別為 $a=5$、$b=12$，

假設斜邊長為 c $(c>0)$，

由畢氏定理 $a^2+b^2=c^2$ 得 $c^2=5^2+12^2=25+144=169$，

所以 $c=\sqrt{169}=13$。

② 直角三角形的兩股長分別為5、6，

假設斜邊長為c $(c>0)$，

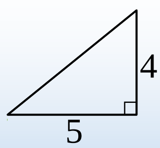
由畢氏定理得 $c^2=5^2+6^2=25+36=61$，

所以$c=\sqrt{61}$。

隨堂練習

(1) 如右圖，直角三角形的兩股長分別為 4、5，

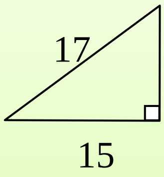
請問斜邊長為何？



(2) 已知直角三角形的兩股長分別為 7、24，請問斜邊長為何？

(8) ① 如右圖，已知直角三角形的一股長為 15、斜邊長為 17，

請問三角形的另一股長為何？



② 已知直角三角形的一股長為 6、斜邊長為 8，

請問三角形的另一股長為何？

解：① 假設直角三角形的兩股長分別為 15 和 x ($x>0$)，斜邊長為 17，

由畢氏定理得 $15^2+x^2=17^2$，

$x^2=17^2-15^2=289-225=64$，

所以 $x=\sqrt{64}=8$。

② 假設直角三角形的兩股長分別為 6 和 y ($y>0$)，斜邊長為 8，

由畢氏定理得 $6^2+y^2=8^2$，

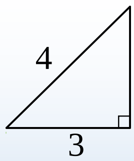
$y^2=8^2-6^2=64-36=28$，

所以 $y=\sqrt{28}=2\sqrt{7}$。

隨堂練習

(1) 如右圖，已知直角三角形的一股長為 3、斜邊長為 4，

請問三角形的另一股長為何？



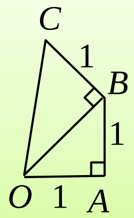
(2) 已知直角三角形的一股長為 3、斜邊長為 5，

請問三角形的另一股長為何？

(9) 如圖，在直角三角形 OAB 與直角三角形 OBC 中，

$\overline{OA}=\overline{AB}=\overline{BC}=1$，

請問① $\overline{OB}=$？ ② $\overline{OC}=$？



解：①在直角三角形 OAB 中，兩股為 $\overline{OA}$、$\overline{AB}$，斜邊為 $\overline{OB}$，

由畢氏定理知，$\overline{OB}^2=1^2+1^2=2$，

因為 $\overline{OB}>0$，所以 $\overline{OB}=\sqrt{2}$。

②在直角三角形 OBC 中，兩股為 $\overline{OB}$、$\overline{BC}$，斜邊為 $\overline{OC}$，

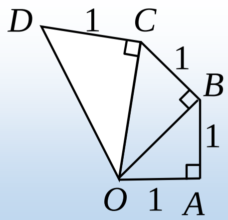
由畢氏定理知，$\overline{OC}^2=(\sqrt{2})^2+1^2=3$，

因為 $\overline{OC}>0$，所以 $\overline{OC}=\sqrt{3}$。

隨堂練習

承上題，以 $\overline{OC}$ 為一股延伸出一直角三角形 OCD，

且 $\overline{CD}=1$，求 $\overline{OD}=$？



重點整理

下表為常見邊長為整數的直角三角形：

	股	股	斜邊
①	3	4	5
②	5	12	13
③	7	24	25
④	8	15	17

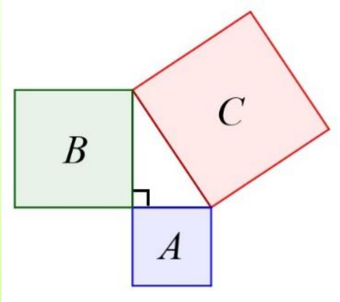
畢氏定理的應用

(10) 如圖，白色區域為直角三角形，

以三角形的邊長所畫出的四邊形皆為正方形，

已知正方形 A 的面積為 5，正方形 B 的面積為 12，

請問正方形 C 的面積為何？



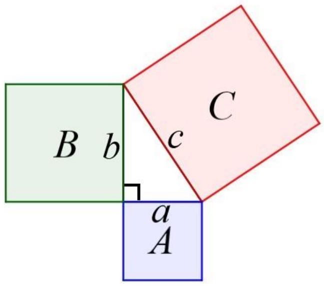
解：假設直角三角形三邊長分別為 a、b、c，如圖，

由畢氏定理知 $a^2+b^2=c^2$，

又正方形 A 的面積為 a^2，

正方形 B 的面積為 b^2，

正方形 C 的面積為 c^2，



得知，正方形 A 的面積＋正方形 B 的面積＝正方形 C 的面積，

所以，正方形 C 的面積＝5＋12＝17。

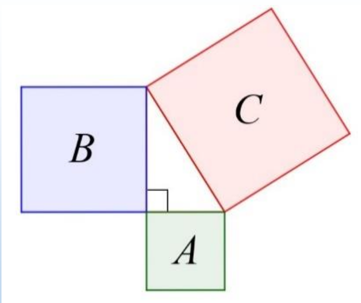
隨堂練習

如圖，白色區域為直角三角形，

以三角形的邊長所畫出的四邊形皆為正方形，

已知正方形 A 的面積為 6，正方形 C 的面積為 21，

請問正方形 B 的面積為何？

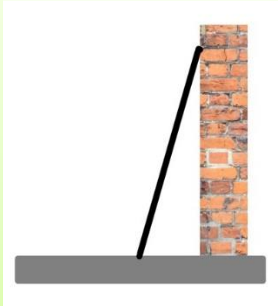


(11) 如圖，有一把梯子放在離牆腳 0.7 公尺處，

梯頂離地面 2.4 公尺，其中牆壁與地面垂直，

使得梯子、地面與牆壁圍成一個直角三角形，

求梯子長多少公尺？



解：設梯子長 x 公尺，

由畢氏定理知，

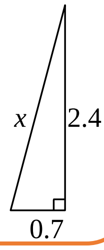
$x^2=(0.7)^2+(2.4)^2=0.49+5.76=6.25$

因為 $x>0$，$x=2.5$，

所以梯子長 2.5 公尺。

梯子、地面與牆壁

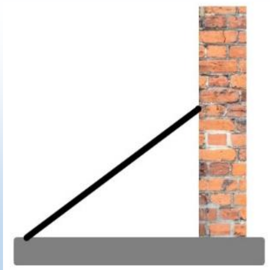
圍成直角三角形



隨堂練習

承上題，若把梯子放在離牆腳 2 公尺處，

則梯頂離地面多少公尺？



重點整理

將直角三角形三邊長同時乘上 k 倍，也會是直角三角形。

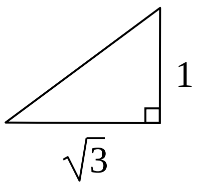
以邊長為「3-4-5」的直角三角形為例，如下表：

	股	股	斜邊
	3	4	5
同時乘 2 倍	6	8	10
同時乘 3 倍	9	12	15
同時乘 0.1 倍	0.3	0.4	0.5

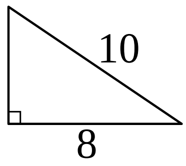
小試身手

1. 請計算下列三角形第三邊的長度：

(1)



(2)



2. 請計算下列三角形第三邊的長度：

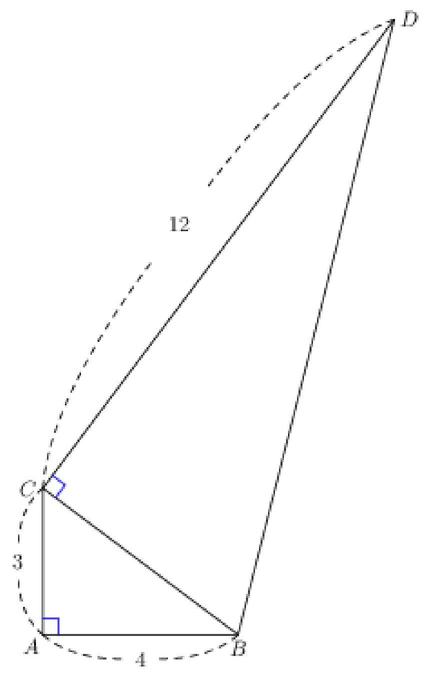
(1) 已知直角三角形的兩股長分別為 7、8，請問斜邊長為何？

(2) 已知直角三角形的一股長為 3、斜邊長為$\sqrt{10}$，請問三角形的另一股長為何？

3. 如圖，在直角三角形 ABC 與直角三角形 BCD 中，

$\overline{AB}=4$，$\overline{AC}=3$，$\overline{CD}=12$，

請問 (1) $\overline{BC}=$？ (2) $\overline{BD}=$？



教育部國民及學前教育署 編

國民中學
學生學習扶助教材 8 年級數學