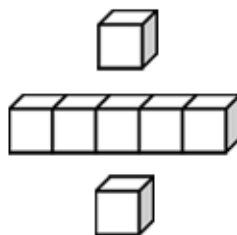


基本學習內容：SC-8-10-1

理解正方形、長方形、菱形及箏形 的對角線性質

班級：_____

姓名：_____

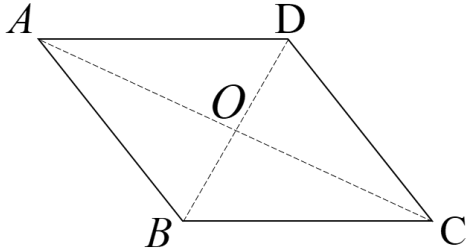




基本學習內容：SC-8-10-1

◎複習活動

如圖，平行四邊形 $ABCD$ 中， \overline{AC} 和 \overline{BD} 交於 O 點，已知 $\overline{AB}=6$ ， $\overline{AD}=7$ ， $\overline{BD}=8$ ，請問 \overline{CD} 、 \overline{BC} 、 \overline{OB} 、 \overline{OD} 分別為何？



解：

①因為平行四邊形 $ABCD$ 的對邊等長，
所以 $\overline{AD} = \overline{BC} = 7$ ， $\overline{AB} = \overline{CD} = 6$ 。

②因為平行四邊形 $ABCD$ 的對角線互相平分， O 為對角線交點，
所以 $\overline{OB} = \overline{OD} = \frac{1}{2}\overline{BD} = 8 \div 2 = 4$

答： $\overline{CD}=6$ 、 $\overline{BC}=7$ 、 $\overline{OB}=4$ 、 $\overline{OD}=4$



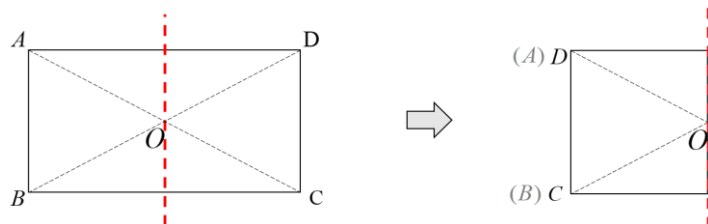
◎活動一：長方形的對角線性質

(1) 拿出附件一，

長方形 $ABCD$ 的兩條對角線 \overline{AC} 與 \overline{BD} 相交於 O 點，請問這兩條對角線是否互相平分？

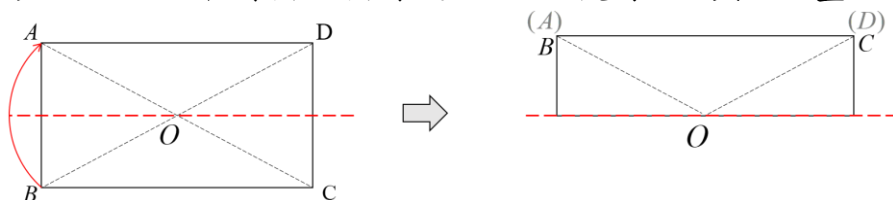
方法一

① 將長方形 $ABCD$ 左右對摺，摺線過 O 點，使得 \overline{CD} 和 \overline{BA} 疊合，如下圖。



發現 \overline{OD} 與 \overline{OA} 疊合、 \overline{OC} 與 \overline{OB} 也疊合。即 $\overline{OA} = \overline{OD}$ 、 $\overline{OB} = \overline{OC}$ 。

② 將長方形 $ABCD$ 上下對摺，摺線過 O 點，使得 \overline{BC} 與 \overline{AD} 疊合，如下圖。



發現 \overline{OB} 與 \overline{OA} 疊合、 \overline{OC} 與 \overline{OD} 也疊合。即 $\overline{OA} = \overline{OB}$ 、 $\overline{OD} = \overline{OC}$ 。

③ 所以 $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{CO} = \overline{OD}$

方法二

長方形 $ABCD$ 四個角都是直角，可得兩組對邊互相平行，所以也是平行四邊形。

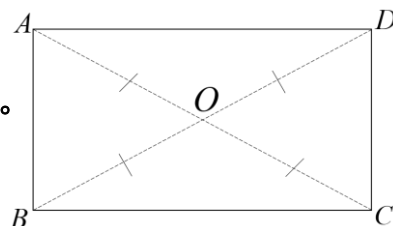
由平行四邊形對角線互相平分性質，可得長方形的對角線也會互相平分。

長方形的對角線交點會將對角線分割成等長的四段，

所以對角線也會等長，

我們稱「長方形兩條對角線等長且互相平分」。

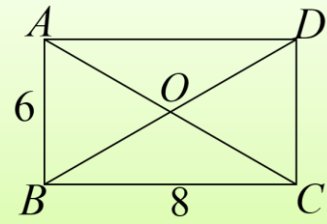
即 $\overline{AC} = \overline{BD}$ 且 $\overline{OA} = \overline{OC} = \overline{OB} = \overline{OD}$ 。





基本學習內容：SC-8-10-1

(2)如圖，四邊形 $ABCD$ 為長方形，
 已知 $\overline{AB}=6$ ， $\overline{BC}=8$ ，
 求 \overline{OA} ， \overline{OB} ， \overline{OC} ， \overline{OD} 的長度分別為何？



解：因為四邊形 $ABCD$ 為長方形， $\overline{AB}=6$ ， $\overline{BC}=8$

$$\text{所以 } \overline{AC} = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10$$

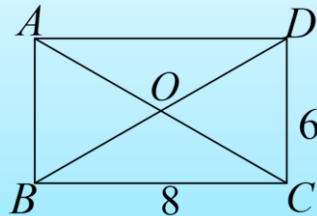
因為長方形的對角線等長且平分，所以 $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = \overline{OD} = 10 \div 2 = 5$

答： $\overline{OA}=5$ ， $\overline{OB}=5$ ， $\overline{OC}=5$ ， $\overline{OD}=5$ 。



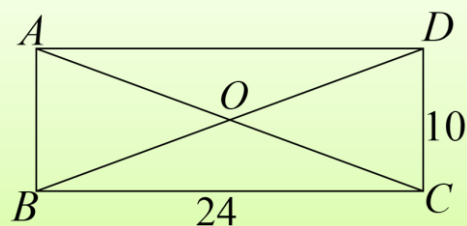
隨堂練習

如圖，四邊形 $ABCD$ 為長方形， $\overline{BC}=8$ ， $\overline{CD}=6$ ，請問 $\triangle BOC$ 的周長為何？





(3)如圖，四邊形 $ABCD$ 為長方形，
已知 $\overline{BC}=24$ ， $\overline{CD}=10$ ，
請問 \overline{AC} 與 \overline{OC} 的長度分別為何？



解：①在 $\triangle ABC$ 中， $\angle BCD=90^\circ$ ，

$$\text{由畢氏定理可得 } \overline{BD} = \sqrt{\overline{BC}^2 + \overline{CD}^2} = \sqrt{24^2 + 10^2} = \sqrt{576 + 100} = \sqrt{676} = 26$$

②因為四邊形 $ABCD$ 為長方形，對角線等長。

$$\text{所以 } \overline{AC} = \overline{BD} = 26$$

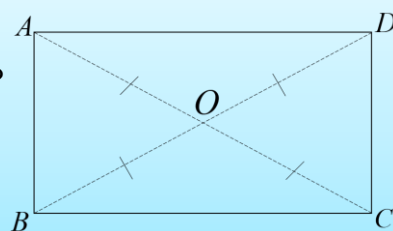
$$\text{所以 } \overline{OC} = \frac{1}{2}\overline{AC} = \frac{1}{2}\overline{BD} = \frac{1}{2} \times 26 = 13$$

答： $\overline{AC}=26$ ， $\overline{OC}=13$ 。



隨堂練習

如圖，長方形 $ABCD$ ，已知 $\overline{AB}=12$ ，
 $\overline{BC}=16$ ，求 \overline{OA} ， \overline{OB} ， \overline{OC} ， \overline{OD} 的長分別為何？



基本學習內容：SC-8-10-1

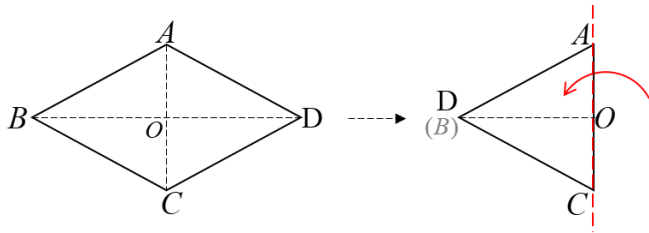
◎活動二：菱形的對角線性質

(4) 拿出附件二，

菱形 $ABCD$ 的兩條對角線 \overline{AC} 與 \overline{BD} 相交於 O 點，請問這兩條對角線是否互相平分，也互相垂直？

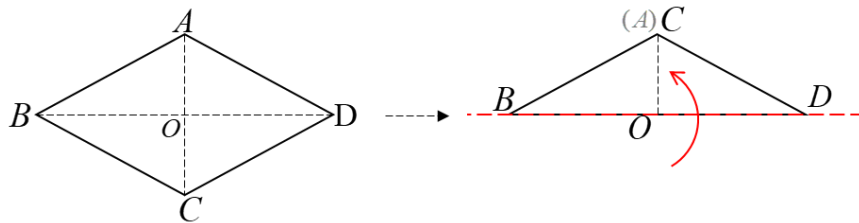
方法一

① 將菱形 $ABCD$ 左右對摺，使得 \overline{AD} 和 \overline{AB} 疊合， \overline{CD} 與 \overline{CB} 疊合，如下圖。



發現對角線 \overline{AC} 是對稱軸， \overline{OD} 與 \overline{OB} 疊合。

② 將菱形 $ABCD$ 上下對摺，使得 \overline{CB} 與 \overline{AB} 疊合， \overline{CD} 與 \overline{AD} 疊合，如下圖。



發現對角線 \overline{BD} 是對稱軸， \overline{OC} 與 \overline{OA} 疊合。

③ 所以對角線 \overline{AC} 和 \overline{BD} 互相垂直，且 $\overline{OA}=\overline{OC}$ ， $\overline{OB}=\overline{OD}$ 。

方法二

因為菱形 $ABCD$ 是對稱圖形，對角線 \overline{AC} 、 \overline{BD} 為其兩條對稱軸。

從對稱軸 \overline{AC} 來看， B 點和 D 點互為對稱點，所以 \overline{AC} 垂直平分 \overline{BD} 。

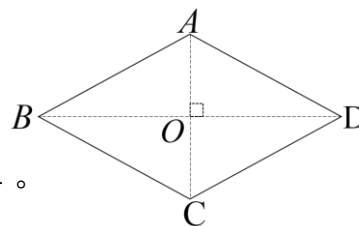
另一方面，從對稱軸 \overline{BD} 來看， A 點和 C 點互為對稱點，所以 \overline{BD} 垂直平分 \overline{AC} 。因此兩條對角線互相垂直平分。

菱形的對角線

① \overline{AC} 垂直平分 \overline{BD}

② \overline{BD} 垂直平分 \overline{AC}

我們稱菱形的兩條對角線互相垂直平分。



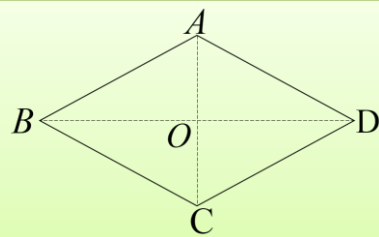


(5)如圖，菱形 $ABCD$ ，已知 $\overline{OA} = 5$ ， $\overline{OB} = 12$ ，

求

① 菱形 $ABCD$ 的周長。

② $\triangle OCD$ 的周長。



解：① 因為菱形的對角線互相垂直，且 $\angle AOB$ 為直角，

利用畢氏定理得 $\overline{AB} = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$

菱形 $ABCD$ 的周長 $= 13 \times 4 = 52$

② 菱形的對角線互相平分， $\overline{OC} = \overline{OA} = 5$ ， $\overline{OD} = \overline{OB} = 12$ ， $\overline{AB} = \overline{CD} = 13$ ，

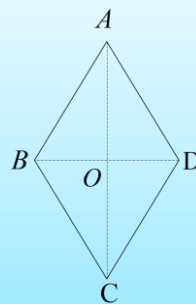
$\triangle OCD$ 的周長 $= 5 + 12 + 13 = 30$ 。



隨堂練習

如圖，菱形 $ABCD$ ，已知 $\overline{OA} = 13$ ， $\overline{AB} = 15$ ，

請問 \overline{OA} 、 \overline{OB} 、 \overline{OC} 、 \overline{OD} 分別為何？



◎活動三：正方形的對角線性質

(6) 拿出附件三，

正方形 $ABCD$ 的兩條對角線 \overline{AC} 與 \overline{BD} 相交於 O 點，請問這兩條對角線是否互相垂直平分？

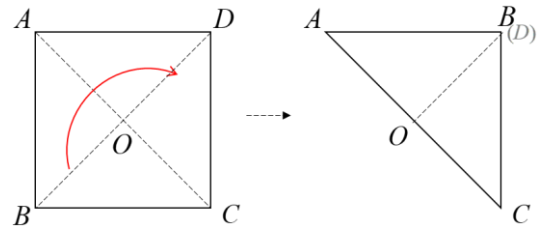
說明：

方法一

1. 將正方形 $ABCD$ ，沿 \overline{AC} 對摺，如圖。

發現對角線 \overline{AC} 是對稱軸、 \overline{AB} 和 \overline{AD} 疊合、
 \overline{CB} 和 \overline{CD} 疊合、 \overline{OB} 與 \overline{OD} 也疊合。

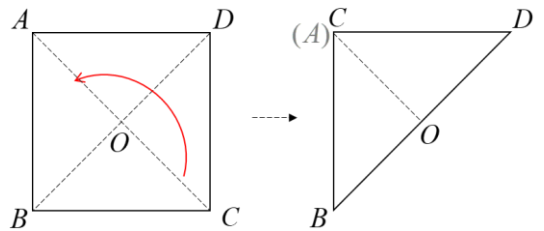
所以 \overline{AC} 垂直平分 \overline{BD} 。



2. 將正方形 $ABCD$ ，沿 \overline{BD} 對摺，如圖。

發現對角線 \overline{BD} 是對稱軸、 \overline{CB} 和 \overline{AB} 疊合、
 \overline{CD} 和 \overline{AD} 疊合、 \overline{OC} 與 \overline{OA} 也疊合。

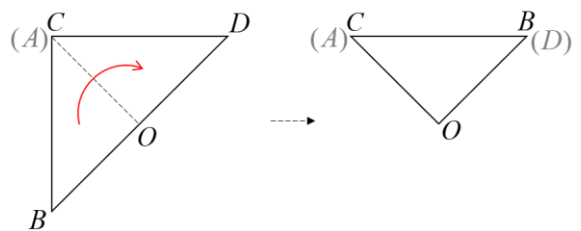
所以 \overline{BD} 垂直平分 \overline{AC} 。



3. 將正方形 $ABCD$ 再對摺如圖，

發現 $\triangle AOD$ 和 $\triangle AOB$ 和
 $\triangle BOC$ 和 $\triangle COD$ 皆重合。
 $\overline{OB} = \overline{OD}$ ， $\overline{OA} = \overline{OC}$ 。

所以正方形的對角線 \overline{AC} 與 \overline{BD} 等長且互相垂直平分。



方法二

正方形四邊相等

正方形是菱形的一種，所以對角線互相垂直平分；

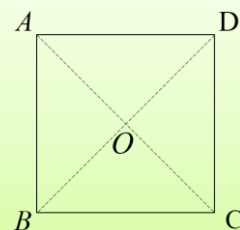
正方形是長方形的一種，所以對角線等長且互相平分；

重點整理

我們稱正方形的兩條對角線等長且互相垂直平分。



(7)如圖，正方形 $ABCD$ ，已知 $\overline{AB} = \sqrt{2}$ ，
請問 \overline{AO} 、 \overline{BO} 、 \overline{CO} 、 \overline{DO} 的長分別為何？



解：因為正方形的四邊等長，所以 $\overline{AB} = \overline{BC} = \sqrt{2}$ ，

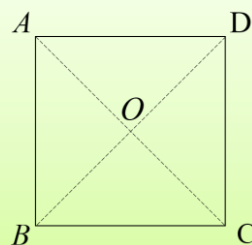
$$\overline{AC} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{2+2} = \sqrt{4} = 2，$$

因為正方形的對角線互相垂直且平分，

$$\text{所以 } \overline{AO} = \overline{BO} = \overline{CO} = \overline{DO} = \frac{1}{2} \times \overline{AC} = \frac{1}{2} \times 2 = 1$$

答： $\overline{AO}=1$ ， $\overline{BO}=1$ ， $\overline{CO}=1$ ， $\overline{DO}=1$ 。

(8)如圖， O 為正方形 $ABCD$ 的對角線交點，
已知 $\overline{OB}=3$ ，請問正方形 $ABCD$ 面積為多少？



解：方法一

因為正方形 $ABCD$ 的對角線等長且互相垂直平分，所以 $\overline{OB} = \overline{OC} = 3$

$$\text{由畢氏定理可知， } \overline{BC} = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$\text{正方形 } ABCD \text{ 的面積} = 3\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} = 18$$

方法二

因為正方形 $ABCD$ 的對角線互相垂直平分且將面積四等分，

$$\text{所以 } \overline{OB} = \overline{OC} = 3，\triangle BOC \text{ 的面積} = \frac{1}{2} \times 3 \times 3$$

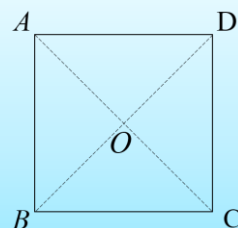
$$\text{正方形 } ABCD \text{ 的面積} = 4 \times \triangle BOC = 4 \times \left(\frac{1}{2} \times 3 \times 3\right) = 18(\text{平方單位})$$

答：面積=18。



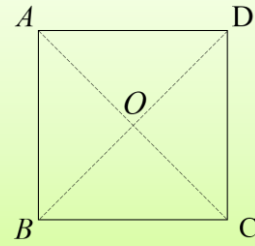
隨堂練習

如圖，四邊形 $ABCD$ 為正方形， $\overline{AC}=14$ ，
求 \overline{AO} ， \overline{BO} ， \overline{CO} ， \overline{DO} 。





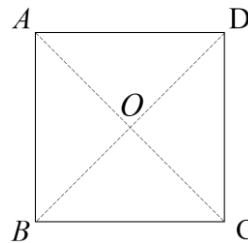
- (9)如圖， O 為正方形 $ABCD$ 的對角線交點，
且 $\overline{AC} = \overline{BD}$ ，
試說明 $\overline{AC} \perp \overline{BD}$ 。



說明：

- ①如圖，正方形 $ABCD$ 中，對角線 \overline{AC} 與 \overline{BD} 相交於 O 點。
因為 $ABCD$ 為正方形，所以四邊等長
所以 $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{AD}$ ， $\angle ABC = \angle BCD = \angle CDA = \angle DAB = 90^\circ$ 。
- ②因為 $ABCD$ 為正方形，所以對角線互相平分
所以 $\overline{OA} = \overline{OC} = \frac{1}{2}\overline{AC} = \frac{1}{2}\overline{BD} = \overline{OB} = \overline{OD}$
- ③在 $\triangle AOB$ 與 $\triangle AOD$ 中，
 $\overline{AB} = \overline{AD}$ ，
 $\overline{OB} = \overline{OD}$
 $\overline{AO} = \overline{AO}$
所以 $\triangle AOB \cong \triangle AOD$ (SSS)
得 $\angle AOB = \angle AOD$ ，又因為 $\angle AOB + \angle AOD = 180^\circ$
所以 $\angle AOB = \angle AOD = 180^\circ \div 2 = 90^\circ$
所以 $\overline{AC} \perp \overline{BD}$ 。

由上述說明可知，
正方形的對角線等長且互相垂直平分。
即 $\overline{AC} = \overline{BD}$ 、
 $\overline{OA} = \overline{OC} = \overline{OB} = \overline{OD}$ 且 $\overline{AC} \perp \overline{BD}$ 。



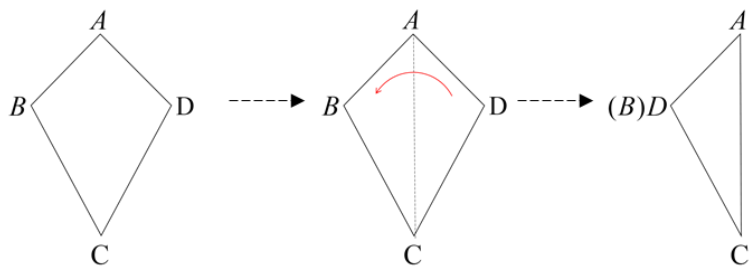


◎複習活動：箏形

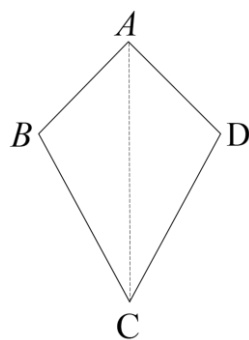
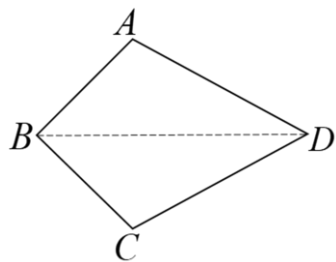
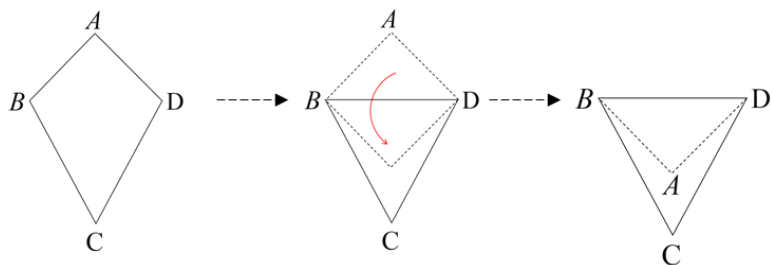
(10) 拿出附件四，

摺摺看，箏形是不是線對稱圖形？

① 將箏形左右對摺，發現對角線 \overline{AC} 是對稱軸，而且 B 和 D 是對稱點。



② 將箏形上下對摺，發現另一條對角線 \overline{BD} 不是對稱軸。



箏形恰有一條對角線是對稱軸，所以箏形式線對稱圖形。



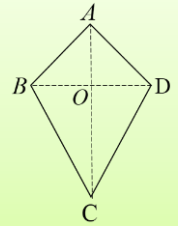


◎活動四：箏形的對角線性質

(11)如圖，箏形 $ABCD$ 的兩條對角線 \overline{AC} 與 \overline{BD} 相交於 O 點，

請問

- ① \overline{AC} 與 \overline{BD} 是否互相垂直平分？
- ② \overline{OB} 和 \overline{OD} 是否等長？

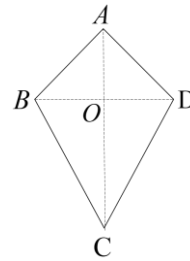


解：

因為對角線 \overline{AC} 為對稱軸， B 和 D 為對稱點。

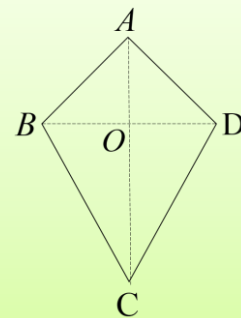
所以 \overline{AC} 垂直對角線 \overline{BD} ，且 $\overline{OB} = \overline{OD}$ 。

箏形恰有一條對角線垂直平分另一條對角線，
例如 $\overline{OB} = \overline{OD}$ 且 $\overline{AC} \perp \overline{BD}$ 。





(12)如圖，箏形 $ABCD$ ，已知 $\overline{AO}=5$ ， $\overline{BO}=7$ ， $\overline{CO}=13$ ，
求箏形 $ABCD$ 的周長。



解：

因為 $\overline{AO}=5$ ， $\overline{BO}=7$ ， $\overline{CO}=13$

因為箏形的對角線互相垂直，

所以 $\overline{AB}=\sqrt{5^2+7^2}=\sqrt{74}$ ， $\overline{BC}=\sqrt{7^2+13^2}=\sqrt{218}$ 。

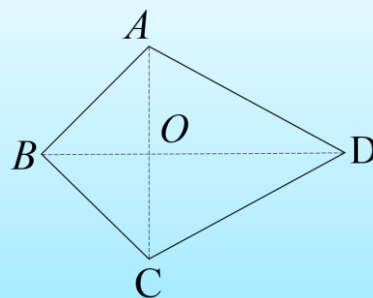
箏形 $ABCD$ 的周長 $=2 \times (\overline{AB} + \overline{BC}) = 2 \times (\sqrt{74} + \sqrt{218}) = 2\sqrt{74} + 2\sqrt{218}$

答： $2\sqrt{74} + 2\sqrt{218}$



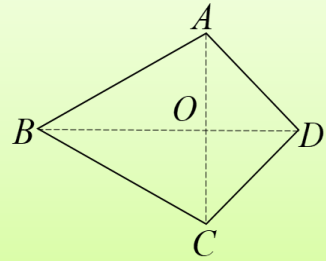
隨堂練習

如圖，箏形 $ABCD$ ，已知 $\overline{AO}=6$ ，
 $\overline{AB}=10$ ， $\overline{DO}=13$ ，
求箏形 $ABCD$ 的周長。





(13)如圖，箏形 $ABCD$ ，已知 $\overline{AO}=5$ ， $\overline{AO}=5$ ， $\overline{AO}=5$ ，
請問箏形 $ABCD$ 的面積為何？



解：

因為 $\overline{AO}=6$ ， $\overline{DO}=7$ ， $\overline{BO}=13$ 且箏形的對角線互相垂直，

$$\text{所以 } \triangle ABD \text{ 的面積} = \frac{1}{2} \times \overline{BD} \times \overline{AO} = \frac{1}{2} \times (\overline{BO} + \overline{DO}) \times \overline{AO} = \frac{1}{2} \times (13+7) \times 6 = 60$$

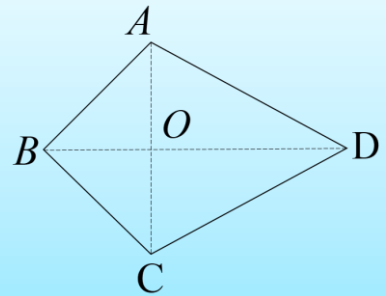
箏形 $ABCD$ 的面積 $= 2 \times 60 = 120$ (平方單位)

答：120(平方單位)



隨堂練習

如圖，箏形 $ABCD$ ，已知 $\overline{AO}=6$ ， $\overline{AO}=6$ ，
 $\overline{AB}=10$ ，求箏形 $ABCD$ 的面積。



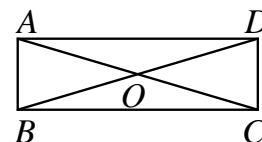


小試身手

(1) 如圖，長方形 $ABCD$ 中， $\overline{AD} = 24$ ， $\overline{AB} = 7$ ，則：

① $\overline{AO} + \overline{OD} = ?$

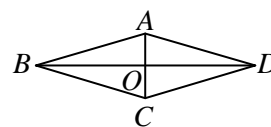
② $\triangle AOD$ 的面積 = ?



(2) 菱形 $ABCD$ 的對角線相交於 O 點，且 $\overline{AC} = 14$ ，

$\overline{BD} = 48$ ，

求 $\triangle ABD$ 的周長與面積。

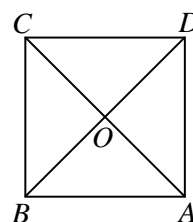


(3) 如圖， O 為正方形 $ABCD$ 的對角線的交點，

且 $\overline{AC} = 8$ ，則：

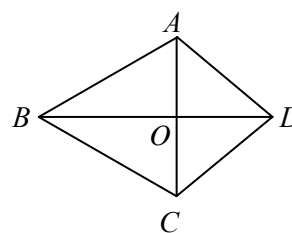
① 正方形 $ABCD$ 的周長為？

② 正方形 $ABCD$ 的面積 = ?



(4) 如圖， $ABCD$ 為箏形，其中 $\overline{AB} = \overline{BC}$ ， $\overline{AD} = \overline{CD}$ 。

若 $\overline{AB} = \sqrt{13}$ ， $\overline{OB} = 3$ ，則 $\overline{OC} = ?$





教育部國民及學前教育署 編

國民中學

學生學習扶助教材

8 年級數學

