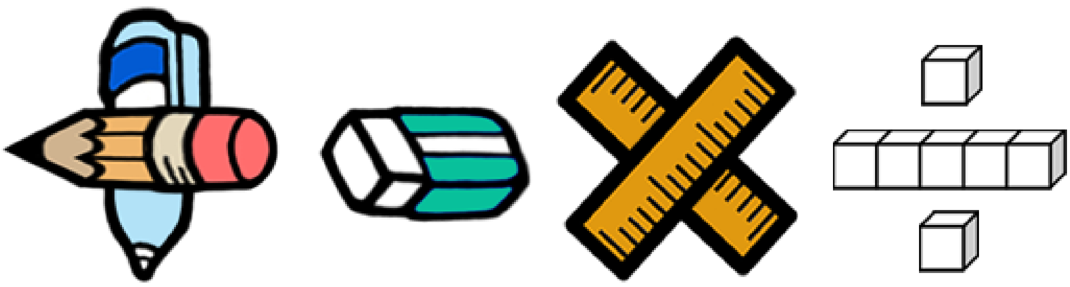
基本學習內容：SC-8-11-1

梯形兩腰中點的連線段長等於兩底長和的一半，且平行於上下底

班級：__________

姓名：__________

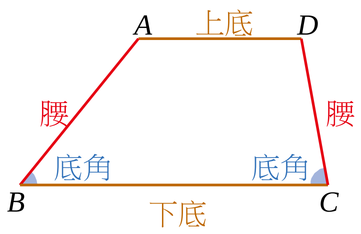


教育部國民及學前教育署 編

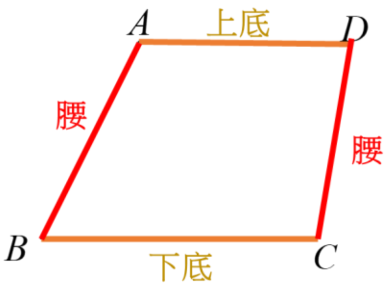
中華民國 111 年 8 月

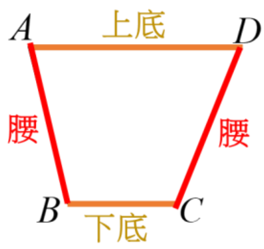
複習梯形

國小時曾學過，一組對邊平行，另一組對邊不平行的四邊形稱為梯形。



如圖，此時平行的兩邊分別稱為上底與下底($\overline{AD}$ 為上底，$\overline{BC}$ 為下底)，不平行的兩邊稱為腰($\overline{AB}$、$\overline{CD}$)，而腰與下底形成的夾角稱為底角。

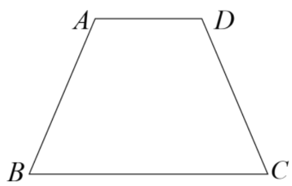




複習等腰梯形

在梯形中，若其兩腰相等，就稱為等腰梯形。

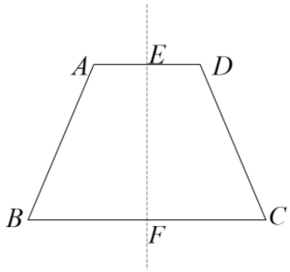
等腰梯形$ABCD$是否為線對稱圖形?如果是，畫出它的對稱軸。



答:

找到$\overline{AD}$ 中點E，$\overline{BC}$中點F，連$\overline{EF}$，

$\overline{EF}$為梯形$ABCD$的對稱軸。



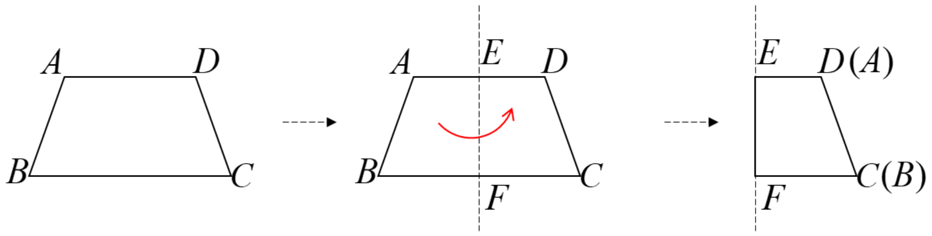
(1)在等腰梯形 $ABCD$ 中，$\overline{AD} \parallel \overline{BC}$，$\overline{AB}=\overline{CD}$。

試說明 $\angle B=\angle C$。

解:

方法一:等腰梯形是線對稱圖形，

取上底的中點是 E，下底的中點是 F，直線 $\overline{EF}$ 就是對稱軸。



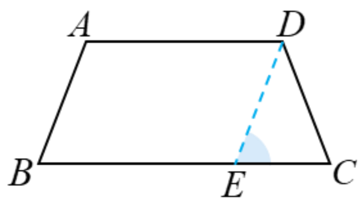
因為 $\angle B$ 和 $\angle C$ 是對稱角，所以兩底角相等。

方法二:如右圖，等腰梯形 $ABCD$ 中，$\overline{AD} \parallel \overline{BC}$，$\overline{AB}=\overline{CD}$。

在 $\overline{BC}$ 作上取一 E 使得 $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$，

則 $ABED$ 是平行四邊形，且 $\overline{AB}=\overline{DE}$

又 $\overline{AB}=\overline{DC}$，所以 $\overline{DE}=\overline{DC}$



所以△DEC 為等腰三角形，

由△DEC 為等腰三角形

得 $\angle C=\angle DEC$

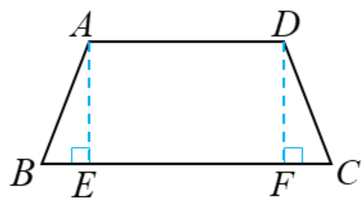
又 $\angle DEC=\angle B$ (同位角相等)，

故 $\angle C=\angle DEC=\angle B$

所以 $\angle B=\angle C$

方法三:如右圖，等腰梯形 $ABCD$ 中， $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$，$\overline{AB}=\overline{CD}$。

先從 A、D 兩點分別作底邊的高， 設垂足為 E、F。



由於平行線的距離處處相等， 所以 $\overline{AE}=\overline{DF}$。

在△ABE 和△DCF 中，

因為 $\overline{AB}=\overline{CD}$、$\overline{AE}=\overline{DF}$、$\angle AEB=\angle DFC=90°$，

所以△ABE≅△DCF(RHS 全等性質)，

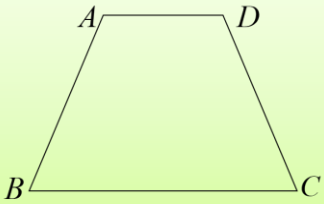
得 $\angle B=\angle C$，且 $\overline{BE}=\overline{CF}$。

重點整理

等腰梯形的兩底角相等。

(2)在等腰梯形 $ABCD$ 中，$\overline{AD}$ // $\overline{BC}$，$\overline{AB}=\overline{CD}$。

若 $\angle C=50°$，則 $\angle A$、$\angle B$、$\angle D$ 的角度分別是多少?



解: 因為 $ABCD$ 是等腰梯形，$\therefore \angle B=\angle C=50°$

又因為 $\overline{AD}$ // $\overline{BC}$，

所以 $\angle C=50°$，則 $\angle D=180°-\angle C=180°-50°=130°$(同側內角互補)

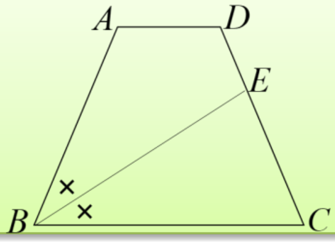
所以 $\angle B=50°$，則 $\angle A=180°-\angle B=180°-50°=130°$(同側內角互補)

答: $\angle A=130°$，$\angle B=50°$，$\angle D=130°$

(3)如圖，$\overline{AD}$ // $\overline{BC}$，$\overline{AB}=\overline{CD}$，

若 $\overline{BE}$ 為 $\angle ABC$ 的角平分線，且 $\angle A=100°$，

求 $\angle C$ 及 $\angle BEC$?



解: $\angle C=\angle ADC=180°-\angle A=80°$

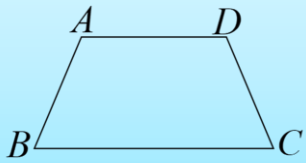
$\angle EBC=\frac{1}{2}\angle ADC=\frac{1}{2}\times 80°=40°$

$\angle BEC=180°-\angle EBC-\angle C=180°-40°-80°=60°$

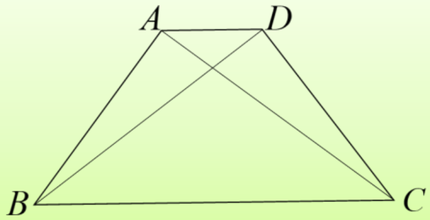
答：$\angle C=80°$，$\angle BEC=60°$

隨堂練習

如圖，等腰梯形 ABCD 中，已知 $\angle A+\angle D=250°$，求 $\angle B$ 的度數。



(4)如圖，等腰梯形 $ABCD$ 中，$\overline{AD} \,//\, \overline{BC}$，
$\overline{AB}=\overline{CD}$，試說明$\overline{AC}=\overline{DB}$。



說明: 在$\triangle ABC$ 和$\triangle DCB$ 中，

因為 $\overline{AB}=\overline{CD}$、$\angle ABC=\angle DCB$、$\overline{BC}=\overline{BC}$

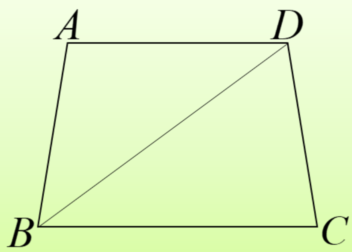
所以 $\triangle ABC \cong \triangle DCB$ (SAS 全等性質)，

故$\overline{AC}=\overline{DB}$。

重點整理

等腰梯形的對角線等長。

(5)如圖，等腰梯形 $ABCD$ 中，$\overline{AD}//\overline{BC}$，
$\overline{BD}=10$，$\overline{CD}=7$，$\overline{BC}=9$，求另一條對角線$\overline{AC}=?$



解:

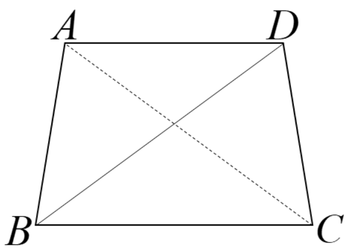
方法一: 連接$\overline{AC}$ ，在$\triangle ABC$ 和$\triangle DCB$ 中，

因為 $ABCD$ 為等腰梯形，所以 $\overline{AB}=\overline{CD}=7$

又$\angle ABC=\angle DCB$、$\overline{BC}=\overline{BC}$

所以 $\triangle ABC \cong \triangle DCB$ (SAS 全等性質)，

故 $\overline{AC}=\overline{DB}=10$。



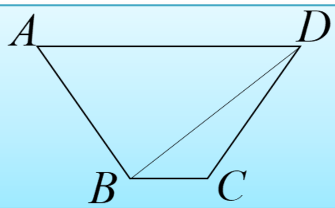
方法二: 因為等腰梯形的兩條對角線等長

所以$\overline{AC}=\overline{DB}=10$

答: $\overline{AC}=10$

隨堂練習

等腰梯形 $ABCD$ 中，$\overline{AD} \,//\, \overline{BC}$，
$\overline{BD}=11$，$\overline{CD}=8$，$\overline{BC}=4$，求另一條對角線$\overline{AC}=?$

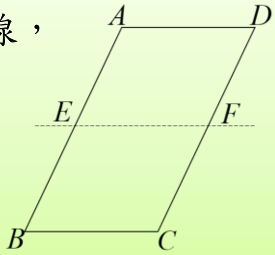


◎梯形兩腰中點連線段的性質

(1)將平行四邊形 $ABCD$ 中，$\overline{AB}$ 的中點 E 和 $\overline{CD}$ 的中點 F 的連線，說說看

① $\overline{EF}$ 與 $\overline{AD}$ 會平行嗎？ $\overline{EF}=\overline{AD}$ 嗎？

② $\overline{EF}$ 與 $\overline{BC}$ 會平行嗎？ $\overline{EF}=\overline{BC}$ 嗎？



解：

因為 $ABCD$ 為平行四邊形，$\therefore \overline{AB}//\overline{CD}$ 、$\overline{AB}=\overline{CD}$

連 $\overline{AF}$ ，兩條平行線 $\overline{AB}$ 和 $\overline{CD}$ 被 $\overline{AF}$ 所截

所以 $\angle EAF=\angle DFA$ (內錯角相等)

因為 E 和 F 為 $\overline{AB}$ 和 $\overline{CD}$ 的中點

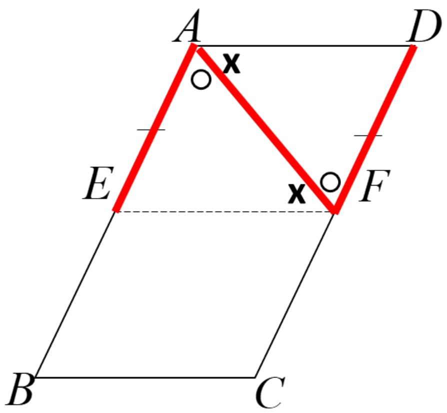
所以 $\overline{AE}=\dfrac{1}{2}\overline{AB}=\dfrac{1}{2}\overline{CD}=\overline{FD}$

在 $\triangle EAF$ 和 $\triangle DFA$ 中

$\overline{EA}=\overline{DF}$ 、$\angle EAF=\angle DFA$、$\overline{AF}=\overline{AF}$

$\triangle EAF \cong \triangle DFA$(SAS)

所以 $\overline{AD}=\overline{EF}$ 、$EFA=\angle DAF$



因為 $ABCD$ 為平行四邊形，

所以 $\overline{AD}//\overline{BC}$ 且 $\overline{AD}//\overline{EF}$ ，所以 $\overline{EF}//\overline{BC}$

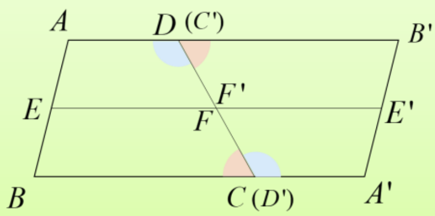
$\overline{AD}=\overline{BC}$ 且 $\overline{AD}=\overline{EF}$ ，所以 $\overline{EF}=\overline{BC}$

答:

平行四邊形一組對邊中點連線會和另一組對邊平行且等長。

(2)如圖，有兩個全等的梯形 $ABCD$ 和 $A'B'C'D'$，其中 E 為 $\overline{AB}$ 的中點，F 為 $\overline{CD}$ 的中點，E'為 $\overline{A'B'}$ 的中點，F'為 $\overline{C'D'}$ 的中點，將兩個全等梯形 $ABCD$ 和 $A'B'C'D'$ 拼成一個平行四邊形，

說說看 E、F'、E'三點會共線嗎?



解:

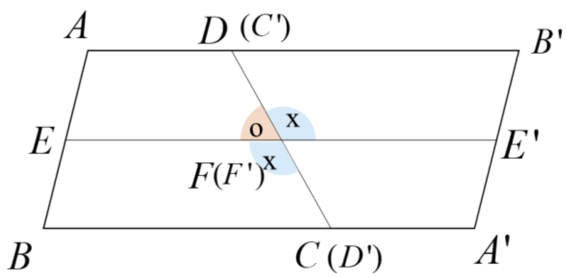
①因為∠EFC 和∠$E'F'C'$為對應角

所以∠EFC=∠$E'F'C'$

又∠DFE+∠EFC=180°

所以∠DFE+∠$E'F'C'$=180°

所以 E、F'、E'三點會共線



②從平行四邊形 $ABA'B'$

$\overline{EE'}$ 為左右兩邊的中點連線

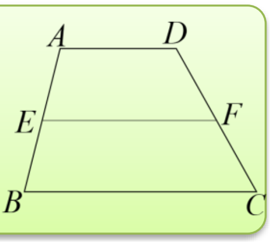
$\overline{EE'}$ 與上下兩邊平行

因此 $\overline{EF}$ 和梯形的上底 $\overline{AD}$ 與下底 $\overline{BC}$ 會平行。

(3)如圖，梯形 $ABCD$ 中， E 為 $\overline{AB}$ 中點，F 為 $\overline{CD}$ 中點。

① $\overline{EF}$ 會與上底平行嗎?$\overline{EF}$ 會與上底平行嗎?

② $\overline{EF}$ 和上底 $\overline{AD}$ 與下底 $\overline{BC}$ 之和 有什麼關係嗎?

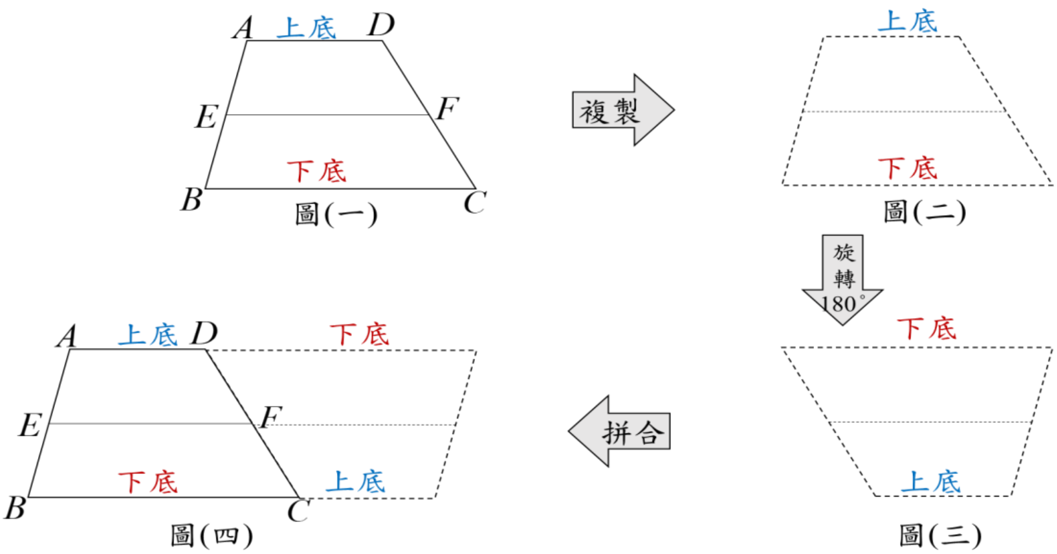


解:

下圖(一)是一個梯形 $ABCD$。複製一樣的圖形，如圖(二)。

將圖(二)的圖形旋轉 180°，如圖(三)。

將圖(三)的圖形移動且與圖(一)拼在一起，如圖(四)。

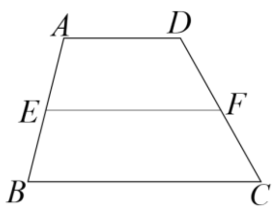


看著圖四，我發現 $\overline{EF}$ 都會和上底 $\overline{AD}$ 也會和下底 $\overline{BC}$ 平行，也發現，$\overline{EF}$ 的兩倍，也會和上底和下底的長度和一樣。

梯形 $ABCD$ 中，E 為 $\overline{AB}$ 中點，F 為 $\overline{CD}$ 中點，

(1) $\overline{EF} // \overline{AD} // \overline{BC}$

(2) $\overline{EF}=\dfrac{\overline{AD}+\overline{BC}}{2}$

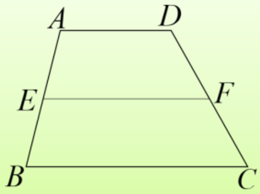


重點整理

1.梯形的兩腰中點連線會平行於上底和下底。

2.梯形的兩腰中點連線段長等於兩底和的一半。

(4) 如右圖，梯形 $ABCD$ 中，$\overline{AD}//\overline{BC}$，若 $\overline{AD}=5$ 、$\overline{BC}=9$，則 $\overline{EF}$ 為多少？



解:

因為梯形的兩腰中點連線段長等於兩底和的一半，

所以 $\overline{EF}=\dfrac{1}{2}(5+9)=7$ 。

(5) 梯形$ABCD$中，$\overline{AD}//\overline{EF}$，若兩腰中點連線段$\overline{EF}$長為6，且梯形$ABCD$的高為10，則梯形$ABCD$面積為多少？

解:

$\because$梯形的兩腰中點連線段長$=\dfrac{1}{2}(\overline{AD}+\overline{BC})$

$\therefore$梯形 $ABCD$ 的面積$=\dfrac{1}{2}(\overline{AD}+\overline{BC})\times$**高**

＝兩腰中點連線段長×高

因此，梯形 $ABCD$ 面積$=6\times10=60$

隨堂練習

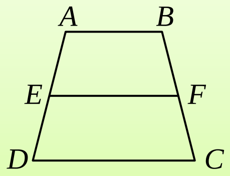
(1)梯形 $ABCD$ 中，$\overline{AD}//\overline{EF}$，若 $\overline{AD}=4$ 、$\overline{BC}=10$，則 $\overline{EF}$ 為多少？

(2)梯形 $ABCD$ 中，$\overline{AD}//\overline{EF}$，若兩腰中點連線段$\overline{EF}$長為 7，且梯形 $ABCD$ 的高為 8，則梯形 $ABCD$ 面積為多少？

(6) 如圖，梯形 $ABCD$ 中，$\overline{AB} // \overline{CD}$，$\overline{EF}$ 為梯形兩腰中點的連線段，若 $\overline{AB}=9$，$\overline{EF}=12$，梯形的高為 12，則：

① $\overline{CD}=$__________。

② 梯形 $ABCD$ 的面積為__________。



解：

①$\because$梯形的兩腰中點連線段長 $\overline{EF}=\frac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{CD})$

$\therefore 12=\frac{1}{2}(9+\overline{CD})$

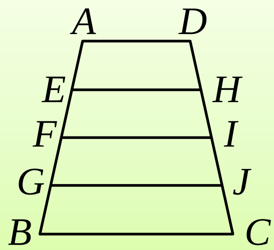
$\therefore \overline{CD}=15$

②梯形 $ABCD$ 的面積＝兩腰中點連線段長×高

$=\overline{EF}\times$梯形的高

$=12\times12=144$

(7) 梯形 $ABCD$ 中，$\overline{AD} // \overline{BC}$，$E$、$F$、$G$ 將 $\overline{AB}$ 四等分，H、I、J 將 $\overline{CD}$ 四等分，且 $\overline{AD}=10$，$\overline{BC}=18$，則 $\overline{EH}$、$\overline{FI}$、$\overline{GJ}$ 分別是多少?



解：

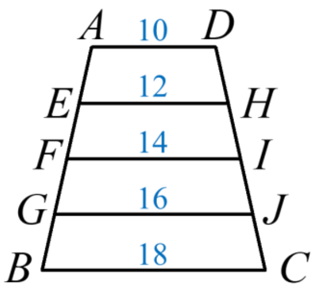
$\because$ E、F、G 將 $\overline{AB}$ 四等分，H、I、J 將 $\overline{CD}$ 四等分

$\therefore \overline{AE}=\overline{EF}=\overline{FG}=\overline{GB}$，$\overline{DH}=\overline{HI}=\overline{IJ}=\overline{JC}$

$\overline{FI}=\frac{1}{2}(\overline{AD}+\overline{BC})=\frac{1}{2}\times(10+18)=14(cm)$

$\overline{EH}=\frac{1}{2}(\overline{AD}+\overline{FI})=\frac{1}{2}\times(10+14)=12(cm)$

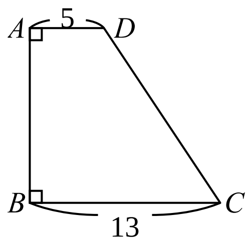
$\overline{GJ}=\frac{1}{2}(\overline{FI}+\overline{BC})=\frac{1}{2}\times(14+18)=16(cm)$



答：$\overline{EH}=12$、$\overline{FI}=14$、$\overline{GJ}=16$

小試身手

1. 如圖，在梯形 $ABCD$ 中，$\overline{AD}//\overline{BC}$，$\angle A=90°$，$\overline{AD}=5$，$\overline{BC}=13$。若作 $\overline{CD}$ 的中垂線恰可通過 B 點，則 $\overline{AB}=$？



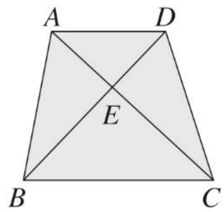
2. 如右圖，$ABCD$ 為梯形，$\overline{AD}//\overline{BC}$，且 $\overline{BC}>\overline{AD}$，兩對角線相交於 E，請問下列哪一個敘述錯誤？

(A) $\triangle ABD$ 的面積＝$\triangle ACD$ 的面積

(B) $\triangle ABC$ 的面積＝$\triangle BCD$ 的面積

(C) $\triangle ABE$ 的面積＞$\triangle CDE$ 的面積

(D) $\triangle ABD$ 的面積＜$\triangle ABC$ 的面積



教育部國民及學前教育署 編

國民中學 學生學習扶助教材 8 年級數學