

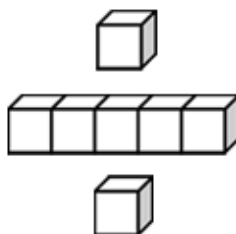
# 基本學習內容：AC-8-2-1 AC-8-3-1

理解 $x$ 多項式的定義及相關名詞

整係數多項式的加、減法運算

班級：\_\_\_\_\_

姓名：\_\_\_\_\_





基本學習內容：AC-8-2-1、AC-8-3-1

## ◎認識多項式

多項式的意義與  $x^0 = 1$ 

(1) 3825 由 3 個千和 8 個百和 2 個十和 5 個一所加起來，  
可以用下表記錄下來：

1000	100	10	1
3	8	2	5

也可以把 1000、100、10、1 用 10 的次方記錄下來，

$10^3$	$10^2$	$10^1$	$10^0$
3	8	2	5

也可以記錄成  $3 \times 10^3 + 8 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 5 \times 10^0$ ，

請把下表紀錄用第三種方式記錄下來

$10^3$	$10^2$	$10^1$	$10^0$
7	48	52	3

解：

$10^3$	$10^2$	$10^1$	$10^0$
3	8	2	5

可以記錄成  $3 \times 10^3 + 8 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 5 \times 10^0$

$10^3$	$10^2$	$10^1$	$10^0$
7	48	52	3

可以記錄成  $7 \times 10^3 + 48 \times 10^2 + 52 \times 10^1 + 3 \times 10^0$



(2)

$10^3$	$10^2$	$10^1$	$10^0$
23	8	12	-5

可以記錄成  $23 \times 10^3 + 8 \times 10^2 + 12 \times 10^1 + (-5) \times 10^0$ 。

請把下表紀錄用一樣的方式記錄下來

$x^3$	$x^2$	$x^1$	$x^0$
15	7	18	-9

解：

$10^3$	$10^2$	$10^1$	$10^0$
23	8	12	-5

可以記錄成  $23 \times 10^3 + 8 \times 10^2 + 12 \times 10^1 + (-5) \times 10^0$

$x^3$	$x^2$	$x^1$	$x^0$
15	7	18	-9

15 個  $x^3$  和 7 個  $x^2$  和 18 個  $x^1$  和  $(-9)$  個 1

可以記錄成  $15 \times x^3 + 7 \times x^2 + 18 \times x^1 + (-9) \times x^0$

在指數記法中，任何非零整數的 0 次方的值為 1，

例如： $1^0 = 1$ ， $2^0 = 1$ ， $3^0 = 1$ ， $\dots$ ， $10^0 = 1$ ，

如果以  $x$  代表底數數字，可以記為  $x^0 = 1$ 。



$15 \times x^3 + 7 \times x^2 + 18 \times x^1 + (-9) \times x^0$ ，

因為  $x^0 = 1$ ， $(-9) \times x^0 = (-9) \times 1 = (-9)$ ；

$x^1 = x$ ， $18 \times x^1 = 18 \times x = 18x$ ，

所以簡記為  $15x^3 + 7x^2 + 18x + (-9)$ ，

可以把它看作 15 個  $x^3$  和 7 個  $x^2$  和 18 個  $x$  和  $(-9)$  個 1 的總和。



像  $15x^3 + 7x^2 + 18x + (-9)$  這樣的寫法，稱為  $x$  的多項式。

$15x^3$  稱為  $x$  的 3 次項， $7x^2$  稱為  $x$  的 2 次項，

$18x$  稱為  $x$  的 1 次項， $(-9)$  稱為常數項。

另外，

$15x^3$  中的 15 稱為  $x$  的 3 次項係數，

$7x^2$  中的 7 稱為  $x$  的 2 次項係數，

$18x$  中的 18 稱為  $x$  的 1 次項係數， $(-9)$  稱為常數項係數。



(3) 請將  $18x + 15x^3 + (-9) + 7x^2$  依照下列方式記錄下來：

① 次方由小到大排列

② 次方由大到小排列

解：

① 次方由小到大排列

$x^0 = 1$	$x^1$	$x^2$	$x^3$
-9	18	7	15

可以記錄成  $(-9) \times x^0 + 18 \times x^1 + 7 \times x^2 + 15 \times x^3$

也可以寫成  $(-9) \cdot 1 + 18 \cdot x^1 + 7 \cdot x^2 + 15 \cdot x^3$

也可以寫成  $(-9) + 18x^1 + 7x^2 + 15x^3$

② 次方由大到小排列

$x^3$	$x^2$	$x^1$	$x^0 = 1$
15	7	18	-9

可以記錄成  $15 \times x^3 + 7 \times x^2 + 18 \times x^1 + (-9) \times x^0$

也可以寫成  $15 \cdot x^3 + 7 \cdot x^2 + 18 \cdot x^1 + (-9) \cdot 1$

也可以寫成  $15x^3 + 7x^2 + 18x^1 + (-9)$



$(-9) \times x^0 + 18 \times x^1 + 7 \times x^2 + 15 \times x^3$  為次方由小到大排列，  
可以稱為升次排列或升冪(讀音同密)排列。

$15 \times x^3 + 7 \times x^2 + 18 \times x^1 + (-9) \times x^0$  為次方由大到小排列，  
可以稱為降次排列或降冪(讀音同密)排列。



### 隨堂練習

(1) 根據題目的多項式，於空格內填入適當的數：

多項式	$x^3$ 項係數	$x^2$ 項係數	$x$ 項係數	常數項
$2x - 5$				
$5x^2 - 11x$				
$x^2 + 15 - 4x^3 + 4x$				

(2) 將多項式  $x^3 - 5 + 3x - 4x^2$  依升冪排列，並寫出結果。

(3) 將多項式  $x^3 - 5 + 3x - 4x^2$  依降冪排列，並寫出結果。



基本學習內容：AC-8-2-1、AC-8-3-1

## ◎多項式加法運算

(4)如果有二個多項式分別為  $3x^3+8x^2+2x+5$  和  $2x^3+4x^2+7x+1$ ，  
請算出這二個多項式的和。

解：

位值表格：

	$x^3$	$x^2$	$x$	1
	3	8	2	5
+	2	4	7	1
結果	5	12	9	6

直式加法：

$$\begin{array}{r}
 3x^3 + 8x^2 + 2x + 5 \\
 +) \quad 2x^3 + 4x^2 + 7x + 1 \\
 \hline
 5x^3 + 12x^2 + 9x + 6
 \end{array}$$

將結果記為  $5x^3+12x^2+9x+6$

橫式：

$$\begin{aligned}
 &(3x^3+8x^2+2x+5) + (2x^3+4x^2+7x+1) \\
 &= 5x^3+12x^2+9x+6
 \end{aligned}$$

在第(4)題中，次數相同的項，稱為同類項，

例如： $3x^3$  和  $2x^3$  都是  $x$  的 3 次項，係數相加，得到  $(3+2)x^3 = 5x^3$ ；

$8x^2$  和  $4x^2$  都是  $x$  的 2 次項，係數相加，得到  $(8+4)x^2 = 12x^2$ ；

$2x$  和  $7x$  都是  $x$  的 1 次項，係數相加，得到  $(2+7)x = 9x$ ；

5 和 1 都是常數項，常數相加，得到  $5+1=6$ 。

如果把題目中的同類項做合併計算，就可以算出多項式最後的結果。





(5)①請完成多項式直式加法，並計算結果：

$$\begin{array}{r} x^3 + 5x^2 + (-7)x + (-2) \\ +) \quad x^3 + (-4)x^2 + 10x + (-3) \\ \hline \end{array}$$

②請用橫式計算記錄①的過程與結果。

解：

直式加法：

$$\begin{array}{r} 1x^3 + 5x^2 + (-7)x + (-2) \\ +) \quad 1x^3 + (-4)x^2 + 10x + (-3) \\ \hline 2x^3 + 1x^2 + 3x + (-5) \end{array}$$

記為  $2x^3 + x^2 + 3x + (-5)$ 。

橫式 - 兩多項式相加：

$$\begin{aligned} & [x^3 + 5x^2 + (-7)x + (-2)] + [x^3 + (-4)x^2 + 10x + (-3)] \\ & = 2x^3 + x^2 + 3x + (-5) \end{aligned}$$

橫式 - 8 項單項式相加：

$$\begin{aligned} & x^3 + 5x^2 + (-7)x + (-2) + x^3 + (-4)x^2 + 10x + (-3) \\ & = (1+1)x^3 + [5+(-4)]x^2 + [(-7)+10]x + [(-2)+(-3)] \\ & = 2x^3 + x^2 + 3x + (-5) \end{aligned}$$

$x^3$  表示 1 個  $x^3$ ，可以寫成  $1x^3$ 。  
所以  $x^n = 1x^n$ ， $-x^n = -1x^n$ ，  
 $n$  為整數。



在第(5)題中，發現兩種橫式記錄的結果相同，表示

$$[x^3 + 5x^2 + (-7)x + (-2)] + [x^3 + (-4)x^2 + 10x + (-3)] = x^3 + 5x^2 + (-7)x + (-2) + x^3 + (-4)x^2 + 10x + (-3)$$

也就是說兩多項式相加的中括號可以省略不寫，記錄成 8 項單項式相加運算。





(6)①  $[5x^3 + 2x^2 + (-7)x + 6] + [7x^3 + 3x^2 + 4x + (-5)]$  的和是多少？

②  $(4x^3 + 3x + 5) + (6x^3 + 4x^2 + 3)$  的和是多少？

解：

①直式加法：

$$\begin{array}{r} 5x^3 + 2x^2 + (-7)x + 6 \\ +) 7x^3 + 3x^2 + 4x + (-5) \\ \hline 12x^3 + 5x^2 + (-3)x + 1 \end{array}$$

將結果記為  $12x^3 + 5x^2 - 3x + 1$ 。

橫式：

$$\begin{aligned} & [5x^3 + 2x^2 + (-7)x + 6] + [7x^3 + 3x^2 + 4x + (-5)] \\ &= 5x^3 + 2x^2 + (-7)x + 6 + 7x^3 + 3x^2 + 4x + (-5) \\ &= 12x^3 + 5x^2 + (-3)x + 1 \\ &= 12x^3 + 5x^2 - 3x + 1 \end{aligned}$$

②

位值表格：

	$x^3$	$x^2$	$x$	1
	4	0	3	5
+	6	4	0	3
結果	10	4	3	8

直式加法：

$$\begin{array}{r} 4x^3 + 0 + 3x + 5 \\ +) 6x^3 + 4x^2 + 0 + 3 \\ \hline 10x^3 + 4x^2 + 3x + 8 \end{array}$$

將結果記為  $10x^3 + 4x^2 + 3x + 8$

橫式：

$$\begin{aligned} & (4x^3 + 3x + 5) + (6x^3 + 4x^2 + 3) \\ &= 4x^3 + 3x + 5 + 6x^3 + 4x^2 + 3 \\ &= 10x^3 + 4x^2 + 3x + 8 \end{aligned}$$

在第(6)題②中，我們發現多項式  $4x^3 + 3x + 5$  缺了  $x^2$  項，  
所以寫成  $4x^3 + 0x^2 + 3x + 5 = 4x^3 + 0 + 3x + 5$ ；  
多項式  $6x^3 + 4x^2 + 3$  缺了  $x$  項，  
所以寫成  $6x^3 + 4x^2 + 0x + 3 = 6x^3 + 4x^2 + 0 + 3$ 。  
如果進行兩多項式加法運算時，遇缺項可以補 0，代替該項。







### 隨堂練習

(1) 計算  $(x^2 + 6x + 5) + (3x^2 + 2x + 4)$  的結果。

(2) 計算  $(-2x^3 + 3x^2 + 5) + (7x^3 - 3x + 6)$  的結果。



基本學習內容：AC-8-2-1、AC-8-3-1

## ◎多項式減法運算

(7) 計算  $(5x^3 + 7x^2 + 3x + 6) - (4x^3 + 2x^2 + x + 3)$  的結果。

解：

直式減法：

$$\begin{array}{r} 5x^3 + 7x^2 + 3x + 6 \\ -) \quad 4x^3 + 2x^2 + 1x + 3 \\ \hline 1x^3 + 5x^2 + 2x + 3 \end{array}$$

將結果記為  $x^3 + 5x^2 + 2x + 3$

橫式：

$$\begin{aligned} & (5x^3 + 7x^2 + 3x + 6) - (4x^3 + 2x^2 + x + 3) \\ &= (5-4)x^3 + (7-2)x^2 + (3-1)x + (6-3) \\ &= x^3 + 5x^2 + 2x + 3 \end{aligned}$$

在第(7)題中，我們利用直式計算兩多項式相減時，將

兩個  $x^3$  項係數相減， $(5-4)x^3$ ；

兩個  $x^2$  項係數相減， $(7-2)x^2$ ；

兩個  $x$  項係數相減， $(3-1)x$ ；

兩個常數項相減， $(6-3)$ ，再將各項結果相加。

表示  $(5x^3 + 7x^2 + 3x + 6) - (4x^3 + 2x^2 + x + 3)$

$$= (5-4)x^3 + (7-2)x^2 + (3-1)x + (6-3)$$

所以兩多項式相減時可以記錄成同類項合併，得到  $x$  的各次方單項式相加運算。





(8)①請完成下列多項式直式減法，並計算結果：

$$\begin{array}{r} 4x^3 + 5x^2 + (-7)x + (-2) \\ -) \quad 6x^3 + (-4)x^2 + (-3)x + (-5) \\ \hline \end{array}$$

② 請用橫式計算記錄①的過程與結果。

解：

①

直式減法：

$$\begin{array}{r} 4x^3 + 5x^2 + (-7)x + (-2) \\ -) \quad 6x^3 + (-4)x^2 + (-3)x + (-5) \\ \hline (-2)x^3 + 9x^2 + (-4)x + 3 \end{array}$$

將結果記為 $-2x^3 + 9x^2 - 4x + 3$

②

橫式：

$$\begin{aligned} & [4x^3 + 5x^2 + (-7)x + (-2)] - [6x^3 + (-4)x^2 + (-3)x + (-5)] \\ &= (4-6)x^3 + [5-(-4)]x^2 + [(-7)-(-3)]x + [(-2)-(-5)] \\ &= (-2)x^3 + 9x^2 + (-4)x + 3 \end{aligned}$$

在第(8)題中，

$$\begin{aligned} & (5x^3 + 7x^2 + 3x + 6) - [(-2)x^3 + (-1)x^2 + 5x + (-4)] \\ &= [5-(-2)]x^3 + [7-(-1)]x^2 + (3-5)x + [6-(-4)] \end{aligned}$$

表示兩多項式相減時可以記錄成同類項合併，得到 $x$ 的各次方單項式相加運算。



(9) 請計算  $(2x^2 + 3x + 6) - [(-3)x^2 + (-5)]$  的結果。

解：

直式減法：

$$\begin{array}{r} 2x^2 + 3x + 6 \\ -) \quad (-3)x^2 + 0 + (-5) \\ \hline 5x^2 + 3x + 11 \end{array}$$

將結果記為  $5x^2 + 3x + 11$

橫式：

$$\begin{aligned} & (2x^2 + 3x + 6) - [(-3)x^2 + (-5)] \\ &= [2 - (-3)]x^2 + 3x + [6 - (-5)] \\ &= 5x^2 + 3x + 11 \end{aligned}$$

在第(9)題中，我們發現多項式  $[(-3)x^2 + (-5)]$  缺了  $x$  項，所以寫成  $[(-3)x^2 + 0x + 5] = [(-3)x^2 + 0 + 5]$ 。  
如果進行兩多項式直式減法運算時，遇缺項可以補 0，代替該項。



(10)①  $x^2 + (-2)x + (-3)$  與  $x^2 - 2x - 3$  是否相等？

②  $(-1)x^2 + (-1)x + (-1)$  與  $-x^2 - x - 1$  是否相等？

解：

①

$$\begin{aligned} & [x^2 + (-2)x + (-3)] - (x^2 - 2x - 3) \\ &= [1x^2 + (-2)x + (-3)] - (1x^2 - 2x - 3) \\ &= (1-1)x^2 + [(-2) - (-2)]x + [(-3) - (-3)] \\ &= 0 \\ &\text{因為 } [x^2 + (-2)x + (-3)] - (x^2 - 2x - 3) = 0, \\ &\text{所以 } x^2 + (-2)x + (-3) = x^2 - 2x - 3. \end{aligned}$$



②

$$\begin{aligned} & [(-1)x^2 + (-1)x + (-1)] - (-x^2 - x - 1) \\ &= [(-1)x^2 + (-1)x + (-1)] - (-1x^2 - 1x - 1) \\ &= [(-1) - (-1)]x^2 + [(-1) - (-1)]x + [(-1) - (-1)] \\ &= 0 \\ &\text{因為 } [(-1)x^2 + (-1)x + (-1)] - (-x^2 - x - 1) = 0, \\ &\text{所以 } (-1)x^2 + (-1)x + (-1) = -x^2 - x - 1。 \end{aligned}$$

從第(10)題發現：

$$x^2 + (-2)x + (-3) = x^2 - 2x - 3, \text{ 表示 } x^2 + (-2)x + (-3)$$

為了省略括號，可簡記為  $x^2 - 2x - 3$ 。

$$(-1)x^2 + (-1)x + (-1) = -1x^2 - 1x - 1, \text{ 表示 } (-1)x^2 + (-1)x + (-1)$$

為了省略括號，可簡記成  $-1x^2 - 1x - 1$ ；

$$-1x^2 - 1x - 1 = -x^2 - x - 1, \text{ 表示}$$

$-1x^2 - 1x - 1$  中的  $-1x^2$  簡記成  $-x^2$ ， $-1x$  簡記成  $-x$ ，

但常數項  $-1$  不能再簡記。



(11)①計算  $(x^3 + x^2 + x + 1) + [(-4)x^3 + (-3)x^2 + 5x + 6]$  的結果。

②計算  $(x^3 + x^2 + x + 1) - (4x^3 + 3x^2 - 5x - 6)$  的結果。

③說說看， $(x^3 + x^2 + x + 1) + [(-4)x^3 + (-3)x^2 + 5x + 6]$  與

$(x^3 + x^2 + x + 1) - (4x^3 + 3x^2 - 5x - 6)$  的結果相等嗎？

解：

$$\begin{aligned} \text{① } & (x^3 + x^2 + x + 1) + [(-4)x^3 + (-3)x^2 + 5x + 6] \\ &= (1x^3 + 1x^2 + 1x + 1) + [(-4)x^3 + (-3)x^2 + 5x + 6] \\ &= [1 + (-4)]x^3 + [1 + (-3)]x^2 + (1 + 5)x + (1 + 6) \\ &= (-3)x^3 + (-2)x^2 + 6x + 7 \\ &= -3x^3 - 2x^2 + 6x + 7 \end{aligned}$$

② 將  $(x^3 + x^2 + x + 1) - (4x^3 + 3x^2 - 5x - 6)$  改記為

$$\begin{aligned} & (1x^3 + 1x^2 + 1x + 1) - [4x^3 + 3x^2 + (-5)x + (-6)] \\ &= (1-4)x^3 + (1-3)x^2 + [1-(-5)]x + [1-(-6)] \\ &= (-3)x^3 + (-2)x^2 + 6x + 7 \\ &= -3x^3 - 2x^2 + 6x + 7 \end{aligned}$$

③ 因為  $(x^3 + x^2 + x + 1) + [(-4)x^3 + (-3)x^2 + 5x + 6] = -3x^3 - 2x^2 + 6x + 7$ ，

$$(x^3 + x^2 + x + 1) - (4x^3 + 3x^2 - 5x - 6) = -3x^3 - 2x^2 + 6x + 7，$$

所以

$$(x^3 + x^2 + x + 1) + [(-4)x^3 + (-3)x^2 + 5x + 6] = (x^3 + x^2 + x + 1) - (4x^3 + 3x^2 - 5x - 6)$$

從第(11)題發現：

$(x^3 + x^2 + x + 1) + [(-4)x^3 + (-3)x^2 + 5x + 6] = (x^3 + x^2 + x + 1) - (4x^3 + 3x^2 - 5x - 6)$ ，  
表示  $[(-4)x^3 + (-3)x^2 + 5x + 6] = -(4x^3 + 3x^2 - 5x - 6)$ ，也就是說  
減去  $(4x^3 + 3x^2 - 5x - 6)$  可記為加上  $[(-4)x^3 + (-3)x^2 + 5x + 6]$ 。

另外， $(4x^3 + 3x^2 - 5x - 6) = [4x^3 + 3x^2 + (-5)x + (-6)]$  的各項係數與  
 $[(-4)x^3 + (-3)x^2 + 5x + 6]$  的各項係數互為相反數，  
例如：4 和  $(-4)$ ，3 和  $(-3)$ ， $(-5)$  和 5， $(-6)$  和 6。



如果  $P$  為多項式，

$P - (ax^3 + bx^2 + cx + d)$  可記為  $P + [(-a)x^3 + (-b)x^2 + (-c)x + (-d)]$ ，表示

$$P - (ax^3 + bx^2 + cx + d) = P + [(-a)x^3 + (-b)x^2 + (-c)x + (-d)]。$$



(12) 計算  $(3x^2 + 2x - 1) - (5x - 4x^2 - 6)$  的結果。

解：

方法一、

$$\begin{aligned} & (3x^2 + 2x - 1) - (5x - 4x^2 - 6) \\ &= (3x^2 + 2x - 1) - (-4x^2 + 5x - 6) \\ &= (3x^2 + 2x - 1) - [(-4)x^2 + 5x + (-6)] \\ &= [3 - (-4)]x^2 + (2 - 5)x + [(-1) - (-6)] \\ &= 7x^2 - 3x + 5 \end{aligned}$$



方法二、

$$\begin{aligned} & (3x^2+2x-1)-(5x-4x^2-6) \\ & = (3x^2+2x-1)-(-4x^2+5x-6) \\ & = (3x^2+2x-1)+[4x^2+(-5)x+6] \\ & = 7x^2-3x+5 \end{aligned}$$

(13) 計算  $(x^3+2x-1)-(3x^3-4x^2+5)$  的結果。

解：

$$\begin{aligned} & (x^3+2x-1)-(3x^3-4x^2+5) \\ & = (1x^3+0+2x-1)-(3x^3-4x^2+0+5) \\ & = (1x^3+0+2x-1)+[(-3)x^3+4x^2+0+(-5)] \\ & = -2x^3+4x^2+2x-6 \end{aligned}$$



隨堂練習

(1) 計算  $(x^2+6x+5)-(3x^2+2x+4)$  的結果。

(2) 計算  $(3x^3+x-5)-(6x^3-2x^2+4)$  的結果。



### 小試身手

(1) 根據題目的多項式，於空格內填入適當的數：

多項式	$x^2$ 項係數	$x$ 項係數	常數項
$3x + 7$			
$-2x^2 + 4x + 9$			
$3x^2 + 15$			
$-5$			

(2) 將多項式  $-2x^3 - 7 - 5x^2 + x$  依升冪排列，並寫出結果。

(3) 將多項式  $x^2 - 6 + 4x - 2x^3$  依降冪排列，並寫出結果。

(4) 計算  $(5x^2 + 3x + 6) + (-2x^2 + 4x + 9)$  的結果。

(5) 計算  $(2x^2 - 5x^3 + 6) + (6 + 4x + 2x^3)$  的結果。

(6) 計算  $(4x^2 - 2x - 6) - (-2x^2 + 3x + 9)$  的結果。

(7) 計算  $(2x^2 - 6) - (9 - 2x + 3x^2)$  的結果。

(8) 已知有一多項式 A 與  $x^2 + 4x - 5$  的和為  $-3x^2 - 7x + 9$ ，  
請問多項式 A 為多少？







教育部國民及學前教育署 編

國民中學

學生學習扶助教材

8 年級數學

