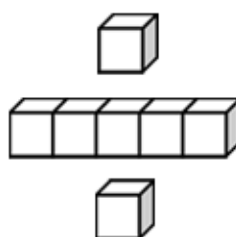


基本學習內容：AC-8-3-3

整係數多項式的除法運算

班級：_____

姓名：_____



◎多項式的除法

- (1)「桌上有一些糖果，有袋裝和散裝，共有 12 袋又 20 顆，現在將 2 袋又 3 顆裝成一個禮物盒，請問共可裝成幾盒禮物盒？還剩下幾顆糖果？」
假設 1 袋糖果有 x 顆，請用除法算式把問題記下來。

解：

設 1 袋糖果有 x 顆，那麼

12 袋又 20 顆糖果記為 $12x + 20$ 顆，2 袋又 3 顆糖果記為 $2x + 3$ 顆，

因為 12 袋又 20 顆，每 2 袋又 3 顆裝一盒，共可裝成 6 盒剩 2 顆。

可將算式記成

$$(12x + 20) \div (2x + 3) = 6 \cdots 2。$$

$(12x + 20) \div (2x + 3) = 6 \cdots 2$ ，可看成兩個多項式相除的運算與結果，我們稱為多項式除法運算。



◎ 商式與餘式

作整數除法運算 $605 \div 20$ 時，我們先將它看成計算「605 是 20 的幾倍？」
因為 600 是 20 的 30 倍，估計 605 大約是 20 的 30 倍，
再利用先乘後減計算，得到 $605 - 20 \times 30 = 5$ ，
所以 $605 \div 20 = 30 \cdots 5$ 。



- (2)① 已知 $(6x^2 + 5) \div 2x = () \cdots ()$ ，並在括號內填入正確的多項式。
 ② 已知 $(6x^2 + 4x + 5) \div 2x^2 = () \cdots ()$ ，並在括號內填入正確的多項式。

解：

①

將 $(6x^2 + 5) \div 2x$ 看成計算「 $6x^2 + 5$ 是 $2x$ 的幾倍？」，
 因為 $2x \cdot 3x = 6x^2$ ，估計 $6x^2 + 5$ 是 $2x$ 的 $3x$ 倍，
 利用先乘後減，得到

$$(6x^2 + 5) - 2x \cdot 3x = (6x^2 + 5) - 6x^2 = 5，$$

所以 $6x^2 + 5$ 是 $2x$ 的 $3x$ 倍多 5，
 在除法算式中前後兩個括號，依序填入 $3x$ 、5，寫成

$$(6x^2 + 5) \div 2x = (3x) \cdots (5)。$$

②

將 $(6x^2 + 4x + 5) \div 2x^2$ 看成計算「 $6x^2 + 4x + 5$ 是 $2x^2$ 的幾倍？」，
 因為 $2x^2 \cdot 3 = 6x^2$ ，估計 $6x^2 + 4x + 5$ 是 $2x^2$ 的 3 倍，
 利用先乘後減，得到

$$(6x^2 + 4x + 5) - 2x^2 \cdot 3 = (6x^2 + 4x + 5) - 6x^2 = 4x + 5，$$

所以 $6x^2 + 4x + 5$ 是 $2x^2$ 的 3 倍多 $4x + 5$ ，
 在除法算式中前後兩個括號，依序填入 3、 $4x + 5$ ，寫成

$$(6x^2 + 4x + 5) \div 2x^2 = (3) \cdots (4x + 5)。$$

從第(2)題的結果：

$$(6x^2 + 5) \div 2x = (3x) \cdots (5)，$$

$$(6x^2 + 4x + 5) \div 2x^2 = (3) \cdots (4x + 5)，$$

我們將 $6x^2 + 5$ 、 $6x^2 + 4x + 5$ 稱為被除式，

$2x$ 、 $2x^2$ 稱為除式， $3x$ 、3 稱為商式，5、 $4x + 5$ 稱為餘式，

發現餘式 5、 $4x + 5$ 的次數低於除式 $2x$ 、 $2x^2$ 。





(3)① 請計算 $(4x^2 - 4x + 2) \div (-2x)$ 的結果，並寫出商式與餘式。

② 請計算 $(3x^2 - 4x + 1) \div (-x^2 - x - 1)$ 的結果，並寫出商式與餘式。

解：

①

因為 $(-2x) \cdot (-2x) = 4x^2$ ，

估計 $4x^2 - 4x + 2$ 是 $-2x - 1$ 的 $-2x$ 倍，利用先乘後減運算，得到

$$\begin{aligned} & (4x^2 - 4x + 2) - (-2x - 1)(-2x) \\ &= (4x^2 - 4x + 2) - (4x^2 + 2x) \\ &= -6x + 2 \end{aligned}$$

又 $(-2x) \cdot 3 = -6x$ ，

估計 $-6x + 2$ 是 $-2x - 1$ 的 3 倍，利用先乘後減運算，得到

$$\begin{aligned} & (-6x + 2) - (-2x - 1) \cdot 3 \\ &= (-6x + 2) - (-6x + 3) \\ &= -1 \end{aligned}$$

所以 $4x^2 - 4x + 2$ 是 $-2x - 1$ 的 $-2x$ 又 3 倍多 -1 ，可記成

除法算式 $(4x^2 - 4x + 2) \div (-2x - 1) = -2x + 3 \cdots -1$ ，

因此，商式為 $-2x + 3$ ，餘式為 -1

②

因為 $(-x^2) \cdot (-3) = 3x^2$ ，

估計 $3x^2 - 4x + 1$ 是 $-x^2 - x - 1$ 的 -3 倍，利用先乘後減運算，得到

$$\begin{aligned} & (3x^2 - 4x + 1) - (-x^2 - x - 1)(-3) \\ &= (3x^2 - 4x + 1) - (3x^2 + 3x + 3) \\ &= -7x - 2 \end{aligned}$$

所以 $3x^2 - 4x + 1$ 是 $-x^2 - x - 1$ 的 -3 倍多 $-7x - 2$ ，可記成

除法算式 $(3x^2 - 4x + 1) \div (-x^2 - x - 1) = -3 \cdots -7x - 2$ ，

因此，商式為 -3 ，餘式為 $-7x - 2$ 。



從第(3)題①②結果發現：

只要讓餘式的次數低於除式的次數，即完成除法運算，
我們接受商式、餘式為含負係數多項式或負常數項，例如：

$(4x^2 - 4x + 2) \div (-2x - 1) = -2x + 3 \cdots -1$ 的商式為 $-2x + 3$ ，
餘式為 -1 。

$(3x^2 - 4x + 1) \div (-x^2 - x - 1) = -3 \cdots -7x - 2$ 的商式為 -3 ，
餘式為 $-7x - 2$ 。



多項式除法 $A \div B = Q \cdots R$ ，其中多項式 R 的次數要低於多項式 B 的次數，

我們稱 A 為被除式， B 為除式， Q 為商式， R 為餘式。



◎利用直式除法作多項式除法運算

(4)①請用直式除法計算 $(6 \times 100 + 5 \times 10 + 8 \times 1) \div (3 \times 100 + 1 \times 10 + 2 \times 1)$ 的結果。

②請用直式除法計算 $(6x^2 + 5x + 8) \div (3x^2 + x + 2)$ 的結果。

解：

①

$6 \times 100 + 5 \times 10 + 8 \times 1$ 可記為 $6 \times 10^2 + 5 \times 10^1 + 8 \times 1$ ，

$3 \times 100 + 1 \times 10 + 2 \times 1$ 可記為 $3 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 2 \times 1$ ，

直式除法過程如下所示，

$$\begin{array}{r}
 \overline{) 6 \times 10^2 + 5 \times 10^1 + 8 \times 1} \\
 \underline{6 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 4 \times 1} \\
 3 \times 10^1 + 4 \times 1
 \end{array}$$

2

將過程用橫式記錄：

$(6 \times 10^2 + 5 \times 10^1 + 8 \times 1) \div (3 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 2 \times 1) = 2 \cdots (3 \times 10^1 + 4 \times 1)$ ，

所以 $(6 \times 100 + 5 \times 10 + 8 \times 1) \div (3 \times 100 + 1 \times 10 + 2 \times 1)$ 的商數為 2，

餘數為 $3 \times 10^1 + 4 \times 1 = 34$ 。

②

將①的 10 用 x 代替，

$6 \times 10^2 + 5 \times 10^1 + 8 \times 1$ 記為 $6x^2 + 5x^1 + 8$ ，

$3 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 2 \times 1$ 記為 $3x^2 + 1x^1 + 2$ ，

直式除法過程如下所示，

$$\begin{array}{r}
 \overline{) 6x^2 + 5x^1 + 8} \\
 \underline{6x^2 + 2x^1 + 4} \\
 3x^1 + 4
 \end{array}$$

2

將過程用橫式記錄： $(6x^2 + 5x^1 + 8) \div (3x^2 + 1x^1 + 2) = 2 \cdots (3x^1 + 4)$ ，

所以 $(6x^2 + 5x + 8) \div (3x^2 + x + 2)$ 的商為 2，餘式為 $3x^1 + 4 = 3x + 4$ 。



(5) 請利用直式除法計算 $(2x^2 + 7x + 1) \div (x^2 + 2x + 3)$ 的結果，並寫出商式與餘式。

解：

直式除法過程如下：

$$\begin{array}{r}
 \boxed{x^2 \cdot 2 = 2x^2} \\
 \downarrow 2 \\
 \begin{array}{r}
 x^2 + 2x + 3 \overline{) 2x^2 + 7x + 1} \\
 \underline{2x^2 + 4x + 6} \quad \leftarrow (x^2 + 2x + 3) \cdot 2 \\
 3x + (-5)
 \end{array}
 \end{array}$$

所以 $(2x^2 + 7x + 1) \div (x^2 + 2x + 3)$ 的商為 2，餘式為 $3x + (-5) = 3x - 5$ 。



- (6)①請利用直式除法計算 $(3x^2 - 5x - 4) \div (x^2 - 3x + 2)$ 的結果，並寫出商與餘式。
 ②請利用直式除法計算 $(3x^2 + 2x + 1) \div (2x^2 + x + 1)$ 的結果，並寫出商與餘式。

解：

①

將被除式 $3x^2 - 5x - 4$ 記為 $3x^2 + (-5)x + (-4)$ ；

除式 $x^2 - 3x + 2$ 記為 $x^2 + (-3)x + 2$ ，進行直式除法，過程如下所示：

$$\begin{array}{r} \overline{) 3x^2 + (-5)x + (-4)} \\ \underline{3x^2 + (-9)x + 6} \\ 4x + (-10) \end{array}$$

所以 $(3x^2 - 5x - 4) \div (x^2 - 3x + 2)$ 的商為 3，餘式為 $4x + (-10) = 4x - 10$ 。

②

直式除法過程如下所示：

$$\begin{array}{r} \overline{) 3x^2 + 2x + 1} \\ \underline{3x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}} \\ \frac{1}{2}x + (-\frac{1}{2}) \end{array}$$

$2x^2 \cdot \frac{3}{2} = 3x^2$

\downarrow

$\frac{3}{2}$

$(2x^2 + x + 1) \cdot \frac{3}{2}$

所以 $(3x^2 + 2x + 1) \div (2x^2 + x + 1)$ 的商為 $\frac{3}{2}$ ，餘式為 $\frac{1}{2}x + (-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ 。



從第(6)題①發現：

作 $(3x^2 - 5x - 4) \div (x^2 - 3x + 2)$ 運算時，可改記為

$[3x^2 + (-5)x + (-4)] \div [1x^2 + (-3)x + 2]$ 來運算，而它的餘式 $4x - 10$ 的次數 1 低於除式 $x^2 - 3x + 2$ 的次數 2，即完成多項式除法運算。

從(3)題②發現：

作 $(3x^2 + 2x + 1) \div (2x^2 + x + 1)$ 運算時，

因為 $2x^2 \cdot \frac{3}{2} = 3x^2$ ，決定商式為 $\frac{3}{2}$ ，

即 $(3x^2 + 2x + 1) - (2x^2 + x + 1) \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ ，而它的餘式 $\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ 的次數一次低於除式 $2x^2 + x + 1$ 的次數二次，即完成多項式除法運算，所以接受商式、餘式為含分數係數的多項式。



(7)①請利用直式除法計算 $(4x^2 + 3) \div (2x^2 + 2x + 1)$ 的結果，並寫出商式與餘式。

②請利用直式除法計算 $(2x^2 - 3x - 5) \div (x^2 + 1)$ 的結果，並寫出商式與餘式。

解：

①

被除式 $4x^2 + 3$ 缺 x 項，補一個 0，記為 $4x^2 + 0 + 3$ ，

進行直式除法，過程如下所示：

$$\begin{array}{r}
 \overline{) 4x^2 + 0x + 3} \\
 \underline{4x^2 + 4x + 2} \\
 (-4)x + 1
 \end{array}$$

所以 $(4x^2 + 2x + 1) \div (2x^2 + 3)$ 的商為 2，餘式為 $4x + (-5) = 4x - 5$ 。



②

將被除式 $2x^2 - 3x - 5$ 記為 $2x^2 + (-3)x + (-5)$ ；

除式 $x^2 + 1$ 缺 x 項，補一個 0，記為 $x^2 + 0 + 1$ ，

進行直式除法，過程如下所示：

$$\begin{array}{r}
 \overset{2}{\overline{) 2x^2 + (-3)x + (-5)}} \\
 \underline{2x^2 + 0 + 2} \\
 (-3)x + (-7)
 \end{array}$$

所以 $(2x^2 - 3x - 5) \div (x^2 + 1)$ 的商式為 2，餘式為 $(-3)x + (-7) = -3x - 7$ 。

(8) 請利用直式除法計算 $(3x^2 + 4x + 1) \div (x + 1)$ 的結果，並寫出商式與餘式。

解：

直式除法過程如下：

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{l} \boxed{x \cdot 3x = 3x^2} \quad \boxed{x \cdot 1 = x} \\ \searrow \quad \swarrow \\ 3x + 1 \end{array} \\
 \begin{array}{r}
 x+1 \overline{) 3x^2 + 4x + 1} \\
 \underline{3x^2 + 3x} \leftarrow \boxed{(x+1) \cdot 3x} \\
 x + 1 \\
 \underline{x + 1} \leftarrow \boxed{(x+1) \cdot 1} \\
 0
 \end{array}
 \end{array}$$

所以 $(3x^2 + 4x + 1) \div (x + 1)$ 的商式為 $3x + 4$ ，餘式為 0。



(9)① 請計算 $(4x^2 - 2x + 6) \div (2x - 3)$ 的結果，並寫出商式與餘式。

② 請計算 $(5x^2 + 4x + 1) \div (2x + 1)$ 的結果，並寫出商式與餘式。

解：

① 將被除式 $4x^2 - 2x + 6$ 記為 $4x^2 + (-2)x + 6$ ；

除式 $2x - 3$ 記為 $2x + (-3)$ ，進行直式除法，過程如下所示：

$$\begin{array}{r}
 2x + 2 \\
 2x + (-3) \overline{) 4x^2 + (-2)x + 6} \\
 \underline{4x^2 + (-6)x} \\
 4x + 6 \\
 \underline{4x + (-6)} \\
 12
 \end{array}$$

所以 $(4x^2 - 2x + 6) \div (2x - 3)$ 的商式為 $2x + 2$ ，餘式為 12。

② 直式除法過程如下：

$$\begin{array}{r}
 2x + 1 \overline{) 5x^2 + 4x + 1} \\
 \underline{5x^2 + \frac{5}{2}x} \\
 \frac{3}{2}x + 1 \\
 \underline{\frac{3}{2}x + \frac{3}{4}} \\
 \frac{1}{4}
 \end{array}$$

$2x \cdot \frac{5}{2}x = 5x^2$ $2x \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{2}x$

$\frac{5}{2}x + \frac{3}{4}$

$(2x + 1) \cdot \frac{5}{2}x$

$(2x + 1) \cdot \frac{3}{4}$

所以 $(5x^2 + 4x + 1) \div (2x + 1)$ 的商式為 $\frac{5}{2}x + \frac{3}{4}$ ，餘式為 $\frac{1}{4}$ 。



基本學習內容：AC-8-3-3



隨堂練習

(1) 計算下列各式的結果，並寫出商式與餘式：

① $(35x + 10) \div 5x$

② $(15x^2 - 8x - 12) \div (3x + 2)$

③ $(8x^2 - 11) \div (2x - 5)$

④ $(12x^2 + 2x - 1) \div (3x + 1)$



◎多項式除法原理

① 已知桌面上有 605 顆糖果，每 20 顆裝一包，可裝幾包？桌面上剩下幾顆？

② 605 和 $20 \times 30 + 5$ 一樣大嗎？

解：① $605 \div 20 = 30 \cdots 5$ ，所以可裝 30 包，剩下 5 顆。

② 從①知道，每 20 顆裝一包，裝 30 包，剩下 5 顆，
總顆數為 $20 \times 30 + 5 = 605$ ，共 605 顆，
所以 605 和 $20 \times 30 + 5$ 一樣大。

「被除數 \div 除數 = 商數 \cdots 餘數」，記為 $a \div b = q \cdots r$ ，
而「被除數 = 除數 \times 商數 + 餘數」，改記為 $a = b \cdot q + r = bq + r$ ，
我們稱之為整數除法原理。



(10) ① 請問 $(x^2 + 4x + 5)$ 和 $(x - 3)(x + 7) + 26$ 是否相等？

② $(x^2 + 4x + 5) \div (x - 3) = (x + 7) \cdots 26$ ，請用乘法與加法算式紀錄。

解：

①

$$\begin{aligned} & (x^2 + 4x + 5) - [(x - 3)(x + 7) + 26] \\ &= (x^2 + 4x + 5) - (x^2 + 4x + 5) = 0 \end{aligned}$$

所以 $x^2 + 4x + 5 = (x - 3)(x + 7) + 26$ 。

② 因為 $(x^2 + 4x + 5) \div (x - 3) = (x + 7) \cdots 26$
改記為 $(x^2 + 4x + 5) = (x - 3)(x + 7) + 26$

多項式除法算式 $A \div B = Q \cdots R$ ，可記為 $A = BQ + R$ ，其中 A 為被除式， B 為除式， Q 為商式， R 為餘式，我們稱之為多項式除法原理。例如： $(x^2 + 4x + 5) \div (x - 3) = (x + 7) \cdots 26$ ，
除法算式與結果可改記成 $(x^2 + 4x + 5) = (x - 3)(x + 7) + 26$ 。





(11) 已知 $(2x^2 - x - 5) \div (x - 2) = 2x + 3 \cdots 1$ ，請問下列哪個敘述正確？

正確敘述請畫○，錯誤敘述請畫×。

_____ ① $(2x^2 - x - 5) = (x - 2)(2x + 3) + 1$

_____ ② $2x^2 - x - 5 = (x - 2)(2x + 3) - 1$

_____ ③ $2x^2 - x - 5 = -(x - 2)(2x + 3) + 1$

解：

$$(2x^2 - x - 5) \div (x - 2) = 2x + 3 \cdots 1,$$

$$\text{可記為 } 2x^2 - x - 5 = (x - 2)(2x + 3) + 1,$$

$$\text{移項得 } (2x^2 - x - 5) - (x - 2)(2x + 3) = 1,$$

$$\text{或是 } (2x^2 - x - 5) - 1 = (x - 2)(2x + 3)。$$

所以

○ ① $(2x^2 - x - 5) - (x - 2)(2x + 3) = 1$

○ ② $2x^2 - x - 5 = (x - 2)(2x + 3) + 1$

× ③ $(2x^2 - x - 5) + 1 = (x - 2)(2x + 3)$

(12) 已知 $3x^2 + 5x - 7 = (3x + 2)(x + 1) + (-9)$ ，

在 $(3x^2 + 5x - 7) \div (3x + 2) = Q \cdots R$ 中，請問多項式 Q ， R 分別為多少？

解：

$$3x^2 + 5x - 7 = (3x + 2)(x + 1) + (-9)$$

$$3x^2 + 5x - 7 - (3x + 2)(x + 1) = -9$$

表示 $3x^2 + 5x - 7$ 比 $3x + 2$ 的 $x + 1$ 倍多 -9 ，

也就是說， $3x^2 + 5x - 7$ 除以 $3x + 2$ ，會得商式為 $x + 1$ ，餘式為 -9 。

所以 $Q = x + 1$ ， $R = -9$ 。



(13) 已知 $A \div (x-3) = 2x+1 \cdots 4$ ，請問多項式 A 為多少？

解：

由除法原理知道

$$A = (x-3)(2x+1) + 4$$

$$= 2x^2 - 5x - 3 + 4$$

$$= 2x^2 - 5x + 1$$

所以多項式 $A = 2x^2 - 5x + 1$ 。



隨堂練習

(1) 已知 $2x^2 - 5x + 8 = (x-4)(2x+3) + 4$ ，

在 $(2x^2 - 5x + 8) \div (x-4) = Q \cdots R$ 中，請問多項式 Q ， R 分別為多少？

(2) 已知 $A \div (2x+3) = 4x-1 \cdots 7$ ，請問多項式 A 為多少？



小試身手

- (1) 計算 $(4x^2 + 20x - 5) \div 4x$ 的結果，並寫出商式與餘式。
- (2) 計算 $(6x^2 + 5x - 7) \div (2x - 1)$ 的結果，並寫出商式與餘式。
- (3) 計算 $(9x^2 + 8) \div (3x + 1)$ 的結果，並寫出商式與餘式。
- (4) 計算 $(6x^2 - 8x + 3) \div (2x - 3)$ 的結果，並寫出商式與餘式。
- (5) 如果多項式 A 除以 $3x - 4$ 得商式 $x + 3$ ，餘式為 9，請問多項式 A 為多少？



教育部國民及學前教育署 編

國民中學

學生學習扶助教材

8 年級數學

