

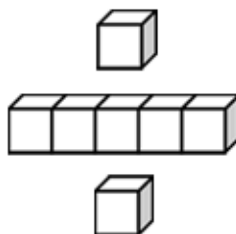
基本學習內容：AC-8-4-1、2

整係數多項式的因式、倍式

認識因式分解的意義

班級：_____

姓名：_____





基本學習內容：AC-8-4-1、2

◎整係數多項式的因式、倍式

複習因數與倍數

(1) 已知 $132 \div 12 = 11 \cdots 0$ ，下列敘述何者正確？

正確敘述請畫○，錯誤敘述請畫×

_____ ① 11 是 132 的因數。

_____ ② 12 是 132 的因數。

_____ ③ 132 是 11 的倍數。

_____ ④ 12 是 132 的倍數。

解：

___○___ ① 11 是 132 的因數。

___○___ ② 12 是 132 的因數。

___○___ ③ 132 是 11 的倍數。

___~~×~~___ ④ 12 是 132 的倍數。

因為 $132 \div 12 = 11 \cdots 0$ ，也可以記為 $11 \times 12 = 132$ ，

所以我們可以從除法算式、乘法算式知道

11、12 是 132 的因數，132 是 11、12 的倍數。



重點整理

$a \div b = c \cdots 0$ ， a 、 b 、 c 都是正整數，也可以記為 $b \times c = a$ ，

我們稱 b 、 c 是 a 的因數，稱 a 是 b 、 c 的倍數。



認識因式與倍式

$90 \div 9 = 10 \cdots 0$ ，因為 $90 \div 9$ 的餘數是 0，

所以 9 是 90 的因數，90 是 9 的倍數。

$91 \div 9 = 10 \cdots 1$ ，因為 $91 \div 9$ 的餘數不是 0，

所以 9 不是 91 的因數，91 不是 9 的倍數。



$(x^2 + 3x + 2) \div (x + 1) = (x + 2) \cdots 0$ ，因為 $(x^2 + 3x + 2) \div (x + 1)$ 的餘式是 0，

我們稱 $x + 1$ 是 $x^2 + 3x + 2$ 的**因式**， $x^2 + 3x + 2$ 是 $x + 1$ 的**倍式**。

$(x^2 + 3x + 4) \div (x + 1) = (x + 2) \cdots 2$ ，因為 $(x^2 + 3x + 4) \div (x + 1)$ 的餘式不是 0，

我們稱 $x + 1$ 不是 $x^2 + 3x + 4$ 的**因式**， $x^2 + 3x + 4$ 不是 $x + 1$ 的**倍式**。

(1) ① 判斷 $x + 1$ 是否為 $x^2 + 2x + 1$ 的因式。

② 判斷 x 是否為 $2x^2 + 3x + 2$ 的因式。

解：①

$$\begin{array}{r}
 \quad \quad \quad x + 1 \\
 x+1 \overline{) \begin{array}{r} x^2 + 2x + 1 \\ \underline{x^2 + x} \\ x + 1 \\ \underline{x + 1} \\ 0 \end{array} }
 \end{array}$$

因為 $(x^2 + 2x + 1) \div (x + 1)$ 的餘式是 0，
所以 $(x + 1)$ 是 $(x^2 + 2x + 1)$ 的**因式**。

②

$$\begin{array}{r}
 \quad \quad \quad 2x + 3 \\
 x+0 \overline{) \begin{array}{r} 2x^2 + 3x + 2 \\ \underline{2x^2 + 0x} \\ 3x + 2 \\ \underline{3x + 0} \\ 2 \end{array} }
 \end{array}$$

因為 $(2x^2 + 3x + 2) \div x$ 的餘式不是 0，
所以 x 不是 $(2x^2 + 3x + 2)$ 的**因式**。



(2) ① 判斷 $x+2$ 是否為 $x^2-3x-10$ 的因式。

② 判斷 $2x-4$ 是否為 $3x^2-6x+1$ 的因式。

解：①

被除式

$$x^2-3x-10=x^2+(-3)x+(-10)$$

$$\begin{array}{r} \overline{) x^2 + (-3)x + (-10)} \\ \underline{x^2 + 2x} \\ (-5)x + (-10) \\ \underline{(-5)x + (-10)} \\ 0 \end{array}$$

因為 $(x^2-3x-10) \div (x+2)$ 的餘式是 0，
所以 $(x+2)$ 是 $(x^2-3x-10)$ 的因式。

②

除式 $2x-4=2x+(-4)$

$$\text{被除式 } 3x^2-6x+1=3x^2+(-6)x+1$$

$$\begin{array}{r} \overline{) 3x^2 + (-6)x + 1} \\ \underline{\frac{3}{2}x + 0} \\ 1 \end{array}$$

因為 $(3x^2-6x+1) \div (2x-4)$ 的餘式不是 0，
所以 $(2x-4)$ 不是 $(3x^2-6x+1)$ 的因式。

(3) 已知多項式 $(x^2+3x+2) \div (x+1) = (x+2)$ ，

說說看， $(x+2)$ 是否為 (x^2+3x+2) 的因式， (x^2+3x+2) 是否為 $(x+2)$ 的倍式。

解：

將 (x^2+3x+2) 除以 $(x+2)$ 得到餘式為 0，

所以 $(x+2)$ 是 (x^2+3x+2) 的因式，

(x^2+3x+2) 是 $(x+2)$ 的倍式。

$$\begin{array}{r} \overline{) x^2 + 3x + 2} \\ \underline{x^2 + 2x} \\ x + 2 \\ \underline{x + 2} \\ 0 \end{array}$$



重點整理

從餘式為 0 的除法算式 $A \div B = C \cdots 0$ ，

可以知道『A 是 B、C 的倍式，B、C 都是 A 的因式』。

在整除的算式中，可以知道『被除式是除式和商的倍式，除式和商都是被除式的因式』。

(4) 已知多項式 $(x^2 - 3x + a) \div (x - 5) = (x + 2)$ ，其中 a 為整數。

請問 $(x - 5)$ 、 $(x + 2)$ 和 $(x^2 - 3x + a)$ 三個多項式間有什麼關係？

請用因式和倍式的關係說說看。

解：

在整除的算式中，可以知道『被除式是除式和商的倍式，除式和商都是被除式的因式』。

所以 $(x^2 - 3x + a)$ 是 $(x - 5)$ 、 $(x + 2)$ 的倍式、

$(x - 5)$ 、 $(x + 2)$ 是 $(x^2 - 3x + a)$ 的因式。



隨堂練習

(1) ① 判斷 $x + 2$ 是否為 $x^2 + x + 6$ 的因式。

② 判斷 $2x$ 是否為 $4x^2 + 6x + 1$ 的因式。

(2) ① 判斷 $x + 1$ 是否為 $x^2 - x - 6$ 的因式。

② 判斷 $2x - 6$ 是否為 $3x^2 - 9x + 5$ 的因式。

(3) 已知多項式 $(6x^2 - x - a) \div (3x + 1) = (2x - 1)$ ，其中 a 為整數。

請問 $(3x + 1)$ 、 $(2x - 1)$ 和 $(6x^2 - x - a)$ 三個多項式間有什麼關係？

請用因式和倍式的關係說說看。



因為 $(x^2+3x+2)\div(x+1)=(x+2)\cdots 0$ ，

也可以寫成 $(x^2+3x+2)=(x+1)(x+2)$ ，

所以我們從乘法算式也可以看到 $(x+1)$ 、 $(x+2)$ 都是 (x^2+3x+2) 的因式， (x^2+3x+2) 是 $(x+1)$ 、 $(x+2)$ 的倍式。



(5) 已知多項式 $(x+2) \times (x+3) = (x^2+5x+6)$ ，

說說看，被乘式 $(x+2)$ 與乘式 $(x+3)$ 是否都為積 (x^2+5x+6) 的因式。

解：我用除法算式檢驗，

發現 $(x^2+5x+6)\div(x+2)=(x+3)\cdots 0$ ，

因為餘式是 0，

所以 $(x+2)$ 、 $(x+3)$ 都是 (x^2+5x+6) 的因式。

重點整理

從乘法算式 $B \times C = A$ ，

可以知道『 B 、 C 都是 A 的因式， A 是 B 、 C 的倍式』。

在乘法算式中，可以知道『被乘式和乘式都是積的因式，積是被乘式和乘式的倍式』。

(6) 已知多項式 $(x+2) \times (x+a) = (x^2-7x-18)$ ，其中 a 為整數。

請問 $(x+2)$ 、 $(x+a)$ 和 $(x^2-7x-18)$ 這三個多項式有什麼關係？

請用因式和倍式的關係說說看。

解：

在乘法算式中，

可以知道『被乘式和乘式都是積的因式，積是被乘式和乘式的倍式』。

所以 $(x^2-7x-18)$ 是 $(x+2)$ 、 $(x+a)$ 的倍式、

$(x+2)$ 、 $(x+a)$ 是 $(x^2-7x-18)$ 的因式。



小試身手

(1) 已知 $234 \div 13 = 18$ ，下列敘述何者正確？正確敘述請畫○，錯誤敘述請畫×

_____ ① 13 是 234 的因數。

_____ ② 18 是 234 的因數。

_____ ③ 234 是 13 的倍數。

_____ ④ 18 是 234 的倍數。

(2) 已知多項式 $(2x^2 + x - 6) \div (x - 2) = (2x + 3)$ ，

判斷下列式子何者正確？正確敘述請畫○，錯誤敘述請畫×

_____ ① $x - 2$ 是 $2x^2 + x - 6$ 的因式。

_____ ② $2x + 3$ 是 $2x^2 + x - 6$ 的因式。

_____ ③ $2x^2 + x - 6$ 是 $x - 2$ 的倍式。

_____ ④ $2x + 3$ 是 $2x^2 + x - 6$ 的倍式。

(3) 已知 $(3x - 2) \times (2x + 5) = (6x^2 + 11x - 10)$ ，

判斷下列式子何者正確？正確敘述請畫○，錯誤敘述請畫×

_____ ① $3x - 2$ 是 $6x^2 + 11x - 10$ 的因式。

_____ ② $2x + 5$ 是 $6x^2 + 11x - 10$ 的因式。

_____ ③ $6x^2 + 11x - 10$ 是 $3x - 2$ 的倍式。

_____ ④ $2x + 5$ 是 $6x^2 + 11x - 10$ 的倍式。

(4) 判斷 $x^2 + 4x + 3$ 是否為 $x + 3$ 的倍式。

(5) 已知多項式 $(x^2 + 5x + 6) \div (x + 2) = (x + 3)$ ，

說說看， $(x + 3)$ 是否為 $(x^2 + 5x + 6)$ 的因式， $(x^2 + 5x + 6)$ 是否為 $(x + 3)$ 的倍式。

(6) 已知多項式 $(x - 5) \times (2x + 4) = (2x^2 - 6x - 20)$ ，

說說看，多項式 $(x - 5)$ 、 $(2x + 4)$ 是否都為 $(2x^2 - 6x - 20)$ 的因式。



◎認識因式分解的意義

認識因式分解

(1) ① 算算看， $(x+1)$ 和 $(x+2)$ 是否都是 x^2+3x+2 的因式？

② x^2+3x+2 可以寫成哪兩個因式的乘積？

解：

$$\textcircled{1} (x^2+3x+2) \div (x+1) = (x+2) \cdots 0$$

因為餘式是0，除式和商都是被除式的因式

所以 $(x+1)$ 和 $(x+2)$ 都是 x^2+3x+2 的因式。

$$\begin{array}{r} x+2 \\ x+1 \overline{) x^2+3x+2} \\ \underline{x^2+1x} \\ 2x+2 \\ \underline{2x+2} \\ 0 \end{array}$$

$$\textcircled{2} \text{ 因為 } (x^2+3x+2) \div (x+1) = (x+2) \cdots 0$$

$$\text{所以 } x^2+3x+2 = (x+1)(x+2)$$

像這樣 $x^2+3x+2 = (x+1)(x+2)$ ，將 x^2+3x+2 寫成兩個一次因式的乘積，

我們稱將多項式 x^2+3x+2 作**因式分解**，

也稱 x^2+3x+2 的因式分解是 $(x+1)(x+2)$ ，

記為 $x^2+3x+2 = (x+1)(x+2)$ 。

將一個二次多項式寫成兩個一次多項式的乘積，

我們就稱為二次多項式的因式分解。





(2) ①下列何者為 $x^2-7x+10$ 的因式分解？

- (A) $x(x-7)+10$ (B) $(x-2)(x-3)-2(x-2)$
(C) $(x-2)(x-5)$

②下列哪些為 $2x^2+6x+4$ 的因式分解？

- (A) $(2x+2)(x+2)$ (B) $(x+1)(2x+4)$
(C) $2(x^2+3x+2)$

解：

將一個二次多項式寫成兩個一次多項式的乘積，我們就稱為二次多項式的因式分解。

①(A) $x(x-7)+10$ 是兩個一次多項式的乘積再加上常數，所以不是因式分解

(B) $(x-2)(x-3)-2(x-2)$ 是兩個一次多項式的乘積再加上一次多項式，
所以不是因式分解

(C) $(x-2)(x-5)$ 是兩個一次多項式 $(x-2)$ 和 $(x-5)$ 的乘積，
所以是 $x^2-7x+10$ 的因式分解

所以(C)是 $x^2-7x+10$ 的因式分解。

②(A)是兩個一次多項式 $(2x+2)$ 和 $(x+2)$ 的乘積，所以是 $2x^2+6x+4$ 的因式分解

(B)是兩個一次多項式 $(x+1)$ 和 $(2x+4)$ 的乘積，所以是 $2x^2+6x+4$ 的因式分解

(C) (x^2+3x+2) 是二次多項式，2 和 (x^2+3x+2) 都不是一次多項式，
所以不是因式分解

所以(A)(B)都是 $2x^2+6x+4$ 的因式分解。

因為 $(2x+2)$ 也可以記成 $2(x+1)$ ，
所以 $2x^2+6x+4=2(x+1)(x+2)$ ，
我們稱 $2(x+1)(x+2)$ 也是 $2x^2+6x+4$ 的因式分解。

所以 $2x^2+6x+4=(2x+2)(x+2)$ 、 $2x^2+6x+4=2(x+1)(x+2)$ 和
 $2x^2+6x+4=(x+1)(2x+4)$ 都是因式分解。





(3) ①算算看， $(2x+3)$ 和 $(x+1)$ 是否皆為 $2x^2+5x+3$ 的因式？

②因式分解 $2x^2+5x+3$ 。

解：

① $(2x^2+5x+3) \div (2x+3) = (x+1) \cdots 0$

因為餘式是 0，

所以 $(2x+3)$ 和 $(x+1)$ 都是 $2x^2+5x+3$ 的因式。

$$\begin{array}{r}
 \overline{) 2x^2 + 5x + 3} \\
 \underline{2x^2 + 3x} \\
 2x + 3 \\
 \underline{2x + 3} \\
 0
 \end{array}$$

② 因式分解就是

$$2x^2+5x+3=(2x+3)(x+1)$$



隨堂練習

(1) 下列何者為 $2x^2+8x+6$ 的因式分解？

(A) $2x^2+8x+6=x(2x+4)+6$ (B) $2x^2+8x+6=(2x+2)(x+3)$

(C) $2x^2+8x+6=(x+1)(2x+6)$ (D) $2x^2+8x+6=2(x+1)(x+3)$

(E) $2x^2+8x+6=2(x^2+4x+3)$

(2) ①算算看， $(3x-2)$ 和 $(x+2)$ 是否皆為 $3x^2+4x-4$ 的因式？

②承上題，因式分解 $3x^2+4x-4$ 。



(4) ① 已知 $(x-2)$ 為 x^2+x-6 的因式，因式分解 x^2+x-6 。

② 已知 $(x-2)$ 為 $2x^2-x-6$ 的因式，因式分解 $2x^2-x-6$ 。

③ 已知 $(x-2)$ 為 $3x^2-9x+6$ 的因式，因式分解 $3x^2-9x+6$ 。

解：

①

$$(x^2 + x - 6) \div (x - 2) = (x + 3) \cdots 0$$

因為餘式是 0，商也是被除式的因式

所以 $(x+3)$ 也是 (x^2+x-6) 的因式

因式分解就是

$$x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + 3)$$

$$\begin{array}{r} x + 3 \\ \hline x^2 + \quad x + (-6) \\ \underline{x^2 + (-2)x} \\ 3x + (-6) \\ \underline{3x + (-6)} \\ 0 \end{array}$$

②

$$(2x^2 - x - 6) \div (x - 2) = (2x + 3) \cdots 0$$

因為餘式是 0，

所以 $(2x+3)$ 也是 $(2x^2-x-6)$ 的因式

因式分解就是

$$2x^2 - x - 6 = (x - 2)(2x + 3)$$

$$\begin{array}{r} 2x + 3 \\ \hline 2x^2 + (-1)x + (-6) \\ \underline{2x^2 + (-4)x} \\ 3x + (-6) \\ \underline{3x + (-6)} \\ 0 \end{array}$$

③

$$(3x^2 - 9x + 6) \div (x - 2) = (3x - 3) \cdots 0$$

因為餘式是 0，

所以 $(3x-3)$ 也是 $(3x^2-9x+6)$ 的因式

因式分解就是

$$3x^2 - 9x + 6 = (x - 2)(3x - 3)$$

$$\begin{array}{r} 3x - 3 \\ \hline 3x^2 + (-9)x + 6 \\ \underline{3x^2 + (-6)x} \\ -3x + 6 \\ \underline{-3x + 6} \\ 0 \end{array}$$



(5) ① 算算看， $(x+2)$ 是否為 x^2+4x+4 的因式？

② 因式分解 x^2+4x+4 。

解：

①

$$(x^2 + 4x + 4) \div (x + 2) = (x + 2) \cdots 0$$

因為餘式是 0，

所以 $(x+2)$ 是 x^2+4x+4 的因式。

$$\begin{array}{r}
 \textcolor{red}{x} + \textcolor{blue}{2} \\
 \hline
 x+2 \overline{) \begin{array}{r} x^2 + 4x + 4 \\ \textcolor{red}{x}^2 + \textcolor{red}{2}x \\ \hline 2x + 4 \\ \textcolor{blue}{2}x + \textcolor{blue}{4} \\ \hline 0 \end{array}}
 \end{array}$$

②

因式分解就是

$$x^2 + 4x + 4 = (x + 2)(x + 2)$$

我發現， x^2+4x+4 剛好可以寫成兩個相同一次因式的乘積。



因為 $5 \times 5 = 5^2$ ，所以 $(x+2)(x+2)$ 也可以記為 $(x+2)^2$ 。

也就是 $x^2+4x+4 = (x+2)^2$ ，這樣也稱為因式分解。

一個二次多項式如果可以寫成兩個相同一次多項式的乘積，也就是一次因式的平方，就稱此二次多項式為完全平方式。

例如：數學上稱 $(x+2)^2$ 是完全平方式，

因為 $(x+2)(x+2)$ 和 x^2+4x+4 都可以記為 $(x+2)^2$ ，

所以 $(x+2)(x+2)$ 和 x^2+4x+4 也稱為完全平方式。





(6) 下列是多項式的因式分解，哪些是完全平方式？

- (A) $x^2 + 3x + 2 = (x + 2)(x + 1)$
- (B) $3x^2 + 8x + 4 = (x + 2)(3x + 2)$
- (C) $4x^2 + 4x + 1 = (2x + 1)(2x + 1)$
- (D) $x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$
- (E) $3x^2 + 6x + 3 = 3(x + 1)(x + 1)$
- (F) $9 - 6x + x^2 = (3 - x)(3 - x)$

解：

一個二次多項式如果可以寫成兩個相同一次多項式的乘積，也就是一次因式的平方，就稱此二次多項式為完全平方式。

(A) $(x+2)$ 和 $(x+1)$ 不是相同一次多項式的乘積，所以不是完全平方式

(B) $(x+2)$ 和 $(3x+2)$ 不是相同一次多項式的乘積，所以不是完全平方式

(C) $(2x+1)(2x+1)=(2x+1)^2$ 是一次因式的平方，所以是完全平方式

(D) $(x+2)$ 和 $(x-2)$ 不是相同一次多項式的乘積，所以不是完全平方式

(E) $3(x+1)=(3x+3)$ 和 $(x+1)$ 不是相同一次多項式的乘積，

所以不是完全平方式

(F) $(3-x)(3-x)=(3-x)^2$ 是一次因式的平方，所以是完全平方式

所以(C)(F)是完全平方式



小試身手

(1) 下列何者為 $3x^2 - 6x - 9$ 的因式分解？

(A) $3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3)$ (B) $3x^2 - 6x - 9 = (3x - 9)(x + 1)$

(C) $3x^2 - 6x - 9 = (3x + 3)(x - 3)$ (D) $3x^2 - 6x - 9 = 3(x + 1)(x - 3)$

(E) $3x^2 - 6x - 9 = 3x(x - 2) - 9$

(2) ① 算算看， $(x + 4)$ 是否為 $x^2 + 8x + 16$ 的因式？

② 承上題，因式分解 $x^2 + 8x + 16$ 。

(3) 下列是多項式的因式分解，哪些是完全平方式？

(A) $x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$

(B) $9x^2 - 6x + 1 = (3x - 1)(3x - 1)$

(C) $3x^2 - 5x - 2 = (3x + 1)(x - 2)$

(D) $x^2 - 10x + 25 = (x - 5)(x - 5)$

(E) $2x^2 - 8x + 8 = 2(x - 2)(x - 2)$

(F) $4 + 4x + x^2 = (2 + x)(2 + x)$

(4) ① 已知 $(x + 2)$ 為 $3x^2 + 5x - 2$ 的因式，因式分解 $3x^2 + 5x - 2$ 。

② 已知 $(x + 2)$ 為 $4x^2 + 4x - 8$ 的因式，因式分解 $4x^2 + 4x - 8$ 。



教育部國民及學前教育署 編

國民中學

學生學習扶助教材

8 年級數學

