



基本學習內容：AC-8-5-1、2、3

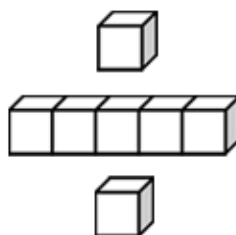
提公因式作整係數二次多項式的因式分解

乘法公式作整係數二次多項式的因式分解

十字交乘法作整係數二次多項式的因式分解

班級：_____

姓名：_____





◎提公因式作整係數二次多項式的因式分解

複習分配律

(1) 已知 $23 \times (97 + 3) = 23 \times 97 + 23 \times 3$ 。

利用分配律計算 $78 \times 99 + 78 \times 1$ 的結果。

解：觀察 $23 \times (97 + 3) = \boxed{23} \times 97 + \boxed{23} \times 3$ ，

我發現，等號左邊的算式是將等號右邊算式中 23 提出後的結果。

把 $\boxed{78} \times 99 + \boxed{78} \times 1$ 看成以加號連接的兩個算式，將 78 提出來，

兩個算式剩下的數以()合併，原算式改寫為兩個數相乘，

$$78 \times 99 + 78 \times 1 = 78 \times (99 + 1) = 78 \times 100 = 7800。$$

(2) 已知 $52 \times (219 - 19) = 52 \times 219 - 52 \times 19$ 。

利用分配律計算 $86 \times 123 - 86 \times 23$ 的結果。

解：觀察 $52 \times (219 - 19) = \boxed{52} \times 219 - \boxed{52} \times 19$ ，

我發現，等號左邊的算式是將等號右邊算式中 52 提出後的結果。

把 $\boxed{86} \times 123 - \boxed{86} \times 23$ 看成以減號連接的兩個算式，將 86 提出來，

兩個算式剩下的數以()合併，原算式改寫為兩個數相乘，

$$86 \times 123 - 86 \times 23 = 86 \times (123 - 23) = 86 \times 100 = 8600。$$

重點整理

像這樣的等式： $a \times (b \pm c) = a \times b \pm a \times c$ ，就稱為分配律。

例如： $\boxed{23} \times (97 \oplus 3) = \boxed{23} \times 97 \oplus \boxed{23} \times 3$ 、 $\boxed{52} \times (219 \ominus 19) = \boxed{52} \times 219 \ominus \boxed{52} \times 19$



提公因式作因式分解

(3) ①說說看，23 是「 $23 \times 66 + 23 \times 33$ 」的因數嗎？

(66+33)也是「 $23 \times 66 + 23 \times 33$ 」的因數嗎？

②說說看， a 是「 $a \times 66 + a \times 33$ 」的因數嗎？

(66+33)也是「 $a \times 66 + a \times 33$ 」的因數嗎？

解：①我知道，利用分配律可得 $23 \times 66 + 23 \times 33 = 23 \times (66 + 33)$

所以 23 和(66+33)都是「 $23 \times 66 + 23 \times 33$ 」的因數。

②我知道，利用分配律可得 $a \times 66 + a \times 33 = a \times (66 + 33)$ ，

所以 a 和(66+33)都是「 $a \times 66 + a \times 33$ 」的因數。

(4) ①說說看， x 是「 $3x \cdot x + 2 \cdot x$ 」的因式嗎？

(3x+2)也是「 $3x \cdot x + 2 \cdot x$ 」的因式嗎？

②說說看， $(x+1)$ 是「 $(x+1)(x+2) + (x+1)(x+3)$ 」的因式嗎？

(2x+5)也是「 $(x+1)(x+2) + (x+1)(x+3)$ 」的因式嗎？

解：

①我知道，利用分配律可得 $3x \cdot x + 2 \cdot x = x(3x + 2)$ ，

所以 x 和(3x+2)都是 $3x \cdot x + 2 \cdot x$ 的因式。

②我知道，利用分配律可得

$$\begin{aligned} & (x+1)(x+2) + (x+1)(x+3) \\ &= (x+1) \cdot (x+2) + (x+1) \cdot (x+3) \\ &= (x+1) \cdot [(x+2) + (x+3)] = (x+1)(2x+5) \end{aligned}$$

所以 $(x+1)$ 和 $(2x+5)$ 都是「 $(x+1)(x+2) + (x+1)(x+3)$ 」的因式。



重點整理

像這樣透過分配律先把公因式提出，將多項式改寫成兩個一次因式的乘積，就稱為提公因式作因式分解。

例如： $3x \cdot x + 2 \cdot x = x(3x + 2)$

$$(x + 1)(x + 2) + (x + 1)(x + 3) = (x + 1)(2x + 5)$$

(5)利用提公因式法因式分解下列各式：

① $(x - 3)(2x + 1) + (x - 2)(2x + 1)$ 。

② $2x^2 - 3x$ 。

解：

$$\begin{aligned} \text{① } & (x - 3)(2x + 1) + (x - 2)(2x + 1) \\ &= (x - 3) \cdot (2x + 1) + (x - 2) \cdot (2x + 1) \\ &= [(x - 3) + (x - 2)] \cdot (2x + 1) \\ &= (2x - 5)(2x + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{② } & 2x^2 - 3x \\ &= x \cdot 2x + x \cdot (-3) \\ &= x \cdot [2x + (-3)] \end{aligned}$$



- (6) ①說說看，17 是「 $31 \times 17 - 20 \times 17$ 」的因數嗎？
 $(31-20)$ 也是「 $31 \times 17 - 20 \times 17$ 」的因數嗎？
- ②說說看， $(31-20)$ 是「 $31 \times a - 20 \times a$ 」的因數嗎？
 a 也是「 $31 \times a - 20 \times a$ 」的因數嗎？

解：

①方法一：利用分配律可得 $31 \times 17 - 20 \times 17 = (31 - 20) \times 17$

所以 17 和 $(31-20)$ 都是「 $31 \times 17 - 20 \times 17$ 」的因數。

方法二： $31 \times 17 - 20 \times 17$

$$= 31 \times 17 + (-20) \times 17$$

$$= [31 + (-20)] \times 17$$

$$= (31 - 20) \times 17$$

所以 $(31-20)$ 和 17 都是「 $31 \times a - 20 \times a$ 」的因數。

②利用分配律，得到 $31 \times a - 20 \times a = (31 - 20) \times a$ ，

所以 $(31-20)$ 和 a 都是「 $31 \times a - 20 \times a$ 」的因數。



(7)①說說看， x 是「 $3x \cdot x - 5 \cdot x$ 」的因式嗎？

$(3x - 5)$ 也是「 $3x \cdot x - 5 \cdot x$ 」的因式嗎？

②說說看， $(x + 1)$ 是「 $(x + 1)(2x + 7) - (x + 1)(x + 3)$ 」的因式嗎？

$(x + 4)$ 也是「 $(x + 1)(2x + 7) - (x + 1)(x + 3)$ 」的因式嗎？

解：

①方法一：利用分配律可得 $3x \cdot x - 5 \cdot x = (3x - 5) \cdot x = x(3x - 5)$

所以 x 和 $(3x - 5)$ 都是「 $3x \cdot x - 5 \cdot x$ 」的因式。

方法二：因為 $3x \cdot x - 5 \cdot x = 3x \cdot x + (-5) \cdot x$ ，

再利用分配律可得

$$3x \cdot x + (-5) \cdot x = [3x + (-5)] \cdot x = x(3x - 5)$$

所以 x 和 $(3x - 5)$ 都是「 $3x \cdot x - 5 \cdot x$ 」的因式。

②我知道，利用分配律可得

$$\begin{aligned} & (x + 1)(2x + 7) - (x + 1)(x + 3) \\ &= (x + 1) \cdot (2x + 7) - (x + 1) \cdot (x + 3) \\ &= (x + 1)[(2x + 7) - (x + 3)] \\ &= (x + 1)(x + 4) \end{aligned}$$

所以 $(x + 1)$ 和 $(x + 4)$ 都是 $(x + 1)(2x + 7) - (x + 1)(x + 3)$ 的因式。



(8)利用提公因式法因式分解下列各式：

$$\textcircled{1} (5x + 6)(x - 3) - (2x + 5)(x - 3)。$$

$$\textcircled{2} -2x^2 - 7x。$$

解：

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad & (5x + 6)(x - 3) - (2x + 5)(x - 3) \\ &= [(5x + 6) - (2x + 5)] \cdot (x - 3) = (3x + 1)(x - 3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad & -2x^2 - 7x \\ &= x \cdot (-2x) - x \cdot 7 = x \cdot [(-2x) - 7] = x(-2x - 7) \end{aligned}$$

(9)因式分解下列各式：

$$\textcircled{1} (x + 2)(3x + 5) - (x + 2)(2x + 3)。$$

$$\textcircled{2} (2x + 1)^2 + (2x + 1)(x - 3)。$$

$$\textcircled{3} (-5x + 3)(2x - 1) - (1 - 2x)(x + 5)$$

解：

$$\textcircled{1} \quad (x + 2)(3x + 5) - (x + 2)(2x + 3) = (x + 2)[(3x + 5) - (2x + 3)] = (x + 2)(x + 2) = (x + 2)^2$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad & (2x + 1)^2 + (2x + 1)(x - 3) = (2x + 1)(2x + 1) + (2x + 1)(x - 3) \\ &= (2x + 1)[(2x + 1) + (x - 3)] = (2x + 1)(3x - 2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \quad & (-5x + 3)(2x - 1) - (1 - 2x)(x + 5) = (-5x + 3)(2x - 1) - [-(2x - 1)](x + 5) \\ &= (-5x + 3)(2x - 1) + (2x - 1)(x + 5) \\ &= (2x - 1)[(-5x + 3) + (x + 5)] \\ &= (2x - 1)(-4x + 8) \end{aligned}$$



小試身手

(1) ① 已知 $x \cdot 4x + 9 \cdot x$ 。說說看， x 是 $x \cdot 4x + 9 \cdot x$ 的因式嗎？

$(4x + 9)$ 也是 $x \cdot 4x + 9 \cdot x$ 的因式嗎？

② 已知 $(2x - 9)(x - 3) + (x - 3)(x + 5)$ 。

說說看 $(x - 3)$ 是 $(2x - 9)(x - 3) + (x - 3)(x + 5)$ 的因式嗎？

$(3x - 12)$ 也是 $(2x - 9)(x - 3) + (x - 3)(x + 5)$ 的因式嗎？

(2) 利用提公因式法因式分解下列各式：

① $(x + 2)(-6x + 5) + (-2x - 7)(x + 2)$ 。

② $-7x^2 - 3x$ 。

(3) 因式分解下列各式：

① $(x - 1)(5x + 4) - (x - 1)(3x + 2)$ 。

② $(1 + 3x)^2 + (1 + 3x)(5 - 2x)$ 。

③ $(5x - 2)(x - 3) - (3 - x)(4x - 1)$



◎乘法公式作整係數二次多項式的因式分解

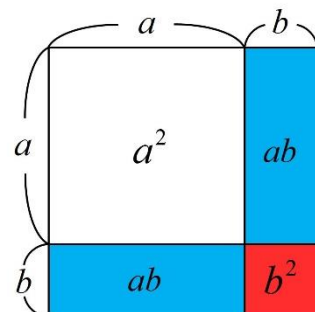
複習乘法公式

(1)如右圖，已知 $(a + b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$ ，

利用乘法公式展開下列各式：

① $(2x + 3)^2$

② $(3x - 1)^2$



解：①設 $a=2x$ ， $b=3$

$$\begin{aligned}(2x + 3)^2 &= (a + b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 \\ &= (2x)^2 + 2 \cdot (2x) \cdot 3 + 3^2 = 4x^2 + 12x + 9\end{aligned}$$

②我知道 $(3x - 1)^2 = [3x + (-1)]^2$ ，

設 $a=3x$ ， $b=-1$

$$\begin{aligned}(3x - 1)^2 &= (a + b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 \\ &= (3x)^2 + 2 \cdot (3x) \cdot (-1) + (-1)^2 = 9x^2 - 6x + 1\end{aligned}$$

(2)已知 $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ 。

利用乘法公式展開 $(2x + 1)(2x - 1)$ 。

解： $(2x + 1)(2x - 1) = (2x)^2 - 1^2 = 4x^2 - 1$



(3)利用 $(a + b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$ 因式分解下列各題：

① $x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2$ 。

② $x^2 + 2 \cdot x \cdot (-5) + (-5)^2$ 。

③ $(5x)^2 + 2 \cdot 5x \cdot (-3) + (-3)^2$

④ $(x + 3)^2 + 2 \cdot (x + 3) \cdot 5 + 5^2$

解：①設 $a=x$ 、 $b=3$

$$x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$$

$$= (a + b)^2 = (x + 3)^2$$

②設 $a=x$ 、 $b=-5$

$$x^2 + 2 \cdot x \cdot (-5) + (-5)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$$

$$= (a + b)^2 = [x + (-5)]^2 = (x - 5)^2$$

③設 $a=5x$ 、 $b=-3$

$$(5x)^2 + 2 \cdot 5x \cdot (-3) + (-3)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$$

$$= (a + b)^2 = [5x + (-3)]^2 = (5x - 3)^2$$

④設 $a=(x+3)$ 、 $b=5$

$$(x + 3)^2 + 2 \cdot (x + 3) \cdot 5 + 5^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$$

$$= (a + b)^2 = [(x + 3) + 5]^2 = (x + 8)^2$$



(4) 利用 $(a + b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$ 因式分解下列各題：

① $x^2 + 10x + 25$

② $4x^2 - 12x + 9$

③ $16x^2 - 56x + 49$

解：① 設 $a=x$ ，得到 $x^2 + 2 \cdot x \cdot 5 + 25 = a^2 + 2 \cdot a \cdot 5 + 25$

$$\text{設 } b=5, \text{ 得到 } a^2 + 2 \cdot a \cdot 5 + 5^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a + b)^2$$

$$\text{所以 } x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2$$

② 因為 $4x^2 = (2x)^2$

$$\text{設 } a=2x, \text{ 得到 } (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot (-3) + 9 = a^2 + 2 \cdot a \cdot (-3) + 9$$

$$\text{設 } b=-3, \text{ 得到 } a^2 + 2 \cdot a \cdot (-3) + 9 = a^2 + 2 \cdot a \cdot (-3) + (-3)^2$$

$$= a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a + b)^2$$

$$\text{所以 } 4x^2 - 12x + 9 = [2x + (-3)]^2 = (2x - 3)^2$$

③ 因為 $16x^2 = (4x)^2$

$$\text{設 } a=4x, \text{ 得到 } (4x)^2 + 2 \cdot 4x \cdot (-7) + 49 = a^2 + 2 \cdot a \cdot (-7) + 49$$

$$\text{設 } b=-7, \text{ 得到 } a^2 + 2 \cdot a \cdot (-7) + 49 = a^2 + 2 \cdot a \cdot (-7) + (-7)^2$$

$$= a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a + b)^2$$



(5) 利用 $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ 因式分解下列各題：

① $x^2 - 1$

② $4x^2 - 9$

③ $16 - 25x^2$

④ $(2x + 3)^2 - (x + 1)^2$

解：① 設 $a=x$ ，得到 $x^2 - 1 = a^2 - 1$

$$\text{設 } b=1, \text{ 得到 } a^2 - 1 = a^2 - (1)^2 = a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

$$\text{所以 } x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$$

② 因為 $4x^2 - 12x + 9 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot (-3) + 9 = a^2 + 2 \cdot a \cdot (-3) + 9$

$$\text{設 } a=2x, \text{ 得到 } 4x^2 - 9 = (2x)^2 - 9 = a^2 - 9$$

$$\text{設 } b=3, \text{ 得到 } a^2 - 9 = a^2 - (3)^2 = a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

$$\text{所以 } 4x^2 - 9 = (2x + 3)(2x - 3)$$

③ 因為 $16 = (4)^2$ 、 $25x^2 = (5x)^2$

$$\text{設 } a=4, b=5x$$

$$\text{得到 } 16 - 25x^2 = (4)^2 - (5x)^2 = a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

$$\text{所以 } 16 - 25x^2 = (4 + 5x)(4 - 5x)$$

④ 設 $a = (2x + 3)$ 、 $b = (x + 1)$

$$\text{得到 } (2x + 3)^2 - (x + 1)^2 = a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } (2x + 3)^2 - (x + 1)^2 &= [(2x + 3) + (x + 1)][(2x + 3) - (x + 1)] \\ &= (3x + 4)(x + 2) \end{aligned}$$



小試身手

(1) 利用 $(a + b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$ 因式分解下列各題：

① $x^2 + 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2$ 。

② $x^2 + 2 \cdot x \cdot (-7) + (-7)^2$ 。

③ $(-2x)^2 + 2 \cdot (-2x) \cdot 9 + 9^2$

④ $(x - 7)^2 + 2 \cdot (x - 7) \cdot 11 + 11^2$

(2) 利用 $(a + b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$ 因式分解下列各題：

① $x^2 - 14x + 49$

② $16x^2 + 24x + 9$

(3) 利用 $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ 因式分解下列各題：

① $1 - x^2$

② $16x^2 - 25$

③ $49 - 9x^2$

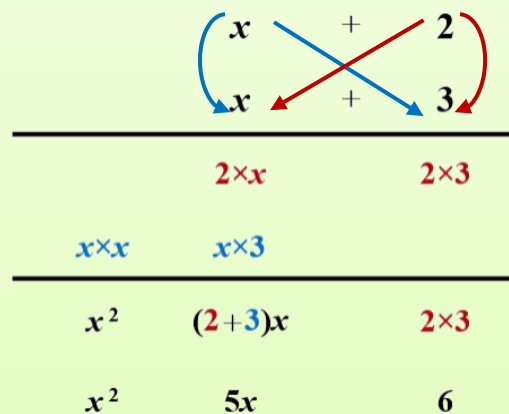


◎十字交乘法作整係數二次多項式的因式分解

(1)右圖是直式計算 $(x+2)(x+3)$ 的過程，
得到 $(x+2)(x+3) = x \cdot x + x \cdot 3 + 2 \cdot x + 2 \times 3$

$$= x^2 + (3+2)x + 2 \times 3$$

$$= x^2 + 5x + 6$$



①說說看， $x^2 + 5x + 6$ 的二次項係數

和兩個一次因式 $(x+2)$ 、 $(x+3)$
的一次項係數有什麼關係？

②說說看， $x^2 + 5x + 6$ 的常數項

和兩個一次因式 $(x+2)$ 、 $(x+3)$ 的常數項有什麼關係？

③說說看， $x^2 + 5x + 6$ 的一次項係數

和兩個一次因式 $(x+2)$ 、 $(x+3)$ 的常數項有什麼關係？

解：

①我發現， $x^2 + 5x + 6$ 的二次項係數，

就是兩個一次因式 $(x+2)$ 、 $(x+3)$ 的一次項係數乘積，
也就是 $1 = 1 \times 1$ 。

②我發現， $x^2 + 5x + 6$ 的常數項，

就是兩個一次因式 $(x+2)$ 、 $(x+3)$ 的常數項乘積，
也就是 $6 = 2 \times 3$ 。

③我發現， $x^2 + 5x + 6$ 的一次項係數，

就是兩個一次因式 $(x+2)$ 、 $(x+3)$ 的常數項相加，
也就是 $5 = 2 + 3$ 。



已知 $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$ ，則：

- ① 兩個一次因式的常數項乘積 $a \times b$ 就是積的常數項 ab 。
- ② 兩個一次因式的常數項相加 $a + b$ 就是積的一次項係數 $(a + b)$ 。



(2) 連連看，從左邊的多項式找出它的因式分解。

$x^2 + 7x + 10$	•	$(x + 1)(x + 10)$
$x^2 + 11x + 10$	•	$(x + 2)(x + 9)$
$x^2 + 7x + 6$	•	$(x + 2)(x + 5)$
$x^2 + 11x + 18$	•	$(x + 1)(x + 6)$

解：我發現 $x^2 + 7x + 10$ 和 $x^2 + 11x + 10$ 的常數項都是 10，

先把 10 分成兩個數相乘，也就是 $10 = 1 \times 10 = 2 \times 5$ ，

然後把分解的兩個數相加得到 $1 + 10 = 11$ 和 $2 + 5 = 7$ ，

因為 $x^2 + 7x + 10 = x^2 + (2 + 5)x + 2 \times 5$ ，

所以 $x^2 + 7x + 10$ 的因式分解為 $(x + 2)(x + 5)$ 。

因為 $x^2 + 11x + 10 = x^2 + (1 + 10)x + 1 \times 10$ ，

所以 $x^2 + 11x + 10$ 的因式分解為 $(x + 1)(x + 10)$ 。

接著我把 6 分成兩個數相乘，得到 $6 = 1 \times 6 = 2 \times 3$ ，

將分解的兩個數相加得到 $1 + 6 = 7$ 和 $2 + 3 = 5$ ，

因為 $x^2 + 7x + 6 = x^2 + (1 + 6)x + 1 \times 6$ ，

所以 $x^2 + 7x + 6$ 的因式分解為 $(x + 1)(x + 6)$ 。

最後把 18 分成兩個數相乘，得到 $18 = 1 \times 18 = 2 \times 9 = 3 \times 6$ ，

因為 $x^2 + 11x + 18 = x^2 + (2 + 9)x + 2 \times 9$ ，

所以 $x^2 + 11x + 18$ 的因式分解為 $(x + 2)(x + 9)$ 。



(3) ① $x^2 + ()x + 8$ 的因式分解為 $(x + 2)(x + 4)$ ，請問 $()$ 內要填多少？

② $x^2 + ()x + 8$ 的因式分解為 $(x + 1)(x + 8)$ ，請問 $()$ 內要填多少？

解：①我知道，兩個一次因式的常數項相加就是積的一次項係數，

兩個一次因式的常數項為 2 和 4，所以 $() = 2 + 4 = 6$ 。

②兩個一次因式的常數項為 1 和 8，所以 $() = 1 + 8 = 9$ 。

(4) 利用十字交乘法因式分解 $x^2 + 5x + 4$ 。

解：我把 4 分成兩個數相乘，得到 $4 = 2 \times 2 = 1 \times 4$ ，分兩次檢驗。

我先利用 $4 = 2 \times 2$ ，檢查

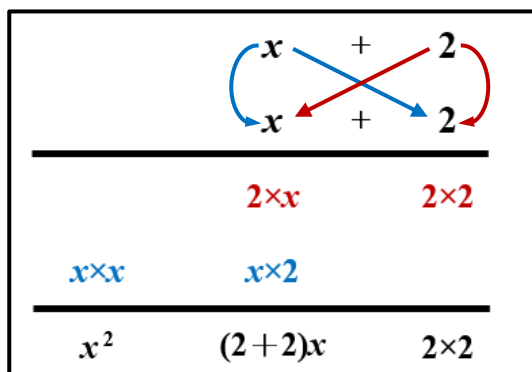
$$x^2 + ()x + 4 = (x + 2)(x + 2)$$

檢查過程在下圖。

所以 $()$ 要填入 $2 + 2 = 4$ ，

發現和題目 $x^2 + 5x + 4$ 不一樣，

所以結果不正確。



接著再用 $4 = 1 \times 4$ ，檢查

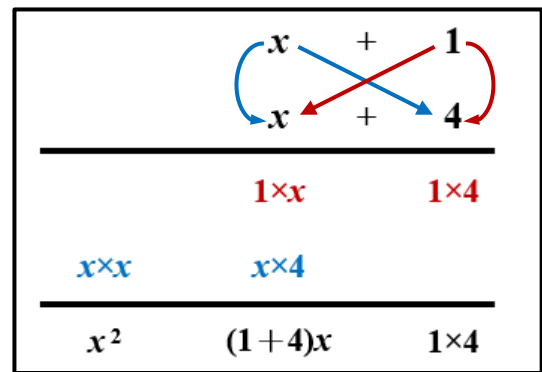
$$x^2 + ()x + 4 = (x + 1)(x + 4)$$

檢查過程在下圖。

所以 $()$ 要填入 $1 + 4 = 5$ ，

發現和題目 $x^2 + 5x + 4$ 一樣，

所以結果正確。



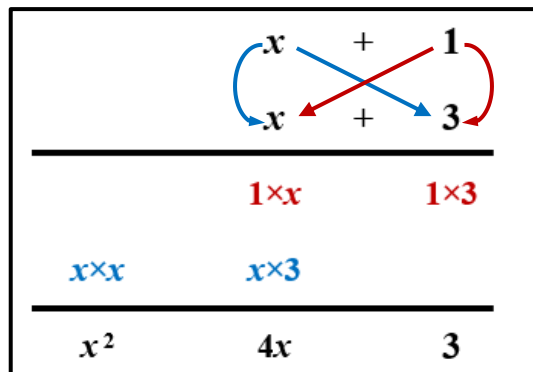
$$\text{所以 } x^2 + 5x + 4 = (x + 1)(x + 4)$$



重點整理

利用將常數項分解為兩個整數 p 、 q 相乘，再利用 $(p+q)$ 的結果檢驗一次項的正確性，像這樣將多項式因式分解的方法，就稱為十字交乘法。

如右圖， $x^2 + 4x + 3 = (x + 1)(x + 3)$



(5)利用十字交乘法因式分解下列各題：

① $x^2 + 14x + 24$

② $x^2 + 2x - 3$

③ $x^2 - 2x - 3$

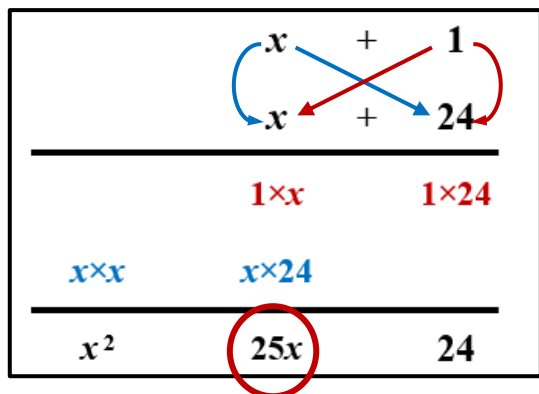
④ $x^2 - 6x + 5$

解：

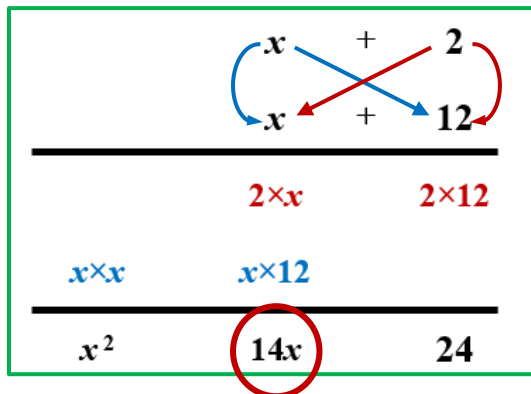
①我把 24 分成兩個數相乘，得到 $24 = 1 \times 24 = 2 \times 12 = 3 \times 8 = 4 \times 6$ ，和 $24 = -1 \times -24 = -2 \times -12 = -3 \times -8 = -4 \times -6$ 。

因為一次項係數是正數，所以只要檢查正數乘以正數的部分就好。
分四次檢查如下：

第一次： $24 = 1 \times 24$



第二次： $24 = 2 \times 12$



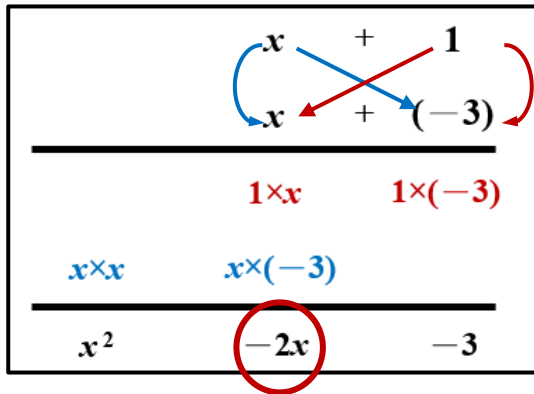
第二次檢查正確，所以 $x^2 + 14x + 24 = (x + 2)(x + 12)$

基本學習內容：AC-8-5-1、2、3

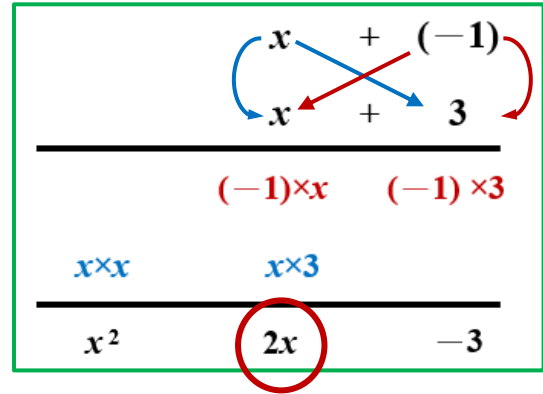
② 因為 $x^2 + 2x - 3 = x^2 + 2x + (-3)$ ，我把 (-3) 分成兩個數相乘，

得到 $-3 = 1 \times (-3) = (-1) \times 3$ ，分兩次檢查。

第一次： $-3 = 1 \times (-3)$



第二次： $-3 = (-1) \times 3$

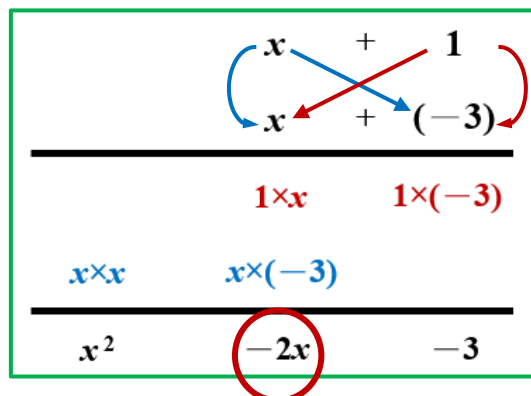


第二次檢查正確，所以 $x^2 + 2x - 3 = [x + (-1)](x + 3) = (x - 1)(x + 3)$

③ 因為 $x^2 - 2x - 3 = x^2 + (-2)x + (-3)$ ，我把 (-3) 分成兩個數相乘，

得到 $-3 = 1 \times (-3) = (-1) \times 3$ ，分兩次檢驗。

第一次： $-3 = 1 \times (-3)$



第一次檢查就正確，所以 $x^2 - 2x - 3 = (x + 1)[x + (-3)] = (x + 1)(x - 3)$

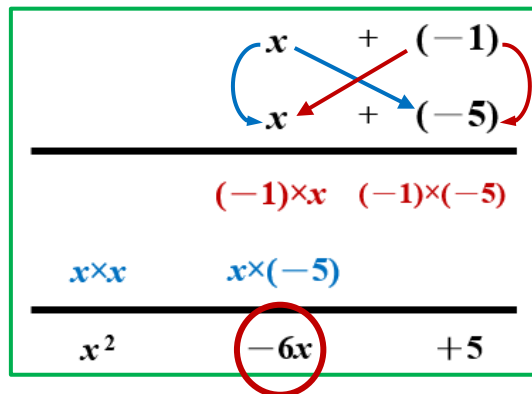


④ $x^2 - 6x + 5 = x^2 + (-6)x + 5$ ，我把 5 分成兩個數相乘，

得到 $5 = 1 \times 5$ 和 $5 = -1 \times -5$ 。

因為一次項係數是負數，所以一定是負數乘以負數，

只需要檢查 $5 = (-1) \times (-5)$ 就好。



檢查正確，所以 $x^2 - 6x + 5 = (x - 1)(x - 5)$



隨堂練習

連連看，找出多項式的因式分解。

- | | | |
|-----------------|---|------------------|
| $x^2 + x - 12$ | • | $(x + 3)(x + 4)$ |
| $x^2 - x - 12$ | • | $(x + 3)(x - 4)$ |
| $x^2 + 7x + 12$ | • | $(x - 3)(x + 4)$ |
| $x^2 - 7x + 12$ | • | $(x - 3)(x - 4)$ |



基本學習內容：AC-8-5-1、2、3

◎二次項係數不為1的十字交乘法

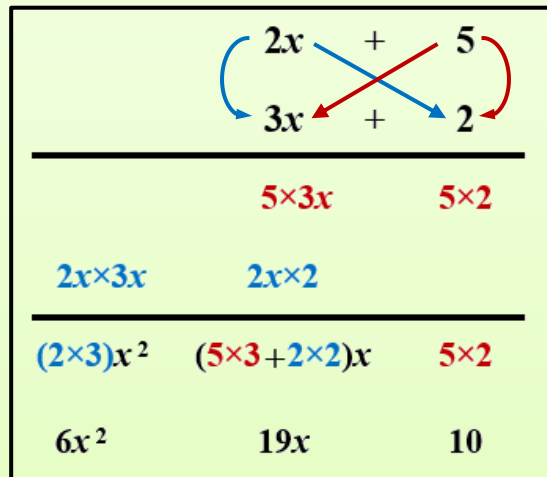
(6)右圖是利用直式計算 $(2x + 5)(3x + 2)$ 的過程，

得到 $(2x + 5)(3x + 2)$

$$= 2x \times 3x + 2x \times 2 + 5 \times 3x + 5 \times 2$$

$$= (2 \times 3)x^2 + (2 \times 2 + 5 \times 3)x + (5 \times 2)$$

$$= 6x^2 + 19x + 10。$$



①說說看， $6x^2 + 19x + 10$ 的二次項係數
和兩個一次因式 $(2x + 5)$ 、 $(3x + 2)$
的一次項係數有什麼關係？

②說說看， $6x^2 + 19x + 10$ 的常數項
和兩個一次因式 $(2x + 5)$ 、 $(3x + 2)$
的常數項有什麼關係？

③說說看， $6x^2 + 19x + 10$ 的一次項係數和兩個一次因式
 $(2x + 5)$ 、 $(3x + 2)$ 的一次項與常數項有甚麼關係？

解：

①我發現， $6x^2 + 19x + 10$ 的二次項係數，
就是兩個一次因式 $(2x + 5)$ 、 $(3x + 2)$ 的一次項係數乘積，
也就是 $6 = 2 \times 3$ 。

②我發現， $6x^2 + 19x + 10$ 的常數項，
就是兩個一次因式 $(2x + 5)$ 、 $(3x + 2)$ 的常數項乘積，
也就是 $10 = 5 \times 2$ 。

③我發現， $6x^2 + 19x + 10$ 的一次項係數，
就是兩個一次因式 $(2x + 5)$ 、 $(3x + 2)$ 的一次項與常數項相乘再相加
的結果，也就是 $19x = (2 \times 2)x + (5 \times 3)x$ 。



已知 $(ax + b)(cx + d) = (a \cdot c)x^2 + (a \cdot d + b \cdot c)x + b \cdot d$ ，則：

- ① 兩個一次因式的一次項係數的乘積 $a \cdot c$ 就是積的二次項係數 ac 。
- ② 兩個一次因式的常數項乘積 $b \cdot d$ 就是積的常數項 bd 。
- ③ 再利用十字交乘法算出積的一次項係數。



(7) 連連看，從左邊的多項式找出它的因式分解。

$2x^2 - 5x + 3$	•	$(x + 1)(2x + 3)$
$2x^2 + x - 3$	•	$(x + 3)(2x + 1)$
$2x^2 + 5x + 3$	•	$(x + 1)(2x - 3)$
$2x^2 + 5x - 3$	•	$(x - 1)(2x + 3)$
$2x^2 - 7x + 3$	•	$(x + 3)(2x - 1)$
$2x^2 - 5x - 3$	•	$(x - 3)(2x + 1)$
$2x^2 + 7x + 3$	•	$(x - 1)(2x - 3)$
$2x^2 - x - 3$	•	$(x - 3)(2x - 1)$

解：

我發現二次項的係數都是 2，

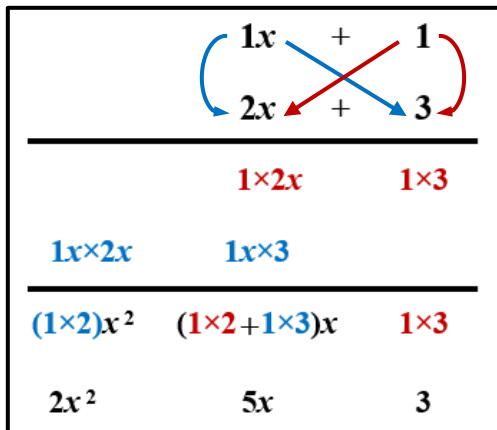
所以先分解二次項係數，得到 $2 = 1 \times 2 = 2 \times 1$ ，

我只使用 $2 = 1 \times 2$ 的分解方式，分解常數項時再配成不同組合。



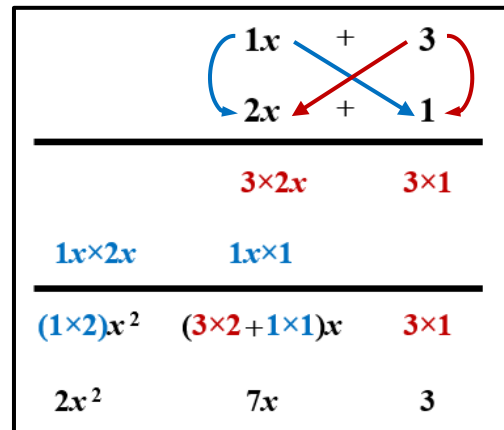
①常數項的係數有+3和-3兩種，我先考慮 $3 = 1 \times 3 = (-1) \times (-3)$ ，如下圖，固定二次項係數為 1×2 後，共有四種擺放方式。

第一種： 1×3



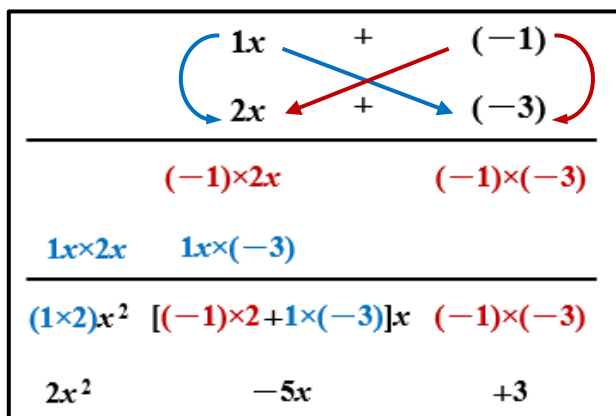
$$2x^2 + 5x + 3 = (x + 1)(2x + 3)$$

第二種： 3×1



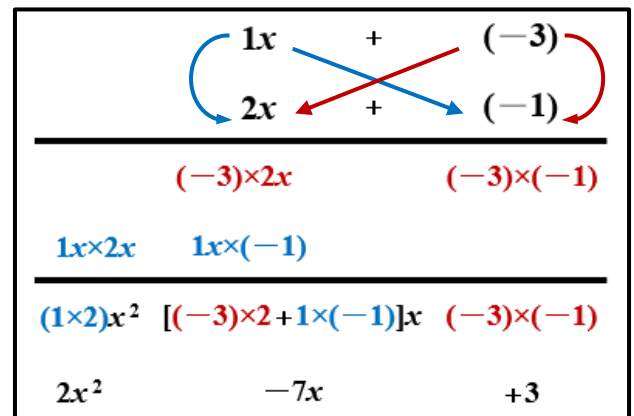
$$2x^2 + 7x + 3 = (x + 3)(2x + 1)$$

第三種： $(-1) \times (-3)$



$$2x^2 - 5x + 3 = (x - 1)(2x - 3)$$

第四種： $(-3) \times (-1)$



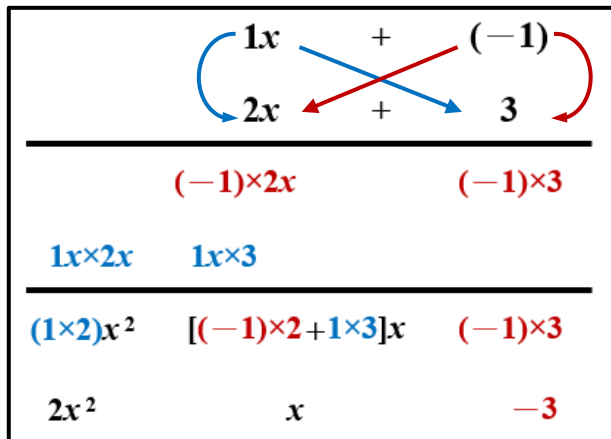
$$2x^2 - 7x + 3 = (x - 3)(2x - 1)$$



②然後考慮 $-3 = (-1) \times 3 = 1 \times (-3)$ ，

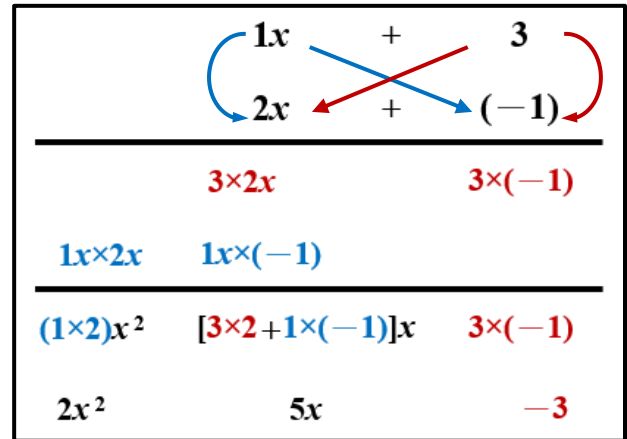
如下圖，固定二次項係數為 1×2 ，共有四種擺放方式。

第一種： $(-1) \times 3$



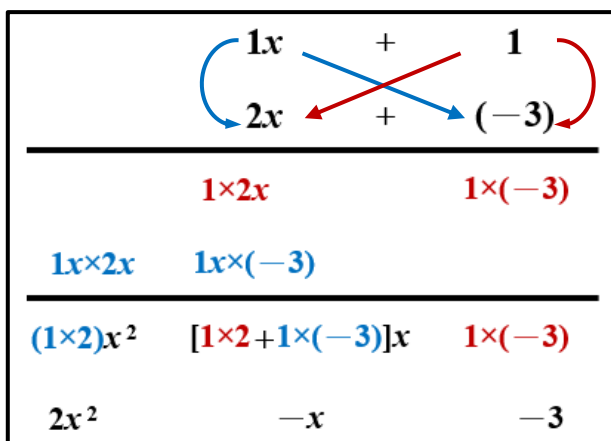
$$2x^2 + x - 3 = (x - 1)(2x + 3)$$

第二種： $3 \times (-1)$



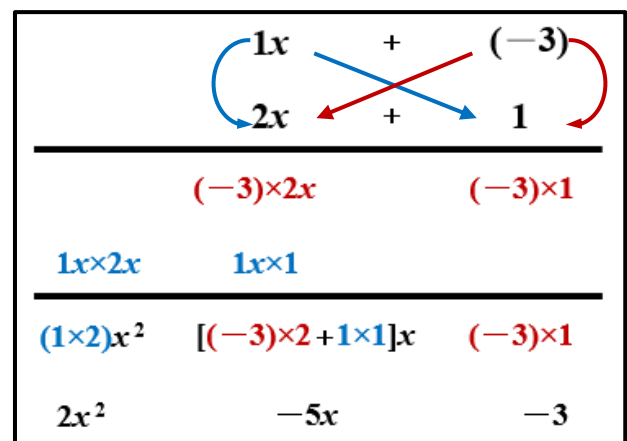
$$2x^2 + 5x - 3 = (x + 3)(2x - 1)$$

第三種： $1 \times (-3)$



$$2x^2 - x - 3 = (x + 1)(2x - 3)$$

第四種： $(-3) \times 1$



$$2x^2 - 5x - 3 = (x - 3)(2x + 1)$$



- (8) ① $3x^2 + ()x + 10$ 的因式分解為 $(x + 2)(3x + 5)$ ，請問 $()$ 內要填多少？
 ② $5x^2 + ()x - 6$ 的因式分解為 $(x - 3)(5x + 2)$ ，請問 $()$ 內要填多少？

解：

①如右圖，我把 $x+2$ 改記為 $1x+2$

再利用十字交乘法

算出一次項係數，

所以 $() = 5 + 6 = 11$

$$\begin{array}{r}
 1x \quad + \quad 2 \\
 3x \quad + \quad 5 \\
 \hline
 2 \times 3x \\
 x \times 5 \\
 \hline
 (2 \times 3 + 1 \times 5)x \\
 11x
 \end{array}$$

②如右圖，我利用十字交乘法

算出一次項係數，

所以 $() = 2 + (-15) = -13$

$$\begin{array}{r}
 1x \quad + \quad (-3) \\
 5x \quad + \quad 2 \\
 \hline
 (-3) \times 5x \\
 1x \times 2 \\
 \hline
 [(-3) \times 5 + 1 \times 2]x \\
 -13x
 \end{array}$$



(9)利用十字交乘法因式分解 $7x^2 + 16x - 15$ 。

解：

步驟一：分解二次項係數，只要分解成兩正數相乘就好，得到 $7 = 1 \times 7$

步驟二：分解常數項，得 $-15 = 1 \times (-15) = (-1) \times 15 = 3 \times (-5) = (-3) \times 5$

步驟三：如下圖，用十字交乘法檢驗一次項係數

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{ccc} 1x & + & 1 \\ & \times & \\ 7x & + & (-15) \end{array} \\
 \hline
 1 \times 7x \\
 1x \times (-15) \\
 \hline
 [1 \times 7 + 1 \times (-15)]x \\
 \hline
 -8x
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{ccc} 1x & + & (-15) \\ & \times & \\ 7x & + & 1 \end{array} \\
 \hline
 (-15) \times 7x \\
 1x \times 1 \\
 \hline
 [(-15) \times 7 + 1 \times 1]x \\
 \hline
 -104x
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{ccc} 1x & + & (-1) \\ & \times & \\ 7x & + & 15 \end{array} \\
 \hline
 (-1) \times 7x \\
 1x \times 15 \\
 \hline
 [(-1) \times 7 + 1 \times 15]x \\
 \hline
 +8x
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{ccc} 1x & + & 15 \\ & \times & \\ 7x & + & (-1) \end{array} \\
 \hline
 15 \times 7x \\
 1x \times (-1) \\
 \hline
 [15 \times 7 + 1 \times (-1)]x \\
 \hline
 +104x
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{ccc} 1x & + & 3 \\ & \times & \\ 7x & + & (-5) \end{array} \\
 \hline
 3 \times 7x \\
 1x \times (-5) \\
 \hline
 [3 \times 7 + 1 \times (-5)]x \\
 \hline
 +16x
 \end{array}$$

所以 $7x^2 + 16x - 15 = (x + 3)(7x - 5)$

(10)利用十字交乘法因式分解下列各題：

① $2x^2 + 7x + 6$

② $2x^2 - 13x + 6$

③ $3x^2 + 17x - 6$

④ $3x^2 - 7x - 6$

解：

① 步驟一：分解二次項係數，得到 $2 = 1 \times 2$

步驟二：分解常數項，因為常數項和一次項係數都是正數，

所以只要分解成兩正數相乘，即 $6 = 1 \times 6 = 6 \times 1 = 2 \times 3 = 3 \times 2$

步驟三：如下圖，用十字交乘法檢驗一次項係數

$1x$	+	1
$2x$	+	6
<hr/>		
$1 \times 2x$		
$1x \times 6$		
<hr/>		
$(1 \times 2 + 1 \times 6)x$		
$8x$		

$1x$	+	6
$2x$	+	1
<hr/>		
$6 \times 2x$		
$1x \times 1$		
<hr/>		
$(6 \times 2 + 1 \times 1)x$		
$13x$		

$1x$	+	2
$2x$	+	3
<hr/>		
$2 \times 2x$		
$1x \times 3$		
<hr/>		
$(2 \times 2 + 1 \times 3)x$		
$7x$		

所以 $2x^2 + 7x + 6 = (x + 2)(2x + 3)$



②步驟一：分解二次項係數，得到 $2 = 1 \times 2$

步驟二：分解常數項，因為常數項是正數，且一次項係數是負數，

所以只要分解成兩負數相乘，

$$\text{即 } 6 = (-1) \times (-6) = (-6) \times (-1) = (-2) \times (-3) = (-3) \times (-2)$$

步驟三：如下圖，用十字交乘法檢驗一次項係數

$1x$	$+$	(-1)
$2x$	$+$	(-6)
$(-1) \times 2x$		
$1x \times (-6)$		
$[(-1) \times 2 + 1 \times (-6)]x$		
$-8x$		

$1x$	$+$	(-6)
$2x$	$+$	(-1)
$(-6) \times 2x$		
$1x \times (-1)$		
$[(-6) \times 2 + 1 \times (-1)]x$		
$-13x$		

$$\text{所以 } 2x^2 - 13x + 6 = (x - 6)(2x - 1)$$

③步驟一：分解二次項係數，得到 $3 = 1 \times 3$

步驟二：分解常數項，因為常數項為負，一次項係數為正，

所以分解的兩數為一正一負，得到 $-6 = 1 \times (-6) = (-1) \times 6 = 2 \times (-3) = (-2) \times 3$

步驟三：如下圖，用十字交乘法檢驗一次項係數

$1x$	$+$	1
$3x$	$+$	(-6)
$1 \times 3x$		
$1x \times (-6)$		
$[1 \times 3 + 1 \times (-6)]x$		
$-3x$		

$1x$	$+$	(-6)
$3x$	$+$	1
$(-6) \times 3x$		
$1x \times 1$		
$[(-6) \times 3 + 1 \times 1]x$		
$-17x$		



基本學習內容：AC-8-5-1、2、3

$$\begin{array}{r}
 1x \quad + \quad (-1) \\
 3x \quad + \quad 6 \\
 \hline
 (-1) \times 3x \\
 1x \times 6 \\
 \hline
 [(-1) \times 3 + 1 \times 6]x \\
 \hline
 +3x
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 1x \quad + \quad 6 \\
 3x \quad + \quad (-1) \\
 \hline
 6 \times 3x \\
 1x \times (-1) \\
 \hline
 [6 \times 3 + 1 \times (-1)]x \\
 \hline
 +17x
 \end{array}$$

$$\text{所以 } 3x^2 + 17x - 6 = (x + 6)(3x - 1)$$

④ 步驟一和步驟二和第③題相同，

步驟三：步驟二已經檢查過的不用再檢查，從 $-6 = 2 \times (-3) = (-2) \times 3$ 開始檢查

$$\begin{array}{r}
 1x \quad + \quad 2 \\
 3x \quad + \quad (-3) \\
 \hline
 2 \times 3x \\
 1x \times (-3) \\
 \hline
 [2 \times 3 + 1 \times (-3)]x \\
 \hline
 +3x
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 1x \quad + \quad (-3) \\
 3x \quad + \quad 2 \\
 \hline
 (-3) \times 3x \\
 1x \times 2 \\
 \hline
 [(-3) \times 3 + 1 \times 2]x \\
 \hline
 -7x
 \end{array}$$

$$\text{所以 } 3x^2 - 7x - 6 = (x - 3)(3x + 2)$$



小試身手

(1) 連連看，找出多項式的因式分解。

$$7x^2 + 139x - 20 \quad \cdot \quad (7x - 5)(x + 4)$$

$$7x^2 - 68x - 20 \quad \cdot \quad (x - 10)(7x + 2)$$

$$7x^2 - 4x - 20 \quad \cdot \quad (7x + 10)(x - 2)$$

$$7x^2 + 23x - 20 \quad \cdot \quad (x + 20)(7x - 1)$$

(2) ① $5x^2 + (\quad)x + 12$ 的因式分解為 $(5x - 4)(x - 3)$ ，請問 (\quad) 內要填多少？

② $3x^2 + (\quad)x - 70$ 的因式分解為 $(x + 7)(3x - 10)$ ，請問 (\quad) 內要填多少？

(3) 利用十字交乘法因式分解下列各題：

① $5x^2 - 28x - 12$

② $5x^2 - 17x + 12$

③ $7x^2 - x - 8$

④ $7x^2 - 18x + 8$



教育部國民及學前教育署 編

國民中學

學生學習扶助教材

8 年級數學

