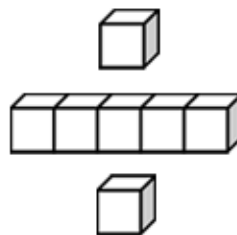


基本學習內容：AC-8-6-1、2

從具體情境中列出一元二次方程式 一元二次方程式及其解的意義

班級：_____

姓名：_____





基本學習內容：AC-8-6-1、2

◎從具體情境中列出一元二次方程式

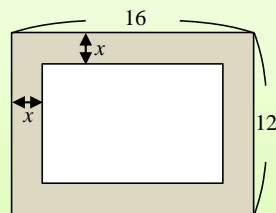
(1) 「有一塊長方形土地，長比寬的 2 倍多 5 公尺，且面積為 250 平方公尺，請問長方形土地的寬為何？」

- ① 假設長方形土地的寬為 x 公尺，依題意列出方程式？
- ② 請將方程式整理成等號左邊為多項式且等號右邊為 0 的等式。

解：

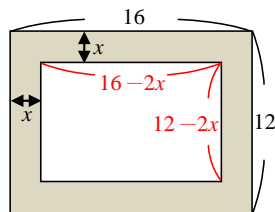
- ① 假設長方形土地的寬為 x 公尺，長為 $(2x+5)$ 公尺，其中 $x > 0$ 且 $2x+5 > 0$ 。
長方形面積 = 長 \times 寬 = $(2x+5) \times x = x(2x+5)$ ，
故可列式為 $x(2x+5) = 250$ 。
- ② 將 $x(2x+5) = 250$ 展開，得 $2x^2 + 5x = 250$ ，
再移項整理，得 $2x^2 + 5x - 250 = 0$ 。

(2) 「如圖，有一塊長方形圖畫紙，長 16 公分，寬 12 公分，在紙張周圍預留等寬的不作畫區域，中間白色區域為可作畫區域，已知可作畫的區域面積為 96 平方公分，請問不作畫區域的寬為何？」



- ① 假設不作畫區域的寬為 x 公分，依題意列出方程式？
- ② 請將方程式整理成等號左邊為多項式且等號右邊為 0 的等式。

- 解：① 假設不作畫區域的寬為 x 公分，如右圖，
可作畫區域的長為 $(16-2x)$ 公分，寬為 $(12-2x)$ 公分，
其中 $x > 0$ ， $16-2x > 0$ ， $12-2x > 0$ ，
可作畫區域的面積 = $(16-2x) \times (12-2x)$ ，
故可列式為 $(16-2x)(12-2x) = 96$ 。
- ② 將 $(16-2x)(12-2x) = 96$ 展開，得 $4x^2 - 56x + 192 = 96$ ，
再移項整理，得 $4x^2 - 56x + 96 = 0$ ，
最後，等號兩邊同除以 4，得 $x^2 - 14x + 24 = 0$ 。



以上兩個例題，都可以將方程式整理成等號左邊為多項式且等號右邊為 0 的等式。

例如： $2x^2 + 5x - 250 = 0$ 、 $x^2 - 14x + 24 = 0$ 。



像這樣可以整理成只含有一種未知數 x ，且未知數 x 的最高次數為二次的等式，

如 $ax^2 + bx + c = 0$ ，其中 $a \neq 0$ ，稱為 x 的**一元二次方程式**。

例如： $x^2 - 2x - 15 = 0$ 、 $4x^2 - 25 = 0$ 、 $2x^2 + 9x = 0$ 都是一元二次方程式。



(3) 判斷下列哪些式子為一元二次方程式？

甲： $x^2 + 2x + 3 = 2x + 3$ 乙： $x^2 - 2x - 5$

丙： $x^2 + 2x = x^2 - 2x + 3$ 丁： $x(2x - 1) = 6$

解：甲： $x^2 + 2x + 3 = 2x + 3$ 可整理成 $x^2 = 0$ ，為一元二次方程式。

乙： $x^2 - 2x - 5$ 為一元二次式。

丙： $x^2 + 2x = x^2 - 2x + 3$ 可整理成 $4x - 3 = 0$ ，為一元一次方程式。

丁： $x(2x - 1) = 6$ 展開為 $2x^2 - x = 6$ ，可整理成 $2x^2 - x - 6 = 0$ ，為一元二次方程式。

所以甲、丁為一元二次方程式。

(4) 「甲、乙兩數皆為正整數，且乙數為甲數的2倍少3，若甲、乙兩數的乘積為77，則甲、乙兩數分別為何？」

① 假設甲數為 x ，依題意列出方程式？

② 請問此方程式是否為一元二次方程式？

解：① 假設甲數為 x ，乙數為 $2x - 3$ ，其中 x 為正整數且 $2x - 3 > 0$ 。

兩數的乘積 $= x \times (2x - 3)$ ，可列式為 $x(2x - 3) = 77$ 。

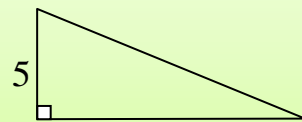
② 將等式展開為 $2x^2 - 3x = 77$ ，

再整理得到 $2x^2 - 3x - 77 = 0$ 為一元二次方程式。

(5) 「如圖，已知直角三角形一股長為5，斜邊長比另一股長多1，請問直角三角形斜邊長為何？」

① 假設斜邊長為 x ，依題意列出方程式？

② 請問此方程式是否為一元二次方程式？

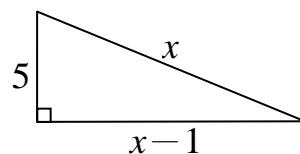


解：① 如圖，假設斜邊長為 x ，另一股長為 $x - 1$ ，其中 $x > 0$ 且 $x - 1 > 0$ 。

由畢氏定理，可列式為 $5^2 + (x - 1)^2 = x^2$ 。

② 將方程式 $5^2 + (x - 1)^2 = x^2$ 展開為 $25 + x^2 - 2x + 1 = x^2$

再整理得到的方程式為 $-2x + 26 = 0$ ，不是一元二次方程式。





隨堂練習

(1) 是非題：判斷下列何者為一元二次方程式，是打○，錯打×。

① _____ $x^2 + 3x = x^2 - 13$

② _____ $2x^2 = 3x$

③ _____ $6x^2 + 15 = 0$

(2) 「甲為正整數，甲數加上 4 後再平方，最後減去甲數的 20 倍，得到 29，請問甲數為多少？」

① 假設甲數為 x ，依題意列出方程式？

② 請問此方程式是否為一元二次方程式？

(3) 「如圖，有一塊長方形草皮，長 30 公尺、寬 18 公尺，在內部規劃等寬的十字走道方便行人通行。已知其餘草皮面積為 448 平方公尺，請問走道寬為多少公尺？」

① 假設走道寬為 x 公尺，依題意列出方程式？

② 請問此方程式是否為一元二次方程式？



◎方程式的解

我們之前學過，如果將某數代入方程式中，會使方程式的等號左右兩邊的值相等，那麼該數就是此方程式的解。

(6) ① 判斷下列何者為 $2x-1=3$ 的解？ (A) $x=0$ (B) $x=1$ (C) $x=2$

② 判斷下列何者為 $3x+2=-x+6$ 的解？ (A) $x=0$ (B) $x=1$ (C) $x=2$

解：① 將 $x=0$ 代入方程式 $2x-1=3$ ，得到 $2 \times 0 - 1 = -1 \neq 3$...等式不成立

將 $x=1$ 代入方程式 $2x-1=3$ ，得到 $2 \times 1 - 1 = 1 \neq 3$...等式不成立

將 $x=2$ 代入方程式 $2x-1=3$ ，得到 $2 \times 2 - 1 = 3$...等式成立

所以 $x=2$ 為 $2x-1=3$ 的解。

② 將 $x=0$ 代入方程式 $3x+2=-x+6$ ，

等號左邊為 $3 \times 0 + 2 = 2$ ，等號右邊為 $0 + 6 = 6$ ， $2 \neq 6$...等式不成立

將 $x=1$ 代入方程式 $3x+2=-x+6$ ，

等號左邊為 $3 \times 1 + 2 = 5$ ，等號右邊為 $-1 + 6 = 5$ ， $5 = 5$...等式成立

將 $x=2$ 代入方程式 $3x+2=-x+6$ ，

等號左邊為 $3 \times 2 + 2 = 8$ ，等號右邊為 $-2 + 6 = 4$ ， $8 \neq 4$...等式不成立

所以 $x=1$ 為 $3x+2=-x+6$ 的解。

(7) ① 判斷下列何者為 $2x^2-3x=9$ 的解？ (A) $x=1$ (B) $x=3$ (C) $x=5$

② 判斷下列何者為 $2x^2-5x+3=x^2+x-2$ 的解？

(A) $x=1$ (B) $x=3$ (C) $x=5$

解：① 將 $x=1$ 代入方程式 $2x^2-3x=9$ ，得到 $2 \times 1^2 - 3 \times 1 = -1 \neq 9$...等式不成立

將 $x=3$ 代入方程式 $2x^2-3x=9$ ，得到 $2 \times 3^2 - 3 \times 2 = 9$...等式成立

將 $x=5$ 代入方程式 $2x^2-3x=9$ ，得到 $2 \times 5^2 - 3 \times 5 = 35 \neq 9$...等式不成立

所以 $x=3$ 為 $2x^2-3x=9$ 的解。

② **方法一**

將 $x=1$ 代入方程式 $2x^2-5x+3=x^2+x-2$ ，

得到 $2 \times 1^2 - 5 \times 1 + 3 = 1^2 + 1 - 2$...等式成立

將 $x=3$ 代入方程式 $2x^2-5x+3=x^2+x-2$ ，

得到 $2 \times 3^2 - 5 \times 3 + 3 \neq 3^2 + 3 - 2$...等式不成立

將 $x=5$ 代入方程式 $2x^2-5x+3=x^2+x-2$ ，

得到 $2 \times 5^2 - 5 \times 5 + 3 = 5^2 + 5 - 2$...等式成立

所以 $x=1$ 和 $x=5$ 都是 $2x^2-5x+3=x^2+x-2$ 的解。

方法二

先將 $2x^2 - 5x + 3 = x^2 + x - 2$ 整理，得 $x^2 - 6x + 5 = 0$ 。

將 $x=1$ 代入方程式 $x^2 - 6x + 5 = 0$ ，得到 $1^2 - 6 \times 1 + 5 = 0 \dots$ 等式成立

將 $x=3$ 代入方程式 $x^2 - 6x + 5 = 0$ ，得到 $3^2 - 6 \times 3 + 5 = -4 \neq 0 \dots$ 等式不成立

將 $x=5$ 代入方程式 $x^2 - 6x + 5 = 0$ ，得到 $5^2 - 6 \times 5 + 5 = 0 \dots$ 等式成立

所以 $x=1$ 和 $x=5$ 都是 $2x^2 - 5x + 3 = x^2 + x - 2$ 的解。

我們發現——

要判斷方程式的解，可以先將方程式做整理，
再來代入 x 值，會較方便計算。



(8) 判斷下列何者為 $(x-2)(x+1)=0$ 的解？

- (A) $x=1$ (B) $x=2$ (C) $x=-1$ (D) $x=-2$

解：將 $x=1$ 代入方程式 $(x-2)(x+1)=0$ ，

得到 $(1-2)(1+1)=-2 \neq 0 \dots$ 等式不成立

將 $x=2$ 代入方程式 $(x-2)(x+1)=0$ ，

得到 $(2-2)(2+1)=0(2-2)(2+1)=0 \dots$ 等式成立

將 $x=-1$ 代入方程式 $(x-2)(x+1)=0$ ，

得到 $(-1-2)(-1+1)=0 \dots$ 等式成立

將 $x=-2$ 代入方程式 $(x-2)(x+1)=0$ ，

得到 $(-2-2)(-2+1)=-4 \neq 0 \dots$ 等式不成立

所以 $x=2$ 和 $x=-1$ 都是 $(x-2)(x+1)=0$ 的解。

這題直接將數字代入等號左邊計算即可，
可以不用整理後再計算。

由例題知，

如果 $A \times B = 0$ ，得到 $A=0$ 或 $B=0$ 。





◎一元二次方程式的解

我們知道，將某數代入方程式中，會使方程式的等號左右兩邊的值相等，那麼該數就是此方程式的解。將某數代入一元二次方程式中，如果能讓方程式的等號成立，那麼這個數就是一元二次方程式的解。

(10) 「有一張長方形紙張，寬比長少 2 公分，且紙張面積為 24 平方公分，請問長方形紙張的長為多少公分？」

解：假設長方形紙張的長為 x 公分，寬為 $(x-2)$ 公尺，其中 $x > 0$ 且 $x-2 > 0$ 。

長方形面積 = 長 \times 寬 = $x(x-2)$ ，

故可列式為 $x(x-2) = 24$ ，將方程式整理為 $x^2 - 2x - 24 = 0$ 。

將 $x = 1, 2, 3, \dots, 9$ 代入 $x^2 - 2x - 24$ 的結果如下表：

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$x^2 - 2x - 24$	-25	-24	-21	-16	-9	0	11	24	39

將 $x = 0, -1, -2, \dots, -7$ 代入 $x^2 - 2x - 24$ 的結果如下表：

x	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0
$x^2 - 2x - 24$	39	24	11	0	-9	-16	-21	-24

我們發現當 $x = 6$ 和 $x = -4$ 時，都可使一元二次方程式 $x^2 - 2x - 24 = 0$ 成立，

$x = 6$ 和 $x = -4$ 都是一元二次方程式 $x^2 - 2x - 24 = 0$ 的解，

因為 x 的範圍為 $x > 0$ 且 $x - 2 > 0$ ，只有 $x = 6$ 滿足此範圍，

所以長方形紙張的長為 6 公分。

由以上表格，我們發現一元二次方程式的解不只 1 個。



(11) 完成下列表格，並找出一元二次方程式 $x^2 - 6x + 5 = 0$ 的解。

x	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$x^2 - 6x + 5$										

x	-5	-4	-3	-2	-1	0
$x^2 - 6x + 5$						

解：

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$x^2 - 6x + 5$	0	-3	-4	-3	0	5	12	21

將 $x=1$ 代入 $x^2 - 6x + 5$ ，得 $1^2 - 6 \times 1 + 5 = 0$ ，

將 $x=2$ 代入 $x^2 - 6x + 5$ ，得 $2^2 - 6 \times 2 + 5 = -3$ ，

將 $x=3$ 代入 $x^2 - 6x + 5$ ，得 $3^2 - 6 \times 3 + 5 = -4$ ，

將 $x=4$ 代入 $x^2 - 6x + 5$ ，得 $4^2 - 6 \times 4 + 5 = -3$ ，

將 $x=5$ 代入 $x^2 - 6x + 5$ ，得 $5^2 - 6 \times 5 + 5 = 0$ ，

將 $x=6$ 代入 $x^2 - 6x + 5$ ，得 $6^2 - 6 \times 6 + 5 = 5$ ，

將 $x=7$ 代入 $x^2 - 6x + 5$ ，得 $7^2 - 6 \times 7 + 5 = 12$ ，

將 $x=8$ 代入 $x^2 - 6x + 5$ ，得 $8^2 - 6 \times 8 + 5 = 21$ 。

x	-5	-4	-3	-2	-1	0
$x^2 - 6x + 5$	60	45	32	21	12	5

將 $x=0$ 代入 $x^2 - 6x + 5$ ，得 $0^2 - 6 \times 0 + 5 = 5$ ，

將 $x=-1$ 代入 $x^2 - 6x + 5$ ，得 $(-1)^2 - 6 \times (-1) + 5 = 12$ ，

將 $x=-2$ 代入 $x^2 - 6x + 5$ ，得 $(-2)^2 - 6 \times (-2) + 5 = 21$ ，

將 $x=-3$ 代入 $x^2 - 6x + 5$ ，得 $(-3)^2 - 6 \times (-3) + 5 = 32$ ，

將 $x=-4$ 代入 $x^2 - 6x + 5$ ，得 $(-4)^2 - 6 \times (-4) + 5 = 45$ ，

將 $x=-5$ 代入 $x^2 - 6x + 5$ ，得 $(-5)^2 - 6 \times (-5) + 5 = 60$ 。

我們發現當 $x=1$ 或 $x=5$ 時， $x^2 - 6x + 5 = 0$ 方程式成立，

所以一元二次方程式 $x^2 - 6x + 5 = 0$ 的解為 $x=1$ 或 $x=5$ 。



由表格知，

當 $x < 1$ 時， $x^2 - 6x + 5$ 的值都會比 $x=1$ 時還大，

且 x 越小， $x^2 - 6x + 5$ 的值越大；

當 $x > 5$ 時， $x^2 - 6x + 5$ 的值都會比 $x=5$ 時還大，

且 x 越大， $x^2 - 6x + 5$ 的值越大；

不可能再找到其它 x 值，使方程式 $x^2 - 6x + 5 = 0$ 成立，

而當 $1 < x < 5$ 時， $x^2 - 6x + 5$ 的值都不為 0，

所以 $x^2 - 6x + 5 = 0$ 的解有 2 個。



小試身手

(1) 是非題：判斷下列何者為一元二次方程式，是打○，錯打×。

① _____ $x^2 + 3x = -x^2 - 5x$

② _____ $x(x-6) + 9 = 0$

③ _____ $5^2 - 6x + 8 = 0$

(2) 「七年級新生有 225 位學生，依每班人數相等方式編班，發現每班的人數剛好是班級數的 3 倍少 2，請問每班的人數為多少人？」

① 假設每班 x 人，依題意列出方程式為何？

② 請問此方程式是否為一元二次方程式？

(3) 「一塊長方形田地的面積為 55 平方公尺，長邊比短邊長 6 公尺，請問短邊長是多少公尺？」

① 假設短邊為 x 公尺，依題意列出方程式為何？

② 請問此方程式是否為一元二次方程式？

(4) 判斷下列何者為 $x(x+6) = 55$ 的解？

(A) $x = -11$ (B) $x = -6$ (C) $x = 5$ (D) $x = 11$

(5) 判斷下列何者為 $x^2 - 7x + 18 = 0$ 的解？

(A) $x = -18$ (B) $x = -2$ (C) $x = 7$ (D) $x = 9$



教育部國民及學前教育署 編

國民中學

學生學習扶助教材

8

年級數學

