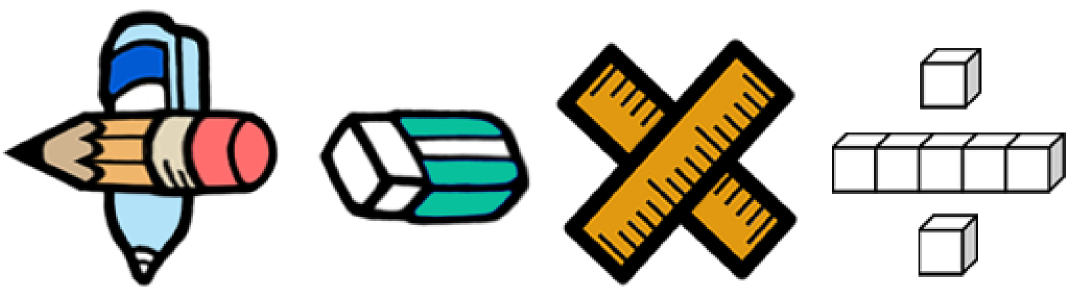
基本學習內容：SC-9-4-1

三內角為 30°-60°-90°及 45°-45°-90°的三角形邊長比

【教師用】



教育部國民及學前教育署 編

中華民國 112 年 8 月

學習內容：

S-9-4 相似直角三角形邊長比值的不變性： 直角三角形中某一銳角的角度決定邊長比值，該比值為不變量，不因相似直角三角形的大小而改變；三內角為 30°-60°-90°，其邊長比記錄為「$1:\sqrt{3}:2$」；三內角為 45°-45°-90°，其邊長比記錄為「$1:1:\sqrt{2}$」。

基本學習內容：

SC-9-4-1 三內角為 30°-60°-90°及 45°-45°-90°三角形邊長比。

基本學習表現：

SCP-9-4-1-1 認識三內角為 30°-60°-90°三角形邊長比為$1:\sqrt{3}:2$。

SCP-9-4-1-2 認識三內角為 45°-45°-90°三角形邊長比為$1:1:\sqrt{2}$。

概要說明：

◎ 基本學習內容 *SC*-9-4-1 為 *SC*-8-6-1 的後續學習概念，故學生應已認識畢氏定理。

本基本學習內容幫助學生認識 30°-60°-90°以及 45°-45°-90°直角三角形之三邊長比例。

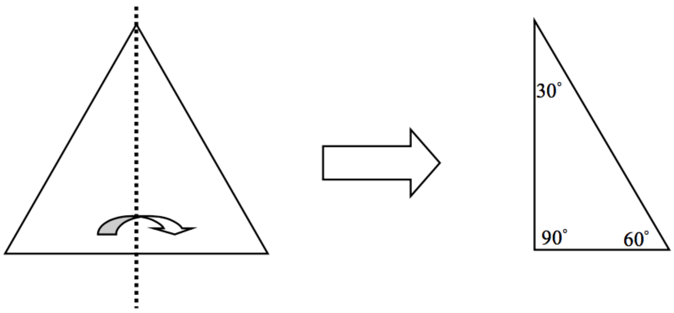
■ 學生應該已經認識直角三角板有兩款，角度分別為 45˚-45˚-90˚及 30˚-60˚-90˚。

■ 建議教師依下列步驟，認識 30°-60°-90°- 三角形之邊長比。

步驟一：將一個正三角形沿著對稱軸對摺，形成兩個全等的三角形。

則對摺後所形成的三角形，可發現它的三個內角分別為 30°-60°-90°，

如下圖。



步驟二：建議教師可多舉例，引導學生觀察出直角三角形三邊長的比例關係。

以問題「若原正三角形的邊長為 2，則對摺後所成的三角形，如下圖。

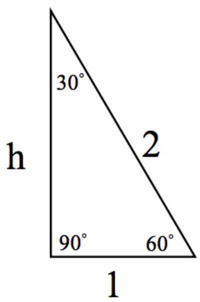
它的三個邊長分別為何？」為例說明。

由畢氏定理得知：$2^2=h^2+1^2$ 得 $h=\pm\sqrt{3}$

已知 $h>0$，故 $h=\sqrt{3}$，即三邊長為 $1,\sqrt{3},2$。

若原正三角形的邊長為 $2k$，

同理可得此時三邊長為 $k,\sqrt{3}k,2k$。



■ 本基本學習內容放在九年級的主要原因是九年級才引入連比，要幫助學生要透過任兩邊的比，教師應多舉幾個直角三角形，讓學生發現只要是 30°-60°-90°的直角三角形，其邊長比皆為 $1:\sqrt{3}:2$。教師應多舉幾個直角三角形，讓學生發現只要是 45°-45°-90° 的直角三角形，其邊長比皆為 $1:1:\sqrt{2}$。

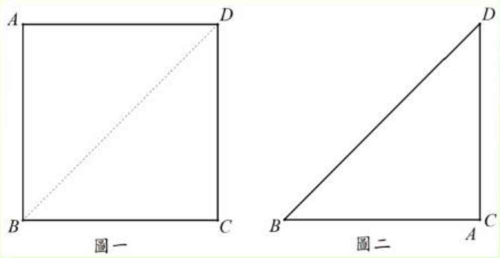
◎特殊直角三角形的邊長比

(1) 小明將右圖一的正方形色紙 $ABCD$ 沿著對角線 $\overline{BD}$ 對摺後成為右圖二的圖形，如果正方形 $ABCD$ 邊長為 20 公分，請問：

① $\overline{BD}$ 為幾公分？

② $\overline{BC}:\overline{CD}:\overline{BD}=$？

(請將比的第 1 項化為 1)



解：① 因為△BCD 為直角三角形，由畢氏定理可得 $\overline{BD}^2=\overline{BC}^2+\overline{CD}^2$

$$\overline{BD}=\sqrt{\overline{BC}^2+\overline{CD}^2}=\sqrt{10^2+10^2}=\sqrt{200}=\sqrt{100\times 2}=10\sqrt{2}\text{(公分)}$$

② $\overline{BC}:\overline{CD}:\overline{BD}=10:10:10\sqrt{2}=1:1:\sqrt{2}$

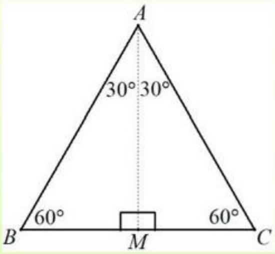
(2) 小明將右圖為的正三角形色紙對摺之再展開的圖形，其中 $\overline{AM}$ 為對摺後的摺痕，如果正三角形的邊長為 20 公分，請問：

① $\overline{BM}$ 為幾公分？

② $\overline{AM}$ 為幾公分？

③ $\overline{BM}:\overline{AM}:\overline{AB}=$？

(請將比的第 1 項化為 1)



解：① 由圖可知 $\overline{BM}=\overline{CM}=\frac{1}{2}\overline{BC}=\frac{1}{2}\times 20=10$(公分)。

② 因為△ABM 為直角三角形，由畢氏定理可得 $\overline{AM}^2=\overline{AB}^2-\overline{BM}^2$

$$\overline{AM}=\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{BM}^2}=\sqrt{20^2-10^2}=\sqrt{300}=\sqrt{100\times 3}=10\sqrt{3}\text{(公分)}$$

③ $\overline{BM}:\overline{AM}:\overline{AB}=10:10\sqrt{3}:20=1:\sqrt{3}:2$

教材內容說明：

1. 本教材第 1 頁的教學重點是計算 45°-45°-90°三角形及 30°-60°-90°三角形其邊長比。
2. 第(1)題給定邊長 20 公分的正方形 $ABCD$，要求學生回答兩個子問題：子問題①：算出正方形的對角線 $\overline{BD}$ 長度

   子問題②：計算△BCD 的三邊長連比。

   子問題①解法：

   教師可以引導學生用畢氏定理計算△BCD 的斜邊長，斜邊=$\sqrt{股^2+股^2}$。

   子問題②解法：

   教師可以引導學生將三邊長的比記錄為連比，並化為最簡整數比。
3. 第(2)題給定邊長 20 公分的正三角形及其對摺摺痕，要求學生回答三個子問題：

   子問題①：計算 $\overline{BM}$ 的長度。

   子問題②：計算 $\overline{AM}$ 的長度。

   子問題③：計算 $\overline{BM}:\overline{AM}:\overline{AB}$=？

   子問題①解法：因為對摺，所以 $\overline{BM}=\overline{CM}=\frac{1}{2}\overline{BC}$。

   子問題②解法：由畢氏定理，股^2= 斜邊^2－另一股^2，

   所以 $\overline{AM}=\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{BM}^2}=\sqrt{300}=10\sqrt{3}$，過程中涉及根式的化簡，

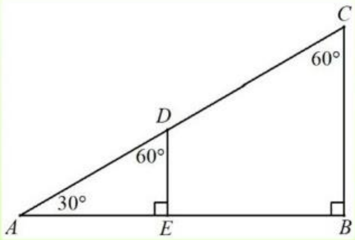
   學生可用完全平方因數或標準分解式將根式化為最簡根式。

   子問題③解法：依題意請同學將連比首項化為 1。

(3) 如右圖，直角三角形 ABC 中，$\angle A=30°$，$\angle ADE=\angle ACB=60°$，$\angle AED=\angle B=90°$，請證明：

① $\overline{DE}:\overline{AE}=\overline{CB}:\overline{AB}$

② $\overline{DE}:\overline{AD}=\overline{CB}:\overline{AC}$



證明：① $\triangle AED$ 和 $\triangle ABC$ 中，

因為 $\angle A=\angle A=30°$（共用角）…(1)

$\angle ADE=\angle ACB=60°$ ……(2)

根據三角形 AA 相似性質，由(1)(2)可得 $\triangle AED\sim\triangle ABC$

由對應邊成比例得 $\overline{DE}:\overline{CB}=\overline{AE}:\overline{AB}$（設比值為 r）

$\overline{DE}=r\times\overline{CB}$，$\overline{AE}=r\times\overline{AB}$，故 $\overline{DE}:\overline{AE}=(r\times\overline{CB}):(r\times\overline{AB})=\overline{CB}:\overline{AB}$

② 承①，由對應邊成比例得 $\overline{DE}:\overline{CB}=\overline{AD}:\overline{AC}$（設比值為 k）

$\overline{DE}=k\times\overline{CB}$，$\overline{AD}=k\times\overline{AC}$，故 $\overline{DE}:\overline{AD}=(k\times\overline{CB}):(k\times\overline{AB})=\overline{CB}:\overline{AB}$

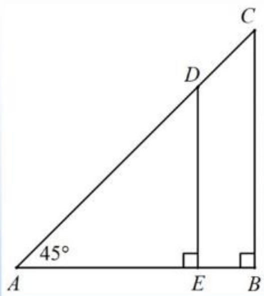
隨堂練習

如右圖，直角三角形 ABC 中，$\angle A=45°$

$\angle AED=\angle B=90°$，請證明：

① $\overline{DE}:\overline{AE}=\overline{CB}:\overline{AB}$

② $\overline{DE}:\overline{AD}=\overline{CB}:\overline{AC}$



【證明】① $\triangle AED$ 和 $\triangle ABC$ 中，

因為 $\angle A=\angle A=45°$（共用角）…(1)

$\angle ADE=\angle B=90°$ …(2)

根據三角形 AA 相似性質，

由(1)(2)可得 $\triangle AED\sim\triangle ABC$

得 $\overline{DE}:\overline{CB}=\overline{AE}:\overline{AB}$（設比值為 r）

設 $\overline{DE}=r\overline{CB}$，$\overline{AE}=r\overline{AB}$，

故 $\overline{DE}:\overline{AE}=r\overline{CB}:r\overline{AB}=\overline{CB}:\overline{AB}$

② 同理①，證明略。

2

教材內容說明：

1. 本教材第 2~3 頁的教學重點是說明任意 45°-45°-90°三角形的邊長比皆為$1:1:\sqrt{2}$，任意 30°-60°-90°三角形的邊長比皆為$1:\sqrt{3}:2$。
2. 第(3)題給定兩個不全等的 30°-60°-90°三角形$\triangle AED$與$\triangle ABC$，其中 30°角及 90°角為共用角，要求學生回答兩個子問題：

   子問題①：證明 30°對應邊的比等於 60°對應邊的比。

   子問題②：證明 30°對應邊的比等於 90°對應邊的比。

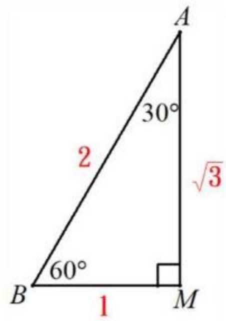
   子問題①解法：教師可以引導學生找到兩組對應角相等(30°與 60°)，
   根據三角形 AA 相似性質得到對應邊成比例。

   子問題②解法：教師可以引導學生找到兩組對應角相等(30°與 90°)，
   根據三角形 AA 相似性質得到對應邊成比例。
3. 本頁下方隨堂練習給定兩個不全等的 45°-45°-90°三角形$\triangle AED$與$\triangle ABC$，其中 45°角及 90°角為共用角，要求學生回答兩個子問題：

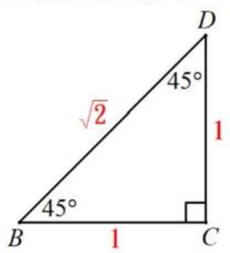
   子問題①：證明 45°對應邊的比等於另一個 45°對應邊的比。

   子問題②：證明 45°對應邊的比等於 90°對應邊的比。

- 例題(2)的$\triangle ABM$中，$\overline{BM}:\overline{AM}:\overline{AB}=1:\sqrt{3}:2$ 由三角形的「小角對小邊、大角對大邊」的性質可知：
  ① 30°所對的邊為 1
  ② 60°所對的邊為$\sqrt{3}$
  ③ 90°所對的邊為 2
- 由例題(3)的證明可知：
  兩個相似直角三角形，
  其某兩邊的邊長比會相等。
- 可得只要是內角為 30°-60°-90°的直角三角形，其三邊的邊長比為 $1:\sqrt{3}:2$(由小到大)



- 例題(1)的$\triangle BCD$中，$\overline{BC}:\overline{CD}:\overline{BD}=1:1:\sqrt{2}$，由三角形的「小角對小邊、大角對大邊」的性質可知：
  ① 45°所對的邊為 1
  ② 90°所對的邊為$\sqrt{2}$
- 同理可得只要是內角為 45°-45°-90°的直角三角形，其三邊的邊長比為$1:1:\sqrt{2}$(由小到大)



教材內容說明：

1. 本教材第 2~3 頁的教學重點是說明任意 45°-45°-90°三角形的邊長比皆為$1:1:\sqrt{2}$，任意 30°-60°-90°三角形的邊長比皆為$1:\sqrt{3}:2$。
2. 本頁上方區塊內容在幫助學生理解 30°-60°-90°三角形的邊長比為$1:\sqrt{3}:2$，而且根據「小角對小邊、大角對大邊」可知：

   ① 30°所對的邊為 1。

   ② 60°所對的邊為$\sqrt{3}$。

   ③ 90°所對的邊為 2。

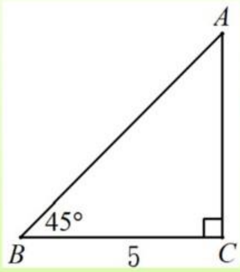
   ● 教師可以建議學生 30°-60°-90°三角形的三邊長比由小到大排列。
3. 本頁下方區塊內容在幫助學生理解 45°-45°-90°三角形的邊長比為$1:1:\sqrt{2}$，而且根據「小角對小邊、大角對大邊」可知：

   ① 45°所對的邊為 1。

   ② 90°所對的邊為$\sqrt{2}$。

   ● 教師可以建議學生 45°-45°-90°三角形的三邊長比由小到大排列。

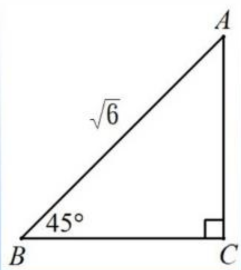
(4) 如右圖，直角三角形 ABC 中，$\angle C=90°$，
$\angle A=45°$，$\overline{BC}=5$，請問：
① $\overline{AC}=?$
② $\overline{AB}=?$



解： ① 因為$\triangle ABC$ 為 45°-45°-90°的直角三角形，所以$\overline{BC}:\overline{AC}:\overline{AB}=1:1:\sqrt{2}$
得$\overline{BC}:\overline{AC}=1:1$，$5:\overline{AC}=1:1$，內項乘積=外項乘積，得$\overline{AC}=5$。
② 同理$\overline{BC}:\overline{AB}=1:\sqrt{2}$，$5:\overline{AB}=1:\sqrt{2}$，內項乘積=外項乘積，得$\overline{AB}=5\sqrt{2}$。

隨堂練習

如右圖，直角三角形ABC中，$\angle C=90°$，
$\angle A=45°$，$\overline{AB}=\sqrt{6}$，求$\overline{BC}=?$
答：$\overline{BC}=\sqrt{3}$



教材內容說明：

1. 本教材第 4~5 頁的教學重點是幫助學生利用 45°-45°-90°三角形的邊長比及 30°-60°-90°三角形的邊長比解題。
2. 第(4)題給定直角三角形的一股長為 5 及一角為 45°，要求學生回答兩個子問題。

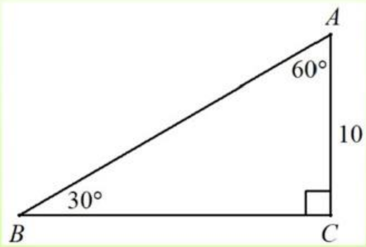
   子問題①：計算另一股的長度。

   子問題②：計算斜邊的長度。

   子問題①解法：教師可以引導學生利用 45°-45°-90°三角形的邊長比得到 $\overline{BC}:\overline{AC}=1:1$，利用「內項乘積=外項乘積」得到 $\overline{AC}=5$。

   子問題②解法：教師可以引導學生利用 45°-45°-90°三角形的邊長比得到 $\overline{BC}:\overline{AB}=1:\sqrt{2}$，利用「內項乘積=外項乘積」得到 $\overline{AC}=5\sqrt{2}$。
3. 本頁下方隨堂練習給定直角三角形的斜邊長為 $\sqrt{6}$ 及一角為 45°，要求學生計算股的長度。

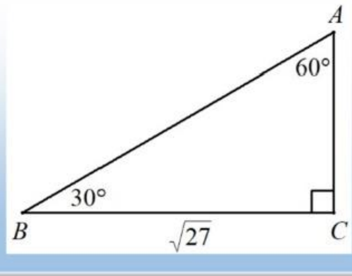
(5) 如右圖，直角三角形 ABC 中，
$\angle C = 90°$，$\angle A = 30°$，
$\overline{AC} = 10$，請問：
① $\overline{BC} = ?$
② $\overline{AB} = ?$



解：① 因為$\triangle ABC$ 為 45°-45°-90°的直角三角形。
所以$\overline{BC} : \overline{AC} : \overline{AB} = 1:1:\sqrt{2}$
得$\overline{BC} : \overline{AC} = 1:1$，$5 : \overline{AC} = 1:1$，內項乘積=外項乘積，得$\overline{AC} = 5$。
② 同理$\overline{BC} : \overline{AB} = 1:\sqrt{2}$，$5 : \overline{AB} = 1:\sqrt{2}$，內項乘積=外項乘積，得$\overline{AB} = 5\sqrt{2}$。

隨堂練習

如右圖，直角三角形ABC中，$\angle C = 90°$，
$\angle B = 30°$，$\overline{AC} = \sqrt{27}$，請問：
① $\overline{AC} = ?$
② $\overline{AB} = ?$
答：① $\overline{AC} = 3$　② $\overline{BC} = \sqrt{3}$



教材內容說明：

1. 本教材第 5 頁的教學重點是幫助學生利用 30°-60°-90°三角形的邊長比解題以及小試身手。
2. 第(5)題給定直角三角形的一股長為 10 及一角為 30°，要求學生回答兩個子問題。

   子問題①：計算另一股的長度。

   子問題②：計算斜邊的長度。

   子問題①解法：教師可以引導學生利用 30°-60°-90°三角形的邊長比得到 $\overline{AC}:\overline{BC}=1:\sqrt{3}$，利用「內項乘積=外項乘積」得到 $\overline{BC}=5\sqrt{3}$。

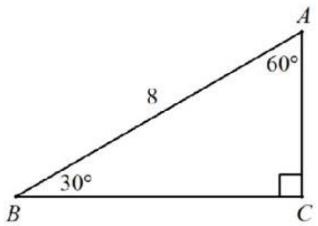
   子問題②解法：教師可以引導學生利用 30°-60°-90°三角形的邊長比得到 $\overline{AC}:\overline{AB}=1:2$，利用「內項乘積=外項乘積」得到 $\overline{AB}=20$。
3. 本頁上方隨堂練習給定直角三角形的一股長為 $\sqrt{27}$ 及一角為 30°，要求學生回答兩個子問題：

   子問題①：計算另一股的長度。

   子問題②：計算斜邊的長度。

小試身手

(1) 如右圖，直角$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$\angle B=30°$，$\overline{AB}=8$，請問$\triangle ABC$ 的面積=？



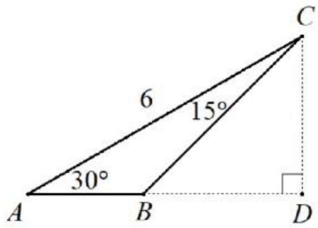
答：$\triangle ABC$ 的面積=$8\sqrt{3}$

(2) 如右圖，$\triangle ABC$ 中，$\angle C=15°$，$\angle A=30°$，$\overline{AC}=6$，請問：

① $\overline{CD}$=？

② $\overline{BC}$=？

③ $\overline{AB}$=？



答：① $\overline{CD}=3$ ② $\overline{BC}=3\sqrt{2}$

③ $\overline{AB}=3\sqrt{3}-3$

教材內容說明：

1. 本頁小試身手要求學生利用 45°-45°-90°三角形及 30°-60°-90°三角形的邊長比練習解題。

   第(1)題：給定直角三角形的斜邊長為 8 及一角為 30°，要求學生計算三角形的面積：

   第(2)題：給定△ABC 兩個角 $\angle A$=30°，$\angle C$=15°，以及 $\overline{AC}=6$，

   要求學生回答三個子問題：

   子問題①：計算 C 點至 $\overline{AB}$ 的距離。

   子問題②：計算 $\overline{BC}$ 的長度。

   子問題③：計算 $\overline{AB}$ 的長度。

   - 教師可以提示學生應用外角定理（外角等於三角形不相鄰的兩個內角和）得到 $\angle CBD$=45°，進而得到△ABC 為 45°-45°-90°三角形。

教育部國民及學前教育署 編

國民中學 學生學習扶助教材 9 年級數學