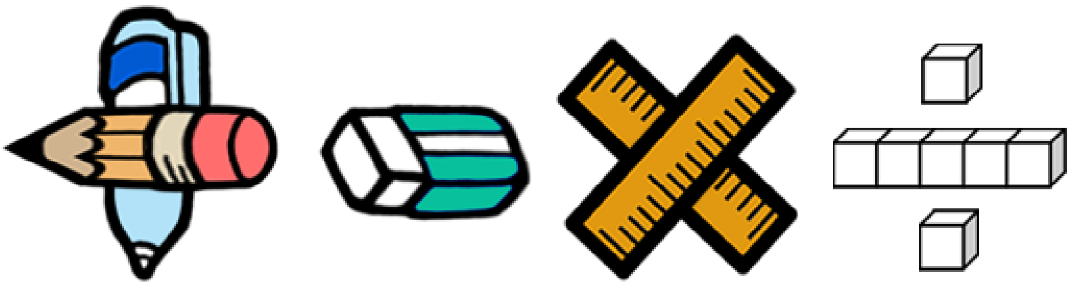
基本學習內容：SC-9-6-2

圓周角的度數等於所對弧度數的一半

【教師用】



教育部國民及學前教育署 編

中華民國 112 年 8 月

學習內容：

S-9-6 圓的幾何性質：圓心角、圓周角與所對應弧的度數三者之間的關係；
圓內接四邊形對角互補；切線段等長。

基本學習內容：

SC-9-6-2 圓周角的度數等於所對弧度數的一半。

基本學習表現：

SCP-9-6-2-1 認識圓周角的度數等於所對弧度數的一半。

SCP-9-6-2-2 認識同一弧所對圓周角度數都是所對圓心角度數的一半。

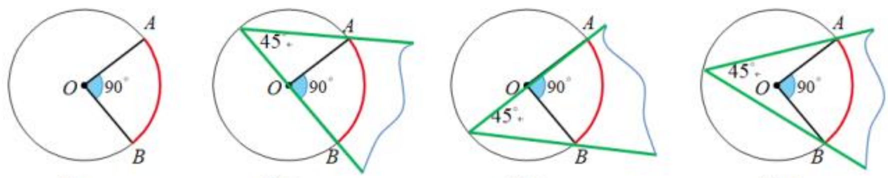
SCP-9-6-2-3 認識半圓的圓周角是直角。

SCP-9-6-2-2 認識圓內接四邊形的對角互補。

概要說明：

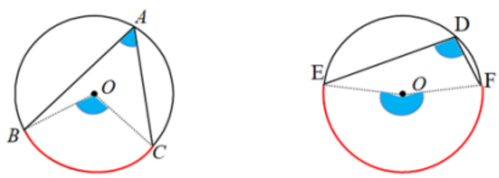
- 基本學習內容 SC-9-6-2 為 SC-9-6-1 的後續學習概念，故學生應已認識圓心角的度數與所對弧的度數。
- 學生不易理解「圓周角角度為所對弧度數的一半」，建議教學時可進行操作活動。

  例：如下圖左，已知圓心角 $\angle AOB = 90$ 度，拿一張白紙將直角對摺(即摺出 45 度角)，並將 45 度角紙張的頂點在圓周上，一邊擺放在通過 OB 位置，可以發現 另一邊會通過 A 點的位置 (如下圖二)，接著；若將 45 度角的紙張另一邊擺放在通 過 OA 位置，可以發現另一邊會通過 B 點的位置 (如下三)；將 45 度角的紙張擺放 在圓周上任一點，我們可以發現該角度兩邊會通過 A 和 B 點的位置 (如下圖四)， 來引導學生觀察發現「圓周角角度為所對弧度數的一半」。

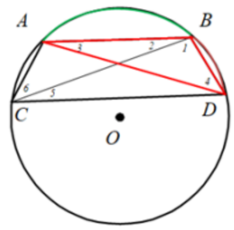


圖一　圖二　圖三　圖四

  例：如下兩圖，已知圓周角 $\angle BAC$ 及 $\angle EDF$，用量角器測量圓周角 $\angle BAC$、 $\angle EDF$ 以及圓心角 $\angle BOC$、$\angle EOF$ 的角度，並引導學生觀察發現 $\angle BOC$ 與 $\angle BAC$ 關係及 $\angle EOF$ 與 $\angle EDF$ 關係，讓學生發現 $\angle BOC$ 與 $\angle BAC$ 都對 BC 弧， 圓周角 $\angle BAC$ 為圓心角 $\angle BOC$ 之一半；同樣的，$\angle EOF$ 與 $\angle EDF$ 都對 EF 弧， 圓周角 $\angle EDF$ 也為圓心角 $\angle EOF$ 之一半，進而讓學生發現圓周角角度為所對弧 度數的一半。



- 學生不易理解「圓內接四邊形的對角互補」，如下圖，建議教學時可透過由△ABD 內角和 180°，得到 $\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4=180^\circ$，對 BD 弧之圓周角 $\angle 3=\angle 5$，對 AB 弧之圓周角 $\angle 6=\angle 4$，我們可以得到 $\angle 1+\angle 2+\angle 5+\angle 6=180^\circ$，得知 $\angle ABD+\angle ACD=180^\circ$，故圓內接四邊形的對角互補。



「弧」、「扇形」、「圓心角」、「圓內角」、「圓外角」和「圓周角」的意義

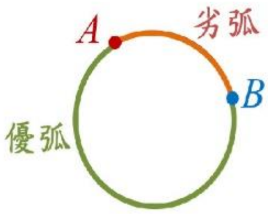
「弧」

在圓 O 上任意取兩個點 A、B，把圓分成兩個部份，這兩個部份都稱為弧。

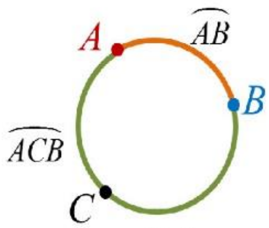
如圖一，如果兩個弧大小不一樣，較大的弧稱為優弧、較小的弧稱為劣弧。

如圖二，我們稱弧 AB 時指的是劣弧，記為 $\overset{\frown}{AB}$ 或 $\overset{\frown}{BA}$，

要表示優弧時，會在優弧上再取一點 C，將優弧記為 $\overset{\frown}{ACB}$ 或 $\overset{\frown}{BCA}$。



圖一



圖二

「扇形」

由圓心 O 和兩條半徑以及所對的弧所形成的圖形稱為扇形，

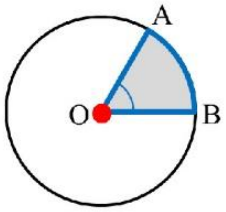
如圖三～圖五的灰色區域，都稱為扇形。

「圓心角」

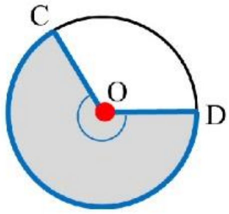
在扇形中，兩條半徑所夾的角稱為圓心角，

如圖三的 $\angle AOB$ 、圖四的 $\angle COD$ 和圖五的 $\angle EOF$ 都是圓心角。

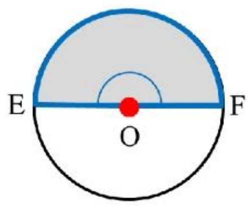
因為周角＝360°，二分之一圓的圓心角為 180°，所以 $\angle EOF = 180°$。



圖三



圖四



圖五

教材內容說明明：

1. 本教材第 1~2 頁的教學重點在複習本單元會使用到的圓相關部份的定義。

2. 「弧」、「扇形」、「圓心角」的定義與性質：

弧：在圓上任意取兩點，此兩點將圓分成兩個部份，這兩個部份都稱為弧。

扇形：由圓心和兩條半徑以及所對的弧所形成的圖形稱為扇形。

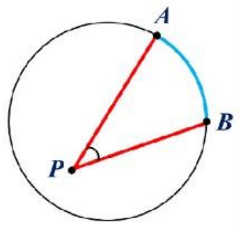
圓心角：在扇形中，兩條半徑所夾的角稱為圓心角。

「圓內角」

給定任意一弧，以及圓內一點，將此點與弧的兩端點連線，

所得的角稱為該弧所對的圓內角。

如圖六，$\angle APB$ 就是 $\overset{\frown}{AB}$ 所對的圓內角。



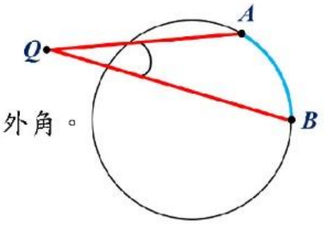
圖六

「圓外角」

給定任意一弧，以及圓外一點，與弧的兩端點連線，

所得的角兩邊與圓均有兩個交點，稱為該弧所對的圓外角。

如圖七，$\angle AQB$ 就是 $\overset{\frown}{AB}$ 所對的圓外角。



圖七

「圓周角」

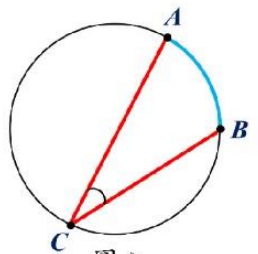
給定任意一弧，以及在圓周上而且不在 $\overset{\frown}{AB}$ 上的任意一點與弧的兩端點連線，

所得的角稱為該弧所對的圓周角。

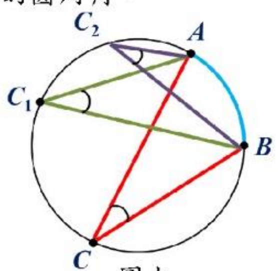
如圖八，C 點在圓周上，$\angle ACB$ 就是 $\overset{\frown}{AB}$ 所對的圓周角。

如圖九，如果 C 點在圓周上移動，得到 C_1、C_2，連接 C_1、C_2 與的兩端點，

所形成的 $\angle AC_1B$、$\angle AC_2B$，也是 $\overset{\frown}{AB}$ 所對的圓周角。



圖八



圖九

教材內容說明：

1. 本教材第 1~2 頁的教學重點在說明本單元會使用到的圓相關部份的定義。

2. 「圓內角」的意義：

   給定任一弧以及圓內一點，將此點與弧的兩點連線，所得的角稱為該弧所對的圓內角。

3. 「圓外角」的意義：

   給定任一弧以及圓外一點，將此點與弧的兩點連線，所得的角兩邊與圓均有兩個交點，稱為該弧所對的圓外角。

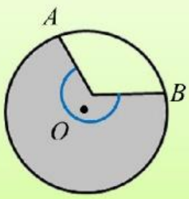
4. 「圓周角」的意義：

   給定任一弧以及在圓周上而且不在 AB 上的任意一點與弧的兩端點連線，所得的角稱為該弧所對的圓周角。

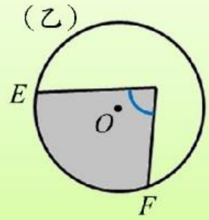
   - 雖然現行課綱已不介紹圓內角和圓外角的圓冪性質，但為了幫助學生更清楚圓周角的意義，本教材仍介紹圓內角和圓外角的意義。
   - 介紹圓內角、圓外角、圓周角時，建議教師引導學生依定義畫出對應的角，再與教材附圖對照是否相同。

(1) 說說看，哪一個是圓 O 的圓心角？

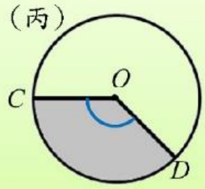
（甲）



（乙）



（丙）



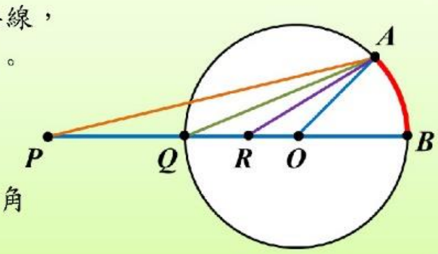
解：

<u>小盛</u>說：圖形(甲)和圖形(乙)的灰色區域不是扇形，所以夾角不是圓心角。
圖形(丙)的灰色區域是扇形，所以∠COD 是圓心角，故選(丙)。

(2) 如右圖，已知圓心 O 和 P、Q、R、B 點共線，且 P 點在圓外、Q 點在圓上、R 點在圓內。

① 說說看，AB 所對的圓心角、圓內角、圓外角與圓周角分別是哪一個角？

② 請將 AB 所對的圓心角、圓內角、圓外角與圓周角由大到小排列。



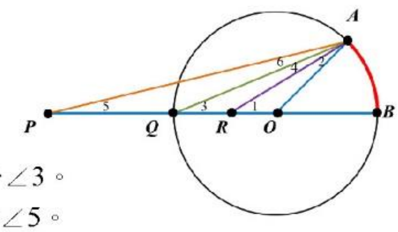
解：

① <u>沂穎</u>說：我知道，

因為 O 點是圓心，所以∠AOB 就是 AB 所對的圓心角；
因為 P 點在圓外，所以∠APB 就是 AB 所對的圓外角；
因為 Q 點在圓上，所以∠AQB 就是 AB 所對的圓周角；

② <u>品芸</u>說：如右圖，從外角定理可以知道，

∠AOB 是△ARO 的外角，
所以∠AOB>∠ARB＝∠1。
∠1 是△ARQ 的外角，所以∠1>∠3。
∠3 是△APB 的外角，所以∠3>∠5。
所以∠AOB>∠ARB>∠AQB>∠APB。



教材內容說明：

1. 本教材第 3 頁的教學重點是幫助學生理解同一弧所對的圓心角、圓內角及圓外角的大小關係。
2. 第(1)題給定甲、乙、丙三個圖形，要求學生判斷哪一個圖是圓心角。

   本教材提供解法如下：

   教師引導學生從「扇形的夾角是圓心角」找到答案。

   只有圖形(丙)的灰色區域是扇形，所以夾角是圓心角。
3. 第(2)題給定圓心 O 和 P、Q、R、B 點共線，且 P 點在圓外、Q 點在圓上、R 點在圓內，包含 2 個子問題。

   子問題①：要求學生判斷 AB 所對的圓心角、圓內角、圓外角與圓周角分別是哪一個。

   子問題②：要求學生將 AB 所對的圓心角、圓內角、圓外角與圓周角由大到小排列。

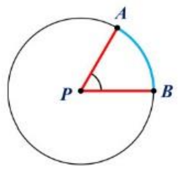
   本教材提供解法如下：

   子問題①：因為 O、P、Q 三點分別在圓心、圓外及圓上，判斷$\angle$AOB、$\angle$APB、$\angle$AQB 分別為圓心角、圓外角及圓周角。

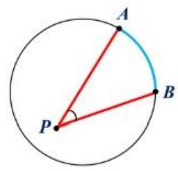
   子問題②：教師引導學生從外角定理來看，可以發現 AB 所對的圓心角>圓內角>圓外角>圓周角。

   - 若學生已經從直觀發現同一弧所對的圓心角>圓內角>圓外角>圓周角，教師可依學生需求決定是否再以外角定理詳細說明。

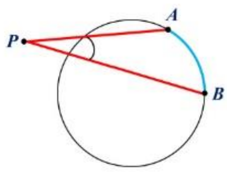
1. 給定任意一弧，
   (1) 如圖一，P 點在圓心，$\angle APB$ 是圓心角。
   (2) 如圖二，P 點在圓內，$\angle APB$ 是圓內角。
   (3) 如圖三，P 點在圓外，$\angle APB$ 是圓外角。
   (4) 如圖四，P 點在圓上，$\angle APB$ 是圓周角。



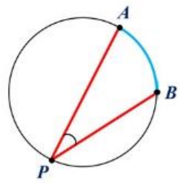
圖一



圖二

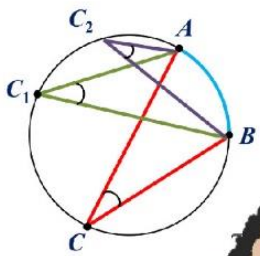


圖三



圖四

2. 同一弧所對的圓心角只有一個，
   但是同一弧所對的圓周角可以有很多個。
   如右圖，
   $\angle ACB$、$\angle AC_1B$、$\angle AC_2B$
   都是 $\overset{\frown}{AB}$ 所對的圓周角。



教材內容說明：

1. 本教材第 4 頁的教師提示重點包含兩個重點，第一點是同一圓弧所對的各類角定義，第二點是同一圓弧所對圓心角只有一個，但是圓周角有很多個。
2. 本頁教師提示重點在說明兩個重點：

(1)任意一弧與 P 點的連線會因為 P 點的位置得到不同定義的角。

P 點在圓心，與弧的兩點端連線，形成圓心角；

P 點在圓內，與弧的兩點端連線，形成圓內角；

P 點在圓外，與弧的兩點端連線，形成圓外角；

P 點在圓上，與弧的兩點端連線，形成圓周角。

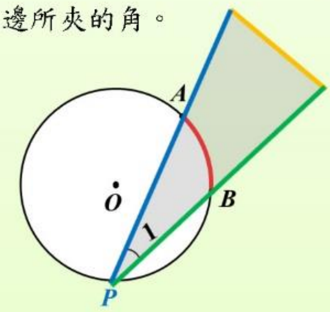
(2)同一弧所對的圓心角只有一個；同一弧所對的圓周角有很多個。

- 教師要檢查學生是否理解各類角的定義，可以給定 P 點位置(可落在圓心、圓內部、圓周上或圓外部)，要求學生畫出其對應的角，並說明對應的角是屬於哪一類角。

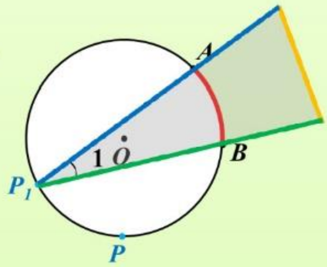
(3) 如圖，圓 O 上有一個 AB。

拿出附件一的三角形紙片，∠1 是藍色邊與綠色邊所夾的角。

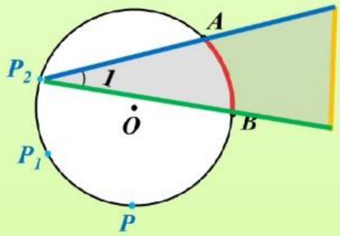
①如右圖，將三角形的頂點放在圓周上的 P 點，
移動三角形紙片，使得圓弧一端的 A 點
落在三角形的藍色邊上，此時發現圓弧的
另一端 B 點會落在三角形的綠色邊上，
所以 AB 所對的圓周角 ∠APB＝∠1。



②如右圖，沿著圓周移動三角形，重覆步驟①，
使得三角形頂點落在圓周上的 P_1 位置，
並保持圓弧的 A 點落在三角形的藍色邊上，
B 點落在三角形的綠色邊上，
所以 AB 所對的圓周角 $\angle AP_1B = \angle 1$。



③給定 AB 對的圓周角 $\angle AP_2B$，重覆步驟②，
所以 AB 所對的圓周角 $\angle AP_2B = \angle 1$。

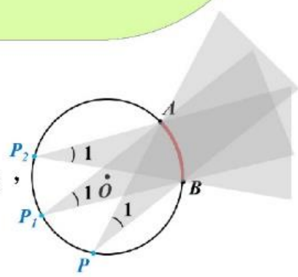


說說看，

AB 所對的圓周角有很多個，它們的角度都相等嗎?

解：

因為 $\angle AP_1B$、$\angle AP_2B$、$\angle AP_3B$ 都等於 ∠1，
如果移動三角形紙片，將三角形的頂點沿著圓周移動，
可以發現 AB 所對的圓周角都等於 ∠1，
所以它們的角度都相等。



教材內容說明：

1. 本教材第 5~6 頁的教學重點在透過操作活動幫助學生觀察到同一弧所對的圓周角都會相等。
2. 第(3)題給定圓 O 上的 AB，要求學生拿出附件一的三角形紙片，跟著步驟①②③操作，判斷同一弧所對的圓周角是否相等。

   本教材提供解法步驟如下：

   ①教師引導學生操作手上附件，將 AB 的 A 點落在三角形紙片的藍色邊，
   B 點落在三角形的綠色邊上。
   此時 AB 所對的圓周角為∠APB，∠APB＝∠1。

   ②持續移動手上的三角形，重覆步驟①，將三角形的頂點落在圓周上的 P_1，
   並保持 AB 的 A 點落在三角形紙片的藍色邊上，B 點落在三角形的綠色邊上。
   此時 AB 所對的圓周角為 $\angle AP_1B$，$\angle AP_1B = \angle 1$。

   ③持續移動手上的三角形，重覆步驟②，將三角形的頂點落在圓周上的 P_2，
   並保持 AB 的 A 點落在三角形紙片的藍色邊上，B 點落在三角形的綠色邊上。
   此時 AB 所對的圓周角為 $\angle AP_2B$，$\angle AP_2B = \angle 1$。

   從上列步驟發現，$\angle APB = \angle AP_1B = \angle AP_2B = \angle 1$，所以 AB 所對的圓周角都相等。

隨堂練習

如下圖，圓 O 上有一個$\overset{\frown}{CD}$。

拿出附件二的三角形紙片，∠1 是紫色邊與黃色邊所夾的角，∠1 是鈍角。

①將三角形的頂點放在圓周上的 P 點，移動三角形紙片，

使得圓弧一端的 C 點落在三角形的紫色邊上，

另一端的 B 點落在三角形的黃色邊上，

所以$\overset{\frown}{CD}$所對的圓周角∠APB＝∠1。

②沿著圓周移動三角形，重覆步驟①，

使得三角形頂點落在圓周上的 P_1 位置，

並保持圓弧的 C 點落在三角形的藍色邊上，

D 點落在三角形的綠色邊上，所以∠AP_1B＝∠1。

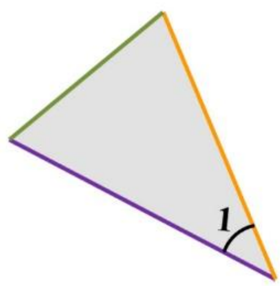
③給定$\overset{\frown}{CD}$對的圓周角∠AP_2B，重覆步驟②，

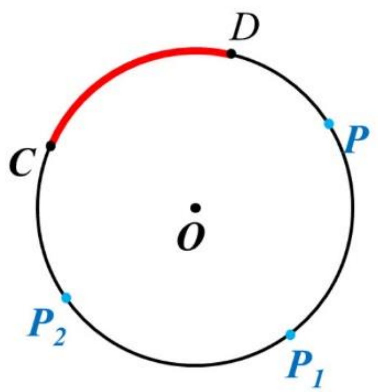
可以發現∠AP_2B＝∠AP_1B。

說說看，

$\overset{\frown}{CD}$所對的圓周角有很多個，它們的角度都相等嗎? 答：都相等。

附件二





教材內容說明：

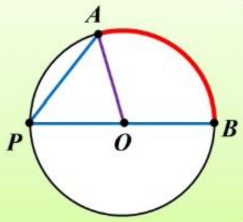
1. 本教材第 5~6 頁的教學重點在透過操作活動幫助學生觀察到同一弧所對的圓周角都會相等。
2. 本頁隨堂練習要求學生利用附件二檢驗 *CD* 所對的圓周角是否都相等。
   - 建議教師讓學生上台示範，透過附件再次確認學生理解同一弧所對的圓周角都相等的概念。

★圓心在圓周角的邊上

(4) 如右圖，∠APB 是 $\overset{\frown}{AB}$ 所對的圓周角，

∠AOB 是 $\overset{\frown}{AB}$ 所對的圓心角，

說說看，∠APB 和∠AOB 的角度有什麼關係?



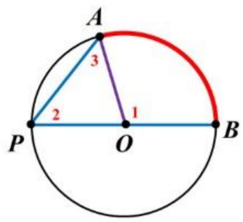
解：

小璇說：∠1 是△AOP 的外角，

利用外角定理，

三角形的任意外角會等於不相鄰的兩個內角和，

所以我知道∠1＝∠2＋∠3 …(1)



還有，因為$\overline{OA}=\overline{OP}$＝半徑，

所以△AOP 是等腰三角形，可以推得∠2＝∠3 …(2)

我把第(2)式代入第(1)式，

結果發現∠1＝∠2＋∠2＝2∠2

所以可以推得∠2＝$\frac{1}{2}$∠1，

也就是∠APB＝$\frac{1}{2}$∠AOB。

從這個例子來看，

我們可以說圓周角∠APB 是所對圓心角∠AOB 的一半。

教材內容說明：

1. 本教材第 7~10 頁的教學重點是幫助學生理解圓周角是圓心角的一半。
2. 第(4)題給定∠APB 為 $\overset{\frown}{AB}$ 所對的圓周角，∠AOB 為 $\overset{\frown}{AB}$ 所對的圓心角，

   要求學生說說看∠APB 和∠AOB 的角度有什麼關係。

   本教材提供解法如下：

   教師利用外角定理說明「$\angle APB = \frac{1}{2}\angle AOB$」。

   ① $\overset{\frown}{AB}$ 所對的圓心角為∠1 且為△AOP 的外角，所以∠1＝∠2＋∠3。

   ②△AOP 中，因為 $\overline{OA}=\overline{OP}$= 半徑，所以∠2＝∠3。

   ③由上面兩個步驟可以得到∠1＝2∠2，所以 $\angle 2 = \frac{1}{2}\angle 1$。

   ④下結論：「圓周角∠APB 是圓心角∠AOB 的一半」。

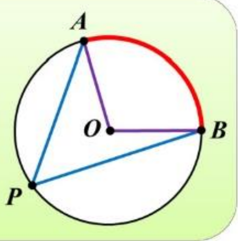
   - 本題在引出「圓周角∠APB 是圓心角∠AOB 的一半」的等式，為後續圓心在圓周角的不同位置時，能直接引用結論作為證明的依據。
   - 建議教師幫助學生看到「圓周角∠APB 的其中一邊會通過圓心」，為後續題目引出輔助線的需求。
   - 本題為圓周角與圓心角三種位置關係的第一種：圓心通過圓周角的其中一邊。

★圓心在圓周角的內部

(5) 如右圖，∠APB 是 $\overset{\frown}{AB}$ 所對的圓周角，

∠AOB 是 $\overset{\frown}{AB}$ 所對的圓心角，

說說看，∠APB 和∠AOB 的角度有什麼關係?



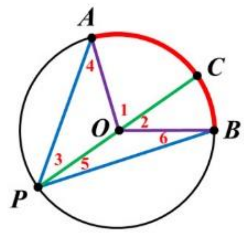
解：

<u>大華</u>說：我先連接過 P 點的直徑，

在圓周上交於 C 點。

接著，

在圖上標示∠1、∠2、∠3、∠4、∠5、∠6。



我利用第(4)題的結論，

從 $\overset{\frown}{AC}$ 來看，

圓周角∠3 是圓心角∠1 的一半，寫成$\angle 3=\frac{1}{2}\angle 1$…(1)

從 $\overset{\frown}{BC}$ 來看，

圓周角∠5 是圓心角∠2 的一半，寫成$\angle 5=\frac{1}{2}\angle 2$…(2)

接著把第(1)式＋第(2)式

得到$\angle 3+\angle 5=\frac{1}{2}(\angle 1+\angle 2)$

也就是$\angle APB=\frac{1}{2}\angle AOB$。

從這個例子來看，

我們也可以說圓周角∠APB 是所對圓心角∠AOB 的一半。

教材內容說明：

1. 本教材第 7~10 頁的教學重點是幫助學生理解圓周角是圓心角的一半。

2. 第(5)題給定∠APB 為 $\overset{\frown}{AB}$ 所對的圓周角，且 O 點在∠APB 的內部，要求學生說說看∠APB 和∠AOB 的角度有什麼關係。

   本教材提供解法如下：

   教師引導學生利用第(4)題的結論：當「圓周角的其中一邊通過圓心」時，

   得到「$\angle APB=\frac{1}{2}\angle AOB$」的等式來證明此題。

   ①連接 $\overrightarrow{PO}$，交圓周於 C 點，分別標示∠1～∠6。

   ②利用第(4)題的等式，得到 $\angle 3=\frac{1}{2}\angle 1$、$\angle 5=\frac{1}{2}\angle 2$。

   ③將前一個步驟 2 個等式相加，得到 $\angle 3+\angle 5=2\,(\angle 1+\angle 2)$，也就是 $\angle APB=\frac{1}{2}\angle AOB$。

   ④下結論：「當圓心在圓周角的內部時，圓周角∠APB 也是圓心角∠AOB 的一半」。

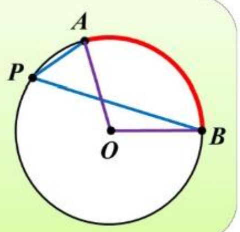
   ● 本題為圓周角與圓心角三種位置關係的第二種：圓心在圓周角內部。

★圓心在圓周角的外部

(6) 如右圖，∠APB 是 AB 所對的圓周角，

∠AOB 是 AB 所對的圓心角，

說說看，∠APB 和∠AOB 的角度有什麼關係?



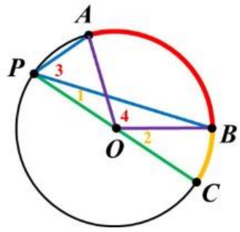
解：

<u>大華</u>說：我先連接過 P 點的直徑，

在圓周上交於 C 點。

接著，

在圖上標示∠1、∠2、∠3、∠4。



我先利用第(4)題的結論，

從 BC 來看，

圓周角∠1 是圓心角∠2 的一半，寫成 $\angle 1=\dfrac{1}{2}\angle 2$…(1)

再利用第(5)題的結論，

從 AB 來看，

圓周角∠3 是圓心角∠4 的一半，寫成 $\angle 3=\dfrac{1}{2}\angle 4$…(2)

接著把第(1)式＋第(2)式

得到 $\angle 1+\angle 3=\dfrac{1}{2}(\angle 2+\angle 4)$

也就是 $\angle APB=\dfrac{1}{2}\angle AOB$。

從這個例子來看，

我們也可以說圓周角∠APB 是所對圓心角∠AOB 的一半。

教材內容說明：

1. 本教材第 7~10 頁的教學重點是幫助學生理解圓周角是圓心角的一半。
2. 第(6)題給定∠APB 為 $\overset{\frown}{AB}$ 所對的圓周角，且 O 點在∠APB 的外部，要求學生說說看∠APB 和∠AOB 的角度有什麼關係。

   本教材提供解法如下：

   教師引導學生利用第(4)題的結論：當「圓周角的其中一邊通過圓心」時，

   得到「$\angle APB = \frac{1}{2}\angle AOB$」的等式來證明此題。

   ①連接 $\overrightarrow{PO}$，交圓周於 C 點，分別標示∠1～∠4。

   ②利用第(4)題的等式，得到$\angle 1 = \frac{1}{2}\angle 2$、$\angle 3 = \frac{1}{2}\angle 4$。

   ③將前一個步驟 2 個等式相加，得到$\angle 1 + \angle 3 = 2(\angle 2 + \angle 4)$，也就是$\angle APB = \frac{1}{2}\angle AOB$。

   ④下結論：「當圓心在圓周角的外部時，圓周角∠APB 也是圓心角∠AOB 的一半」。

- 本題為圓周角與圓心角三種位置關係的第三種：圓心在圓周角外部。
- 本題採用**減法**證明同一弧所對的圓周角是圓心角的一半，對學生來說稍難，教師可只要求學生學會前兩種即可。

如圖一～三，

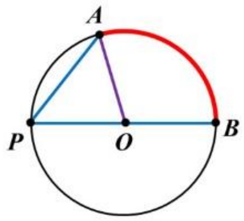
$\angle APB$ 是 $\overset{\frown}{AB}$ 的圓周角，$\angle AOB$ 是 $\overset{\frown}{AB}$ 的圓心角，如果：

(1)圓心在 $\angle APB$ 的其中一邊

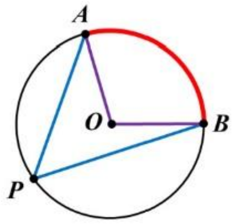
(2)圓心在 $\angle APB$ 的內部

(3)圓心在 $\angle APB$ 的外部

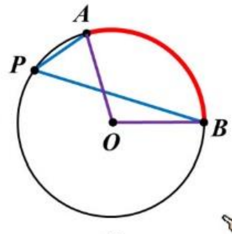
則 $\angle APB=\frac{1}{2}\angle AOB$。



圖一



圖二



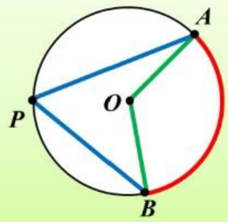
圖三

也就是「同一弧所對的圓周角都是其圓心角的一半」。

(7) 如右圖，$\angle APB$ 是 AB 所對的圓周角，

已知圓心角 $\angle AOB=120^\circ$，

則圓周角 $\angle APB=$？度。



解：

尚廷說：我知道，

因為同一弧所對的圓周角是所對圓心角的一半，

所以 $\angle APB=\frac{1}{2}\angle AOB=\frac{1}{2}\times 120^\circ=60^\circ$。

教材內容說明：

1. 本教材第 7~10 頁的教學重點是幫助學生理解圓周角是圓心角的一半。
2. 本頁教師提示重點在整理第(4)題~第(6)題得到的結果。

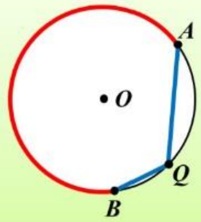
   無論圓心的位置與圓周角的關係為何，都可以得到「同一弧所對的圓周角是其圓心角的一半」的結論。
3. 第(7)題給定圓心角的度數，要求學生回答同一弧所對的圓周角度數為何。

   本教材提供解法如下：

   教師引導學生利用本頁上方結論，得到$\angle APB=\frac{1}{2}\angle AOB=60^\circ$。

(8) 如右圖，鈍角∠AQB 是優弧 AB 所對的圓周角，

說說看，鈍角∠AQB 和優弧 AB 的度數有什麼關係？



解：

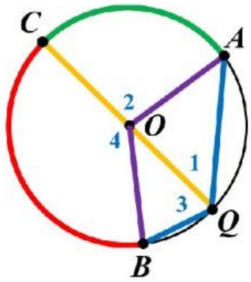
小凱說：我知道，

利用例題(5)的方法，先連接過 Q 點的直徑，

在圓周上交於 C 點。

接著，在圖上標示∠1、∠2、∠3、∠4。

利用第(4)題的結論，



從 AC 來看，

圓周角∠1 是圓心角∠2 的一半，寫成 $\angle 1=\frac{1}{2}\angle 2$…(1)

從 BC 來看，

圓周角∠3 是圓心角∠4 的一半，寫成 $\angle 3=\frac{1}{2}\angle 4$…(2)

接著把第(1)式＋第(2)式

得到 $\angle 1+\angle 3=\frac{1}{2}(\angle 2+\angle 4)$

也就是 $\angle AQB=\frac{1}{2}(\angle 2+\angle 4)=\frac{1}{2}ACB$。

所以 $\angle AQB==\frac{1}{2}ACB$。

從這個例子來看，

圓周角的度數就是所對弧度數的一半。

任意圓周角的度數就是所對弧度數的一半。

教材內容說明：

1. 本教材第 11~15 頁的教學重點是幫助學生理解圓周角與弧度的關係。

2. 第(8)題給定**優弧所對的圓周角**∠AQB，要求學生說說看∠AQB 和優弧有什麼關係。

   本教材提供解法如下：

   教師引導學生利用第(5)題的結論：當「圓周角的其中一邊通過圓心」時，

   得到「∠APB＝$\frac{1}{2}$∠AOB」的等式來證明此題。

   ①連接$\overrightarrow{QO}$，交圓周於 C 點，分別標示∠1～∠4。

   ②利用第(4)題的等式，得到∠1＝$\frac{1}{2}$∠2、∠3＝$\frac{1}{2}$∠4。

   ③將前一個步驟 2 個等式相加，得到∠1＋∠3＝2 (∠2＋∠4)，

   因為圓心角∠2＝ AC 的度數、圓心角∠4＝ BC 的度數，所以∠AQB＝$\frac{1}{2}$ ACB 。

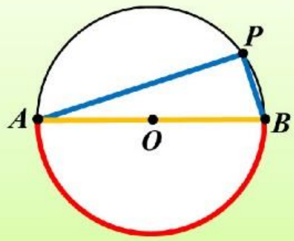
   ④下結論：「圓周角的度數是所對弧度數的一半」。

   - 本題為後續引入「半圓的圓周角是直角」作準備。

(9) 如右圖，已知 $\overline{AB}$ 為直徑，

若∠APB 是 AB 所對的圓周角，

則∠APB＝？度。



解：

婷婷說：

因為 $\overline{AB}$ 為直徑，所以 $AB=180$ 度，

又「**圓周角的度數就是所對弧度數的一半**」，

所以∠APB＝$\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times180=90$ 度。

半圓所對的圓周角是直角。

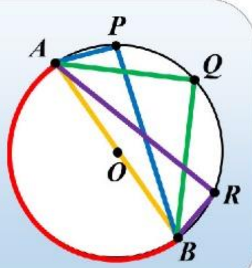
隨堂練習

如右圖，已知 $\overline{AB}$ 為直徑，

若∠APB、∠AQB、∠ARB 都是 AB 所對的圓周角，

請求出∠APB、∠AQB、∠ARB 的角度。

答：∠APB＝∠AQB＝∠ARB＝90°



教材內容說明：

1. 本教材第 11~15 頁的教學重點是幫助學生理解圓周角與弧度的關係。

2. 第(9)題給定直徑 $\overline{AB}$ ，∠APB 為 AB 所對的圓周角，要求學生回答∠APB 的度數。

   本教材提供解法如下：

   教師引導學生利用第(8)題結論：「圓周角的度數是所對弧度數的一半」進行解題。

   ①因為 $\overline{AB}$ 為直徑，所以 $AB=180^\circ$ 得到∠APB$=\frac{1}{2}AB=90^\circ$ 。

   ②下結論：「半圓所對的圓周角是直角」。

3. 本頁下方隨堂練習利用「半圓所對的圓周角是直角」解題。

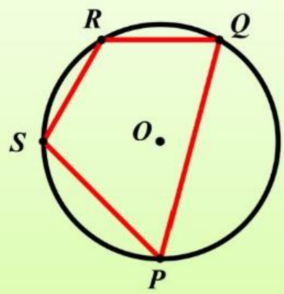
(10) 如右圖，圓 O 上有 P、Q、R、S 四點，

已知∠P＝60 度、∠S＝105 度，則：

(1) ∠R＝？度

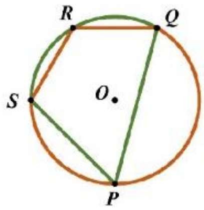
(2) ∠Q＝？度

(3)說說看，∠P＋∠R＝∠Q＋∠S 成立嗎？



解：

(1) <u>阿文</u>說：如右圖，因為 P、R 點在圓上，



所以∠P 是 SRQ 所對的圓周角、∠R 是 SPQ 所對的圓周角。

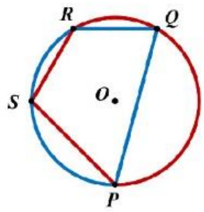
利用「**圓周角的度數就是所對弧度數的一半**」推論得到

$\angle P=\frac{1}{2}SRQ \Rightarrow SRQ=2\angle P=2\times 60=120$ 度，

因為一整個圓弧為 360 度，所以 $SPQ=360-120=240$ 度，

$\angle R=\frac{1}{2}SPQ=\frac{1}{2}\times 240=120$ 度。

(2) <u>巧青</u>說：如右圖，因為 Q、S 點也在圓上，



所以∠Q 是 RSP 所對的圓周角、∠S 是 RQP 所對的圓周角。

利用「**圓周角的度數就是所對弧度數的一半**」推論得到

$\angle S=\frac{1}{2}RQP \Rightarrow RQP=2\angle S=2\times 105=210$ 度，

因為一整個圓弧為 360 度，所以 $RSP=360-210=150$ 度，

$\angle Q=\frac{1}{2}RSP=\frac{1}{2}\times 150=75$ 度。

(3) ∠P＋∠R＝60＋120＝180 度，∠Q＋∠S＝105＋75＝180 度，
所以成立。

教材內容說明：

1. 本教材第 11~15 頁的教學重點是幫助學生理解圓周角與弧度的關係。
2. 第(10)題給定圓 O 上 P、Q、R、S 四點，已知∠P＝60 度、∠S＝105 度，要求學生回答 3 個子問題。

   本教材提供解法如下：

   因為 P、Q、R、S 四點在圓 O 上，所以∠P、∠Q、∠R、∠S 都是圓周角。

   找到所求圓周角所對弧的度數，**圓周角的度數就是所對**弧度**數的一半**。

   子問題①：要求學生算出∠R 的度數，解題步驟如下：

   (1)∠R 所對的弧是 SPQ，所以∠R＝$\frac{1}{2}SPQ$，

   (2)因為一整個圓弧為 360 度，所以 $SPQ = 360 - SRQ$。

   (3)由∠P＝$\frac{1}{2}SRQ$ 推得 SRQ＝2∠P＝120 度。

   (4)所以∠R＝$\frac{1}{2}SPQ = \frac{1}{2}(360-120) = 120$ 度。

   子問題②：要求學生算出∠Q 的度數，解題步驟如下：

   (1)∠Q 所對的弧是 RSP，所以∠Q＝$\frac{1}{2}RSP$，

   (2)因為一整個圓弧為 360 度，所以 $RSP = 360 - RQP$。

   (3)由∠S＝$\frac{1}{2}RQP$ 推得 RQP＝2∠S＝210 度。

   (4)所以∠Q＝$\frac{1}{2}RSP = \frac{1}{2}(360-210) = 75$ 度。

   子問題③：要求學生回答∠P＋∠R＝∠Q＋∠S 是否成立。

   ∠P＋∠R＝∠Q＋∠S＝180 度，所以成立。

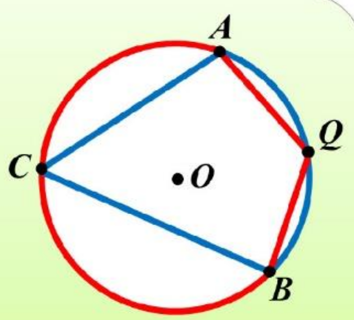
(11) 如右圖，圓 O 上 A、B 兩點，

將圓周分為 AQB 及 ACB 。

若∠ACB 是 AQB 所對的圓周角、

∠AQB 是 ACB 所對的圓周角，

說說看，∠ACB＋∠AQB＝？度



解：

仲恩說：

我知道「**圓周角的度數就是所對弧度數的一半**」，

所以 $\angle ACB = \frac{1}{2} AQB \ldots$ ①

$\angle AQB = \frac{1}{2} ACB \ldots$ ②

把第①式＋第②式，得到

$$\angle ACB + \angle AQB = \frac{1}{2} AQB + \frac{1}{2} ACB$$

$$= \frac{1}{2}(AQB + ACB)$$

$$= \frac{1}{2} \times 360 = 180 \text{ 度}$$

所以∠ACB＋∠AQB＝180 度。

教材內容說明：

1. 本教材第 11~15 頁的教學重點是幫助學生理解圓周角與弧度的關係。
2. 第(11)題給定圓周上 A、B 兩點，將圓周分為 AQB 及 ACB，要求學生回答 $AQB+ACB$ 的和為多少度。

   本教材提供解法如下：

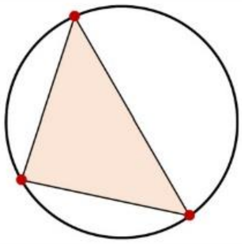
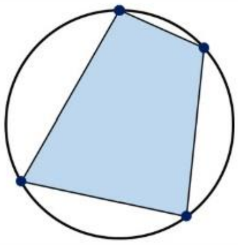
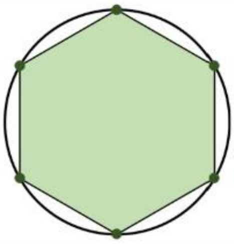
   ①因為「圓周角的度數是所對弧度數的一半」，推得 $\angle \mathrm{ACB}=\frac{1}{2}AQB$、$\angle \mathrm{AQB}=\frac{1}{2}ACB$。

   ②將兩個算式相加，得到 $\angle \mathrm{ACB}+\angle \mathrm{AQB}=\frac{1}{2}\times 360=180$。

   - 第(10)題是一個特例，學生可透過計算各個角的角度得到對角互補；
     第(11)題不提供角度，學生必需透過未知數的計算才能得到對角互補。

名詞釋義

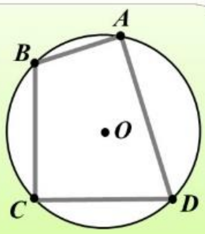
一個多邊形的頂點都在圓上，則這個多邊形稱為此圓的內接多邊形。
例如：

		
圓內接三角形	圓內接四邊形	圓內接六邊形

(12) 說說看，

圓內接四邊形 ABCD 的對角 ∠A＋∠C＝？度，

另一組對角 ∠B＋∠D＝？度。



解：

宥騰說：

我用第(10)題的結論推得

因為∠A 是 $\overset{\frown}{BCD}$ 所對的圓周角、∠C 是 $\overset{\frown}{BAD}$ 所對的圓周角，

所以∠A＋∠C＝180 度。

因為∠B 是 $\overset{\frown}{ADC}$ 所對的圓周角、∠D 是 $\overset{\frown}{ABC}$ 所對的圓周角，

所以∠B＋∠D＝180 度。

圓內接四邊形的對角互補。

教材內容說明：

1. 本教材第 11~15 頁的教學重點是幫助學生理解圓周角與弧度的關係。
2. 本頁上方名詞釋義在定義圓內接多邊形。
3. 第(12)題給定圓內接四邊形 ABCD，要求學生回答對角相加的度數。

   本教材提供解法如下：

   教師引導學生利用第(10)題結論：「圓周角的度數是所對弧度數的一半」進行解題。

   ①因為「四邊形 ABCD 為圓內接四邊形」，所以$\angle A+\angle C=180^\circ$、$\angle B+\angle D=180^\circ$。

   ②下結論：「圓內接四邊形的對角互補」。

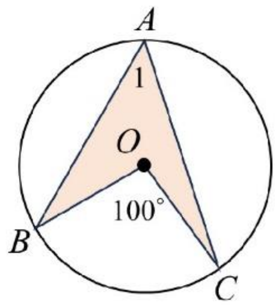
小試身手

(1) 如右圖，已知A、B、C三點在圓周上。

請根據右圖回答下列問題：

① BC＝＿＿＿＿＿度。

② $\angle 1$＝＿＿＿＿＿度。



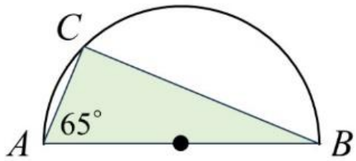
答：①100、②50

(2) 右圖是一個半圓，O為圓心，$\overline{AB}$為直徑，C為圓上一點。

請回答下列問題：

① $\angle C$＝＿＿＿＿＿度。

② $\angle$B＝＿＿＿＿＿度。



答：①90、②25

(3) 如右圖，四邊形$ABCD$為圓內接四邊形，

E點為$\overline{AB}$、$\overline{DC}$延長線的交點，

F點為$\overline{AD}$、$\overline{BC}$延長線的交點。

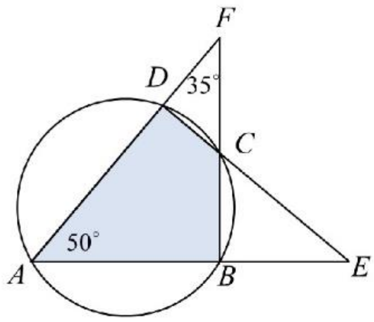
若$\angle A=50°$、$\angle F=35°$，請回答下列問題：

① $\angle DCB$＝＿＿＿＿＿度。

②觀察△ABF，求出$\angle ABC$＝＿＿＿＿＿度。

③ $\angle CBE$＝＿＿＿＿＿度。

④利用外角定理，$\angle DCB=\angle CBE+\angle CEB$，所以$\angle E$＝＿＿＿＿＿度。



答：①130、②95、③85、④45

教材內容說明：

1. 本頁小試身手提供圓心角與圓周角與弧度的關係練習。

教育部國民及學前教育署 編

國民中學

學生學習扶助教材 9 年級數學