

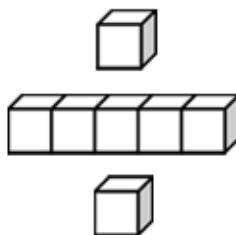


基本學習內容：SC-9-4-1

三內角為 30° - 60° - 90° 及 45° - 45° - 90°
的三角形邊長比

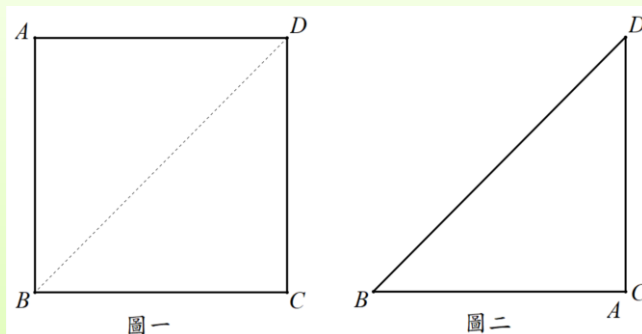
班級：_____

姓名：_____



◎特殊直角三角形的邊長比

- (1) 小明將右圖一的正方形色紙 $ABCD$ 沿著對角線 \overline{BD} 對摺後成為右圖二的圖形，如果正方形 $ABCD$ 邊長為 20 公分，請問：



① \overline{BD} 為幾公分？

② $\overline{BC}:\overline{CD}:\overline{BD}=?$

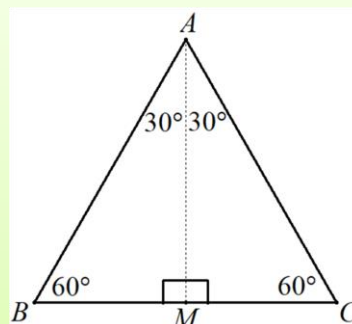
(請將比的第 1 項化為 1)

解：① 因為 $\triangle BCD$ 為直角三角形，由畢氏定理可得 $\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2$

$$\overline{BD} = \sqrt{\overline{BC}^2 + \overline{CD}^2} = \sqrt{10^2 + 10^2} = \sqrt{200} = \sqrt{100 \times 2} = 10\sqrt{2} \text{ (公分)}$$

② $\overline{BC}:\overline{CD}:\overline{BD} = 10:10:10\sqrt{2} = 1:1:\sqrt{2}$

- (2) 小明將右圖為的正三角形色紙對摺之再展開的圖形，其中 \overline{AM} 為對摺後的摺痕，如果正三角形的邊長為 20 公分，請問：



① \overline{BM} 為幾公分？

② \overline{AM} 為幾公分？

③ $\overline{BM}:\overline{AM}:\overline{AB}=?$

(請將比的第 1 項化為 1)

解：① 由圖可知 $\overline{BM} = \overline{CM} = \frac{1}{2}\overline{BC} = \frac{1}{2} \times 20 = 10 \text{ (公分)}$ 。

② 因為 $\triangle ABM$ 為直角三角形，由畢氏定理可得 $\overline{AM}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{BM}^2$

$$\overline{AM} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{BM}^2} = \sqrt{20^2 - 10^2} = \sqrt{300} = \sqrt{100 \times 3} = 10\sqrt{3} \text{ (公分)}$$

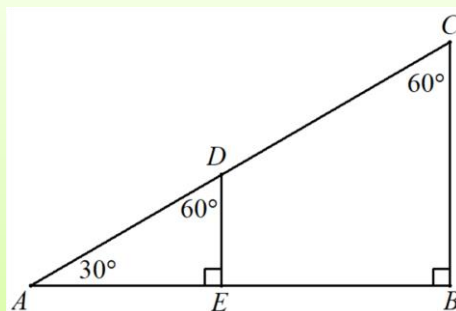
③ $\overline{BM}:\overline{AM}:\overline{AB} = 10:10\sqrt{3}:20 = 1:\sqrt{3}:2$



(3) 如右圖，直角三角形 ABC 中， $\angle A = 30^\circ$ ， $\angle ADE = \angle ACB = 60^\circ$ ， $\angle AED = \angle B = 90^\circ$ ，請證明：

① $\overline{DE} : \overline{AE} = \overline{CB} : \overline{AB}$

② $\overline{DE} : \overline{AD} = \overline{CB} : \overline{AC}$



證明：① $\triangle AED$ 和 $\triangle ABC$ 中，

因為 $\angle A = \angle A = 30^\circ$ (共用角) $\cdots(1)$

$\angle ADE = \angle ACB = 60^\circ$ $\cdots\cdots(2)$

根據三角形 AA 相似性質，由(1)(2)可得 $\triangle AED \sim \triangle ABC$

由對應邊成比例得 $\overline{DE} : \overline{CB} = \overline{AE} : \overline{AB}$ (設比值為 r)

$$\overline{DE} = r \times \overline{CB}, \overline{AE} = r \times \overline{AB}, \text{ 故 } \overline{DE} : \overline{AE} = (r \times \overline{CB}) : (r \times \overline{AB}) = \overline{CB} : \overline{AB}$$

② 承①，由對應邊成比例得 $\overline{DE} : \overline{CB} = \overline{AD} : \overline{AC}$ (設比值為 k)

$$\overline{DE} = k \times \overline{CB}, \overline{AD} = k \times \overline{AC}, \text{ 故 } \overline{DE} : \overline{AD} = (k \times \overline{CB}) : (k \times \overline{AC}) = \overline{CB} : \overline{AC}$$

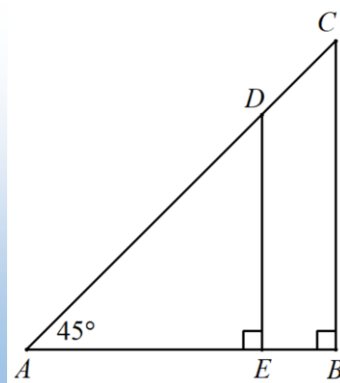


隨堂練習

如右圖，直角三角形 ABC 中， $\angle A = 45^\circ$ ， $\angle AED = \angle B = 90^\circ$ ，請證明：

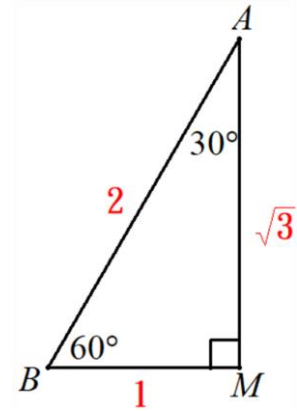
① $\overline{DE} : \overline{AE} = \overline{CB} : \overline{AB}$

② $\overline{DE} : \overline{AD} = \overline{CB} : \overline{AC}$

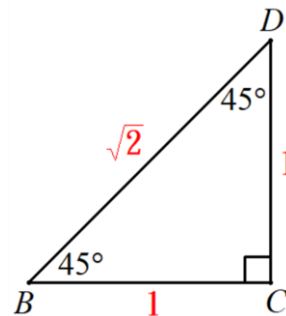




- 例題(2)的 $\triangle ABM$ 中， $\overline{BM}:\overline{AM}:\overline{AB}=1:\sqrt{3}:2$ 由三角形的「小角對小邊、大角對大邊」的性質可知：
 - ① 30° 所對的邊為 1
 - ② 60° 所對的邊為 $\sqrt{3}$
 - ③ 90° 所對的邊為 2
- 由例題(3)的證明可知：
兩個相似直角三角形，其某兩邊的邊長比會相等。
- 可得只要是內角為 $30^\circ-60^\circ-90^\circ$ 的直角三角形，其三邊的邊長比為 $1:\sqrt{3}:2$ (由小到大)



- 例題(1)的 $\triangle BCD$ 中， $\overline{BC}:\overline{CD}:\overline{BD}=1:1:\sqrt{2}$ ，由三角形的「小角對小邊、大角對大邊」的性質可知：
 - ① 45° 所對的邊為 1
 - ② 90° 所對的邊為 $\sqrt{2}$
- 同理可得只要是內角為 $45^\circ-45^\circ-90^\circ$ 的直角三角形，其三邊的邊長比為 $1:1:\sqrt{2}$ (由小到大)



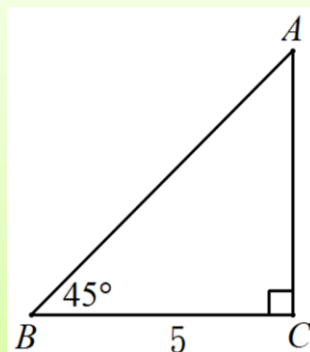


(4) 如右圖，直角三角形 ABC 中， $\angle C = 90^\circ$ ，

$\angle A = 45^\circ$ ， $\overline{BC} = 5$ ，請問：

① $\overline{AC} = ?$

② $\overline{AB} = ?$



解：① 因為 $\triangle ABC$ 為 45° - 45° - 90° 的直角三角形，所以 $\overline{BC} : \overline{AC} : \overline{AB} = 1 : 1 : \sqrt{2}$

得 $\overline{BC} : \overline{AC} = 1 : 1$ ， $5 : \overline{AC} = 1 : 1$ ，內項乘積=外項乘積，得 $\overline{AC} = 5$ 。

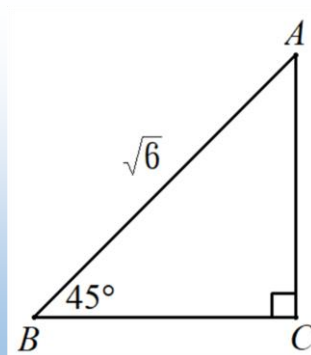
② 同理 $\overline{BC} : \overline{AB} = 1 : \sqrt{2}$ ， $5 : \overline{AB} = 1 : \sqrt{2}$ ，內項乘積=外項乘積，得 $\overline{AB} = 5\sqrt{2}$ 。



隨堂練習

如右圖，直角三角形 ABC 中， $\angle C = 90^\circ$ ，

$\angle A = 45^\circ$ ， $\overline{AB} = \sqrt{6}$ ，求 $\overline{BC} = ?$



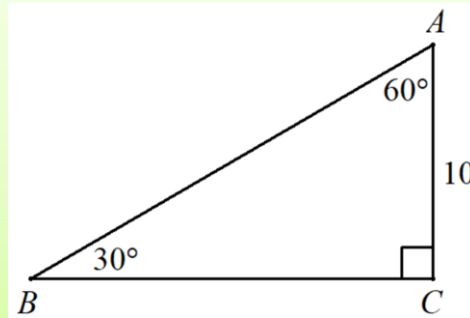
(5) 如右圖，直角三角形 ABC 中，

$$\angle C = 90^\circ, \angle A = 30^\circ,$$

$$\overline{AC} = 10, \text{ 請問：}$$

① $\overline{BC} = ?$

② $\overline{AB} = ?$



解：① 因為 $\triangle ABC$ 為 $30^\circ-60^\circ-90^\circ$ 的直角三角形。

$$\text{所以 } \overline{BC} : \overline{AC} : \overline{AB} = 1 : \sqrt{3} : 2$$

$$\text{得 } \overline{BC} : \overline{AC} = 1 : \sqrt{3}, 5 : \overline{AC} = 1 : \sqrt{3}, \text{ 內項乘積=外項乘積, 得 } \overline{AC} = 5\sqrt{3}。$$

$$\text{② 同理 } \overline{BC} : \overline{AB} = 1 : 2, 5 : \overline{AB} = 1 : 2, \text{ 內項乘積=外項乘積, 得 } \overline{AB} = 10。$$



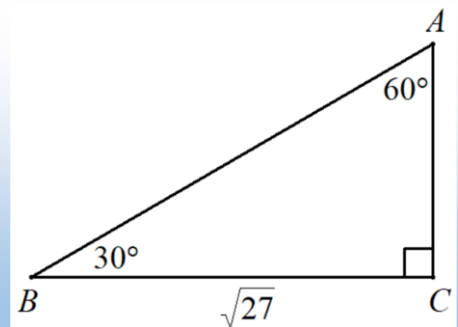
隨堂練習

如右圖，直角三角形 ABC 中， $\angle C = 90^\circ$ ，

$$\angle B = 30^\circ, \overline{AC} = \sqrt{27}, \text{ 請問：}$$

① $\overline{BC} = ?$

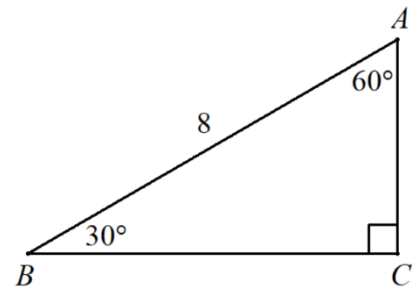
② $\overline{AB} = ?$





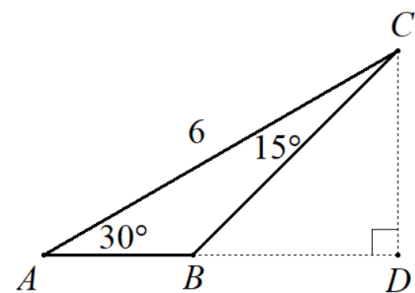
小試身手

- (1) 如右圖，直角 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $\angle B = 30^\circ$ ， $\overline{AB} = 8$ ，請問 $\triangle ABC$ 的面積=？



- (2) 如右圖， $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 15^\circ$ ， $\angle A = 30^\circ$ ， $\overline{AC} = 6$ ，請問：

- ① $\overline{CD} = ?$
- ② $\overline{BC} = ?$
- ③ $\overline{AB} = ?$





教育部國民及學前教育署 編

國民中學

學生學習扶助教材

9 年級數學

