

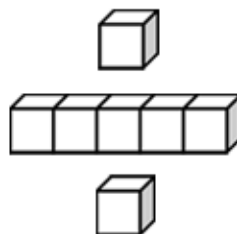


基本學習內容：NC-6-2-1

質因數分解法或短除法求兩 數的最大公因數

班級：_____

姓名：_____





◎複習活動

(1) 找出 12 和 30 的所有「因數」。

$$\begin{aligned} 12 &= 1 \times 12 \\ &= 2 \times 6 \\ &= 3 \times 4 \\ &= 4 \times 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 30 &= 1 \times 30 \\ &= 2 \times 15 \\ &= 3 \times 10 \\ &= 5 \times 6 \end{aligned}$$

12 的因數有：1、2、3、4、6、12

30 的因數有：1、2、3、5、6、10、15、30

答：12 的因數有：1、2、3、4、6、12

30 的因數有：1、2、3、5、6、10、15、30

(2) 12 的因數有：1、2、3、4、6、12

30 的因數有：1、2、3、5、6、10、15、30

將 12 和 30 的所有因數，改記成質因數的乘積。

12 的因數有：1、2、3、4、6、12

→ 12 的因數有：1、2、3、 2×2 、 2×3 、 $2 \times 2 \times 3$

30 的因數有：1、2、3、5、6、10、15、30

→ 30 的因數有：1、2、3、5、 2×3 、 2×5 、 3×5 、 $2 \times 3 \times 5$

答：12 的因數有：1、2、3、 2×2 、 2×3 、 $2 \times 2 \times 3$

30 的因數有：1、2、3、5、 2×3 、 2×5 、 3×5 、 $2 \times 3 \times 5$



(3) 12 的因數有：1、2、3、 2×2 、 2×3 、 $2 \times 2 \times 3$

30 的因數有：1、2、3、5、 2×3 、 2×5 、 3×5 、 $2 \times 3 \times 5$

找出 12 和 30 的公因數，以及最大公因數。

12 的因數有：1、2、3、 2×2 、 2×3 、 $2 \times 2 \times 3$

30 的因數有：1、2、3、5、 2×3 、 2×5 、 3×5 、 $2 \times 3 \times 5$

➔ 12 和 30 的公因數有：1、2、3、 2×3

➔ 12 和 30 的最大公因數是： 2×3

答：12 和 30 的公因數有：1、2、3、 2×2 、 2×3 ，

12 和 30 的最大公因數是 2×3

(4) 12 和 30 的「最大公因數」是 2×3 ，想想看，

從 $12 = 2 \times 2 \times 3$ 和 $30 = 2 \times 3 \times 5$ 質因數分解算式中，你發現了什麼？

$$12 = 2 \times 2 \times 3$$

$$30 = 2 \times 3 \times 5$$

我發現 12 和 30 的質因數分解算式中，都有 2×3 。



$$12 = 2 \times 2 \times 3$$

$$30 = 2 \times 3 \times 5$$



12 和 30 「最大公因數」是 2×3 。

2×3 是 12 和 30 「共同的質因數乘積」。





◎利用質因數分解方法，找出兩數的「公因數」和「最大公因數」

(1) $28 = 2 \times 2 \times 7$ ，

28 的因數有：1、2、 2×2 、 2×7 、 $2 \times 2 \times 7$

$36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3$ ，

36 的因數有：1、2、3、 2×2 、 2×3 、 3×3 、 $2 \times 2 \times 3$ 、 $2 \times 3 \times 3$ 、 $2 \times 2 \times 3 \times 3$

28 和 36 兩數的「最大公因數」是多少？

28 的因數有：1、2、7、 2×2 、 2×7 、 $2 \times 2 \times 7$

36 的因數有：1、2、3、 2×2 、 2×3 、 3×3 、 $2 \times 2 \times 3$ 、 $2 \times 3 \times 3$ 、 $2 \times 2 \times 3 \times 3$

28 和 36 的公因數有：1、2、 2×2

28 和 36 的最大公因數是： 2×2

答：28 和 36 的最大公因數是： 2×2

(2) 28 和 36 的「最大公因數」是 2×2 ，想想看，

從 $28 = 2 \times 2 \times 7$ 和 $36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3$ 質因數分解算式中，你發現了什麼？

$28 = 2 \times 2 \times 7$

$36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3$

我發現 28 和 36 的質因數分解算式中，都有 2×2 。



$28 = 2 \times 2 \times 7$

$36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3$

28 和 36 「最大公因數」是 2×2 。

2×2 是 28 和 36 「共同質因數的乘積」。





12 和 30 的「最大公因數」是 $2 \times 3 \rightarrow 2 \times 3$ 是 12 和 30 「共同質因數的乘積」；

28 和 36 的「最大公因數」是 $2 \times 2 \rightarrow 2 \times 2$ 是 28 和 36 「共同質因數的乘積」

兩數質因數分解後，兩數的「最大公因數」是「所有共同質因數的乘積」。



(3) 利用質因數分解求兩數的最大公因數。

① $40 = 2 \times 2 \times 2 \times 5$ ， $60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$ ，求 40 和 60 的最大公因數是多少？

② $45 = 3 \times 3 \times 5$ ， $28 = 2 \times 2 \times 7$ ，求 45 和 28 的最大公因數是多少？

$$\begin{aligned} \text{① } 40 &= 2 \times 2 \times 2 \times 5 \\ 60 &= 2 \times 2 \times 3 \times 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{② } 45 &= 3 \times 3 \times 5 \\ 28 &= 2 \times 2 \times 7 \end{aligned}$$

共同質因數的乘積 $2 \times 2 \times 5$

40 和 60 的最大公因數 $2 \times 2 \times 5$

45 和 28 沒有共同質因數，45 和 28 互質

45 和 28 的最大公因數是 1

答：① 40 和 60 的最大公因數 $2 \times 2 \times 5$

② 45 和 28 的最大公因數 1



小試身手

◎ 利用質因數分解求兩數的最大公因數

(1) $42 = 2 \times 3 \times 7$ ， $56 = 2 \times 2 \times 2 \times 7$ ，求 42 和 56 的最大公因數是多少？

(2) $35 = 5 \times 7$ ， $45 = 3 \times 3 \times 5$ ，求 35 和 45 的最大公因數是多少？



◎利用短除法，找出兩數的「最大公因數」

(1) 用短除法找出 18 和 24 的最大公因數。

18 和 24 的最大公因數是共同質因數 2 和 3 的乘積 2×3

下面是利用短除法將 18 和 24 質因數分解的算式：

$$\begin{array}{r|l} \textcircled{2} & 18 \\ \textcircled{3} & 9 \\ & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} \textcircled{2} & 24 \\ \textcircled{3} & 12 \\ & 4 \end{array}$$

18 和 24 的最大公因數： 2×3

答：18 和 24 的最大公因數： 2×3

老師將這兩個算式改記成一個算式：

先提出 18 和 24 共同的質因數 2 \rightarrow $\textcircled{2}$ $\left| \begin{array}{l} 18 \quad 24 \\ 9 \quad 12 \\ 3 \quad 4 \end{array} \right.$ 3 和 4 沒有共同的質因數，我們稱 3 和 4 「互質」；也就是，3 和 4 的最大公因數是 1。3 和 4 互質，表示已經找出 18 和 24 所有共同的質因數。

再提出 9 和 12 共同的質因數 3 \rightarrow $\textcircled{3}$ $\left| \begin{array}{l} 18 \quad 24 \\ 9 \quad 12 \\ 3 \quad 4 \end{array} \right.$ \leftarrow

3 也是 18 和 24 共同的質因數

在這個算式中，也可以看到 2 和 3 是 18 和 24 共同的質因數。
算式下面的 3 和 4 沒有共同的質因數，可以得到 18 和 24 的最大公因數是 2×3 。
我們稱利用上面算式求兩數最大公因數的方法為短除法。



(2) 左邊是利用質因數分解法求兩數最大公因數的記法；

右邊是利用短除法求兩數最大公因數的記法。

$$\begin{array}{l} 18 = 2 \times 3 \times 3 \\ 24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2 & 18 \quad 24 \\ 3 & 9 \quad 12 \\ & 3 \quad 4 \end{array} \rightarrow 4 = 2 \times 2$$

說說看，這兩種方法有什麼關係？

質因數分解法：先將 18 和 24 質因數分解，才能找到最大公因數。

短除法：直接透過 12 和 18 求最大公因數。

質因數分解法：所有的數都要做質因數分解。

短除法：3 和 4 互質，4 不必再做短除法。





(3) 用「短除法」求出 84 和 63 的「最大公因數」。

3	84	63
7	28	21
4		3

3 是 84 和 63 的共同質因數。
 7 是 28 和 21 的共同質因數，也是 84 和 63 的共同質因數。
 4 和 3 沒有共同質因數，4 和 3 互質，
 表示已經找出 84 和 63 所有的共同質因數。
 從短除法得到 84 和 63 共同質因數乘積是 3×7 ，
 84 和 63 的最大公因數是 $3 \times 7 = 21$ 。

答：84 和 63 的「最大公因數」是 21

(4) 用「短除法」求出 60 和 84 的「最大公因數」。

2	60	84
2	30	42
3	15	21
5		7

2 是 60 和 84 的共同質因數
 2 是 30 和 42 的共同質因數，也是 60 和 84 的共同質因數。
 3 是 15 和 21 的共同質因數，也是 60 和 84 的共同質因數。
 5 和 7 沒有共同質因數，5 和 7 互質，
 表示已經找出 60 和 84 所有的共同質因數。
 從短除法得到 60 和 84 共同質因數乘積是 $2 \times 2 \times 3$ ，
 60 和 84 的最大公因數是 $2 \times 2 \times 3 = 12$ 。

答：60 和 84 的「最大公因數」是 12



小試身手

◎利用短除法求兩數的最大公因數

(1) 56 和 68

(2) 84 和 90



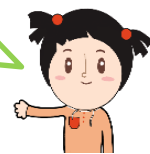
◎「公因數」與「最大公因數」的應用

(1)有一張長 18 公分，寬 12 公分的長方形色紙。用大小一樣的正方形排這張長方形色紙，剛好可以排滿，正方形邊長是整數，請問：可以用邊長 2 公分的正方形排滿這張長方形色紙嗎？



我用邊長 2cm 的正方形去排，
一排有 9 個，排了 6 排，剛好排滿。

長邊 18， $18 \div 2 = 9$ → 表示一排排 9 個
寬邊 12， $12 \div 2 = 6$ → 表示可以排 6 排
所以，可以剛好排滿。



答：可以用邊長 2 公分的正方形排滿



2 是 18 和 12 的公因數。

有一張長 18 公分，寬 12 公分的長方形色紙。用大小一樣的正方形排這張長方形色紙，剛好可以排滿，正方形邊長是整數，如下表所示。

正方形邊長 (公分)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
是否排滿	○	○	○	×	×	○	×	×	×	×	×	×

從表中觀察到：

①可以排滿長方形色紙的正方形邊長是 1 公分、2 公分、3 公分、6 公分。

②邊長 1 公分、2 公分、3 公分、6 公分的正方形可以排滿長 18 公分，
寬 12 公分的長方形色紙。

我們發現：1、2、3、6 是 12 和 18 的公因數。

6 是 12 和 18 的最大公因數 → 1、2、3、6 是 6 的因數，

12 和 18 的公因數是最大公因數 6 的因數。





(2)有一張長 24 公分，寬 18 公分的長方形色紙。全部剪成大小一樣的正方形，剛好可以全部剪完，正方形邊長是整數，請問正方形的邊長可能是幾公分？

方法一：

正方形的邊長是 24 和 18 的公因數。

24 的因數有：1、2、3、4、6、8、12、24

18 的因數有：1、2、3、6、9、18

24 和 18 的公因數有：1、2、3、6

正方形可能的邊長是 1 公分、2 公分、3 公分、6 公分。

方法二：

24 和 18 的公因數是最大公因數的因數，我只要求出 24 和 18 的最大公因數，就能找到 24 和 18 的公因數。



3	24	18
2	8	6
4	4	3

24 和 18 的最大公因數： $3 \times 2 = 6$

最大公因數 6 的因數有：1、2、3、6

24 和 18 的公因數：1、2、3、6

答：所有可能的正方形邊長是 1 公分、2 公分、3 公分、6 公分

(3)有一張長 24 公分，寬 16 公分的長方形色紙。全部剪成大小一樣的正方形，剛好可以全部剪完，正方形邊長是整數，請問：

①正方形邊長最長是幾公分？ ②正方形的邊長可能是幾公分？

2	24	16
2	12	8
2	6	4
3	3	2

24 和 16 的最大公因數： $2 \times 2 \times 2 = 8$

24 和 16 的公因數是最大公因數 8 的因數。

最大公因數 8 的因數：1、2、4、8

24 和 16 的公因數有：1、2、4、8

答：①正方形邊長最長是 8 公分

②正方形邊長可能是：1 公分、2 公分、4 公分、8 公分



(4)老師將班上有 12 位男生，8 位女生平均分組，各組的男生和女生分別一樣多，且剛好可以全部分完。請問：

- ①可以分成 2 組嗎？
- ②可以分成 3 組嗎？

① $12 \div 2 = 6$ ，

$8 \div 2 = 4$

② $12 \div 3 = 4$ → 分成 3 組，每組男生 4 人

$8 \div 3 = 2 \dots 2$ → 女生無法平均分配

分成 2 組，第一組男生 6 人，女生 4 人；
第二組也是男生 6 人，女生 4 人，
各組的男生和女生分別一樣。



答：①可以分成 2 組

②不可以分成 3 組

班上有 12 位男生，8 位女生平均分組，各組的男生和女生分別一樣多，且剛好全部分完。可以分成幾組？各組男生有幾人？女生有幾人？如下表所示。

組數	2 組	3 組	4 組	5 組	6 組	7 組	8 組
是否可以平均分組？	○	×	○	×	×	×	×
每組男生人數	6			3			
每組女生人數	4			2			

從表中觀察到：

可以分成 2 組，也可以分成 4 組。

$12 \div 4 = 3$ ， $8 \div 4 = 2$ ，

分成 4 組，第一組男生 3 人，女生 2 人。

第二組，第三組，第四組也都是男生 3 人，女生 2 人。

各組的男生和女生分別一樣。

我們發現：

2 和 4 都是 12 和 8 的公因數，

4 是 12 和 8 的最大公因數。



(5)班上有 36 位男生，24 位女生。平均分組，各組的男生和女生分別一樣多，且剛好可以全部分完。最多可以分成幾組？各組男生幾人？女生幾人？

組數是求 36 和 24 的最大公因數。

	男	女
2	36	24
2	18	12
3	9	6
	3	2

36 和 24 的最大公因數是 $2 \times 2 \times 3 = 12$

$36 \div 12 = 3$ ，每組男生有 3 人

$24 \div 12 = 2$ ，每組女生有 2 人

答：最多分成 12 組，

每組有 3 位男生和 2 位女生

(6)老闆有 54 顆蘋果，72 顆梨子。平均分裝成禮盒，每個禮盒的蘋果和梨子一樣多，且剛好可以全部分完。老闆最多可以分成幾個禮盒？

禮盒數是求 54 和 72 的最大公因數。

2	54	72
3	27	36
3	9	12
	3	4

54 和 72 的最大公因數是 $2 \times 3 \times 3 = 18$

答：最多分成 18 個禮盒



小試身手

做做看：

(1)把一張長 84 公分、寬 63 公分的長方形紙，分割成一樣大小的正方形，且正方形的邊長為整公分。正方形的邊長最長是幾公分？

(2)老師有 40 個果凍和 50 顆糖果，想平分給一些學生，每個學生分到的果凍和糖果都分別一樣多，且剛好分完。

老師可以分給幾個學生？每個學生分到的果凍有幾個，糖果有幾顆？

請把可能的答案寫出來。



教育部國民及學前教育署 編

國民小學
學生學習扶助教材 **6** 年級數學

