

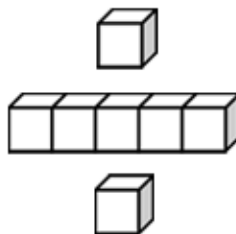


基本學習內容：NC-6-2-2

質因數分解法或短除法 求兩數的最小公倍數

班級：_____

姓名：_____





◎利用質因數分解方法，找出兩數的「最小公倍數」

(1) 30 的倍數有：30、60、90、120、150、180、210、240、270、……

找出 24 和 30 的「最小公倍數」是多少？

30 的倍數有：30、60、90、120、150、180、210、240、……

$$24 \times 5 = 120, 24 \times 10 = 240$$

其中，120、240 是 24 的倍數，

120 是 24 和 30 的最小公倍數。

答：24 和 30 的最小公倍數是 120

(2) $24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$ ，24 的倍數可以記做： $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times \triangle$

$30 = 2 \times 3 \times 5$ ，30 的倍數可以記做： $2 \times 3 \times 5 \times \square$

找找看，24 和 30 的「最小公倍數」是多少？

老師利用 24 和 30 的質因數分解算式找出兩數的「最小公倍數」。

$$\begin{array}{r} 24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \\ 30 = \quad \quad \quad 2 \times 3 \times 5 \\ \hline \end{array}$$

最小公倍數： $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5$

仔細觀察可以發現：

$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$ → $24 \times 5 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5$ → 24 只要再乘以 5 就是 30 的倍數

$30 = 2 \times 3 \times 5$ → $30 \times 4 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5$ → 30 只要再乘以 2×2 就是 24 的倍數

$$24 \times 5 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 2 \times 2 \times 30$$

答：24 和 30 的最小公倍數是 $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5$

➡ 24 和 30 兩數的「最小公倍數」是 $(2 \times 3) \times (2 \times 2 \times 5)$

可以發現：

(2×3) 是 24 和 30 「共同質因數乘積」，

$(2 \times 2 \times 5)$ 是 24 和 30 「剩下質因數乘積」，

24 和 30 的最小公倍數 $(2 \times 3) \times (2 \times 2 \times 5)$

是「共同質因數乘積」和「剩下質因數乘積」的乘積。





$$(3) 54 = 2 \times 3 \times 3 \times 3, 72 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$$

利用 54 和 72 的質因數分解算式，求出兩數的「最小公倍數」。

我發現

$$54 = 2 \times 3 \times 3 \times 3 \rightarrow 54 \times 2 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \rightarrow 54 \text{ 只要再乘以 } 2 \times 2 \text{ 就是 } 72 \text{ 的倍數}$$

$$72 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \rightarrow 72 \times 3 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \rightarrow 72 \text{ 只要再乘以 } 3 \text{ 就是 } 54 \text{ 的倍數}$$

$$2 \times 2 \times 54 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 = 72 \times 3$$

答：54 和 72 的最小公倍數是 $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3$

老師利用 54 和 72 的質因數分解算式，找出兩數的「最小公倍數」。

$$54 = 2 \times 3 \times 3 \times 3$$

$$72 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$$

$$\text{最小公倍數：} 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3$$

→ 54 和 72 兩數的「最小公倍數」是 $(2 \times 3 \times 3) \times (2 \times 2 \times 3)$

可以發現：

$(2 \times 3 \times 3)$ 是「共同質因數乘積」，

$(2 \times 2 \times 3)$ 是「剩下質因數乘積」，

54 和 72 的最小公倍數 $(2 \times 3 \times 3) \times (2 \times 2 \times 3)$

是「共同質因數乘積」和「剩下質因數乘積」的乘積。



質因數分解算式求兩數的「最小公倍數」是
兩數「共同質因數乘積」和「剩下質因數乘積」的乘積。



(4)利用質因數分解算式，求出兩數的最小公倍數。

① $20=2\times 2\times 5$ ， $36=2\times 2\times 3\times 3$

② $24=2\times 2\times 2\times 3$ ， $42=2\times 3\times 7$

① $20=2\times 2\times 5$ (2×2) 是「共同質因數乘積」
 $36=2\times 2\times 3\times 3$ $(5\times 3\times 3)$ 是「剩下質因數乘積」

20 和 36 的最小公倍數 是 $(2\times 2)\times(5\times 3\times 3)$

② $24=2\times 2\times 2\times 3$ (2×3) 是「共同質因數乘積」
 $42=2\times 3\times 7$ $(2\times 2\times 7)$ 是「剩下質因數乘積」

24 和 42 的最小公倍數是 $(2\times 3)\times(2\times 2\times 7)$

答：①20 和 36 的最小公倍數是 $(2\times 2)\times(5\times 3\times 3)$

②24 和 42 的最小公倍數是 $(2\times 3)\times(2\times 2\times 7)$



小試身手

利用質因數分解算式，求出兩數的最小公倍數。

(1) $28=2\times 2\times 7$

$42=2\times 3\times 7$

(2) $35=5\times 7$

$45=3\times 3\times 5$



◎利用短除法，找出兩數的「最小公倍數」

我們可以利用質因數分解方法，找出 18 和 60 的最小公倍數。

$$18 = 2 \times 3 \times 3$$

$$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$$

18 和 60 的最小公倍數是
「共同質因數乘積」和「剩下質因數乘積」的乘積
 $(2 \times 3) \times (3 \times 2 \times 5)$

也可以利用短除法，找出 18 和 60 的最小公倍數。

先提出 18 和 60 共同的質因數 2

再提出 9 和 30 共同的質因數 3
3 也是 18 和 60 共同的質因數

| | | |
|----|----|---|
| 18 | 60 | 18 和 60 的最小公倍數 「共同質因數乘積」和「剩下 2 個數乘積」 的乘積： $(2 \times 3) \times (3 \times 10)$ |
| 9 | 30 | |
| 3 | 10 | |

3 和 10 沒有共同的質因數，我們稱 3 和 10 「互質」；
也就是，3 和 10 的最大公因數是 1。
3 和 10 互質，表示已經找出 18 和 60 所有共同的質因數。

短除法求兩數的「最小公倍數」是
兩數「共同質因數乘積」和「剩下 2 個數乘積」的乘積。



(1) 左邊是利用質因數分解法求兩數最小公倍數的記法；

右邊是利用短除法求兩數最小公倍數的記法。

| | | | | | | | | |
|--|--|-------------------|----|-------------------|---|----|---|----|
| $18 = 2 \times 3 \times 3$ $60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$ <p>18 和 60 的最小公倍數是 $(2 \times 3) \times (3 \times 2 \times 5)$</p> | <table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">18</td> <td style="padding: 5px;">60</td> <td rowspan="3" style="vertical-align: middle; padding-left: 10px;"> $10 = 2 \times 5$ </td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">9</td> <td style="padding: 5px;">30</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">3</td> <td style="padding: 5px;">10</td> </tr> </table> <p>18 和 60 的最小公倍數 $(2 \times 3) \times (3 \times 10)$</p> | 18 | 60 | $10 = 2 \times 5$ | 9 | 30 | 3 | 10 |
| 18 | 60 | $10 = 2 \times 5$ | | | | | | |
| 9 | 30 | | | | | | | |
| 3 | 10 | | | | | | | |

說說看，這兩種方法有什麼關係？

仔細觀察，質因數分解方法中，「剩下質因數乘積」 $(3 \times 2 \times 5)$ ，
和短除法下方「剩下 2 個數乘積」 (3×10) ，
這兩個數相同， $3 \times 2 \times 5 = 3 \times 10$ 。

所以，我們利用質因數分解法和短除法，都可以找出兩數的最小公倍數。





①用質因數分解法求兩數的最小公倍數是：

「共同質因數乘積」和「剩下質因數乘積」的乘積

②用短除法求兩數的最小公倍數是：

「共同質因數乘積」和「剩下 2 個數乘積」的乘積

質因數分解法必須把兩數所有的質因數都找出來，才能找到兩數的最小公倍數；而短除法只需要找出兩數共同的質因數，就可以找到兩數的最小公倍數。

使用短除法找兩數的最小公倍數比較快，我們可以用短除法來找最小公倍數。

(2)用短除法求出 48 和 60 的「最小公倍數」。

| | | |
|---|-------|---------------------------------------|
| 2 | 48 60 | 2 是 48 和 60 的共同質因數。 |
| 2 | 24 30 | 2 是 24 和 30 的共同質因數，也是 48 和 60 的共同質因數。 |
| 3 | 12 15 | 3 是 12 和 15 的共同質因數，也是 48 和 60 的共同質因數。 |
| | 4 5 | 4 和 5 互質，表示沒有共同質因數。 |

48 和 60 共同質因數乘積是 $2 \times 2 \times 3$ ，剩下 2 個數乘積是 4×5 。

48 和 60 的最小公倍數是 $(2 \times 2 \times 3) \times (4 \times 5) = 240$

答: 48 和 60 的最小公倍數是 $2 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 240$

(3)用短除法求出 24 和 42 的「最小公倍數」。

| | | |
|---|-------|--------------------------------------|
| 2 | 24 42 | 2 是 24 和 42 的共同質因數 |
| 3 | 12 21 | 3 是 12 和 21 的共同質因數，也是 24 和 42 的共同質因數 |
| | 4 7 | 4 和 7 互質，表示沒有共同質因數。 |

24 和 42 共同質因數乘積是 2×3 ，剩下 2 個數乘積 4×7 。

24 和 42 的最小公倍數是 $(2 \times 3) \times (4 \times 7) = 168$

答: 24 和 42 的最小公倍數是 $2 \times 3 \times 4 \times 7 = 168$



小試身手

利用「短除法」求出兩數的最小公倍數

(1)16 和 36 的「最小公倍數」

(2)9 和 45 的「最小公倍數」



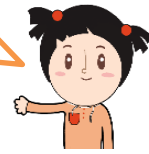
◎「公倍數」、「最小公倍數」的應用

(1)用數個長3公分，寬2公分的長方形色紙，排成一個正方形，請問可以排成邊長6公分的正方形嗎？



用長3公分，寬2公分的長方形排，
一排有2個，排了3排，排成邊長6公分的正方形。

邊長6公分的正方形
 $6 \div 3 = 2$ → 表示一排排2個
 $6 \div 2 = 3$ → 表示可以排3排



答：可以排成邊長6公分的正方形



6是2和3的公倍數。

用數個長3公分，寬2公分的長方形色紙，排成一個正方形，正方形邊長是整數，如下表所示。

| | | | | | | | | | | | |
|--------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| 拼成的 正方形邊長 | 3 公 分 | 4 公 分 | 5 公 分 | 6 公 分 | 7 公 分 | 8 公 分 | 9 公 分 | 12 公 分 | 18 公 分 | 24 公 分 | 30 公 分 |
| 是否可以拼成 | × | × | × | ○ | × | × | × | ○ | ○ | ○ | ○ |

從表中觀察到：

- ①可以排成邊長6公分、12公分、18公分、24公分、30公分、.....的正方形。
- ②長3公分，寬2公分的長方形色紙可以排成邊長6公分、12公分、18公分、24公分、30公分、.....的正方形。

我們發現：6、12、18、24、30、.....是3和2的公倍數。

6是3和2的最小公倍數→6、12、18、24、30、.....是6的倍數，
3和2的公倍數是最小公倍數6的倍數。





(2)用數個長 10 公分，寬 6 公分的長方形色紙，拼成一個正方形，請問拼成最小正方形的邊長是幾公分？

用長 10 公分，寬 6 公分的長方形拼成正方形，正方形邊長是 10 公分和 6 公分的公倍數，最小正方形的邊長是 10 和 6 的最小公倍數。



$$\begin{array}{r|l} 2 & 10 \quad 6 \\ & \hline & 5 \quad 3 \end{array}$$

10 和 6 的最小公倍數： $2 \times 3 \times 5 = 30$

答：拼成最小的正方形邊長是 30 公分

(3)用數個長 12 公分，寬 8 公分的長方形色紙，拼成一個邊長在 100 公分以內的正方形，請問可以拼成最大的正方形邊長是幾公分？

$$\begin{array}{r|l} 2 & 12 \quad 8 \\ & \hline 2 & 6 \quad 4 \\ & \hline & 3 \quad 2 \end{array}$$

12 和 8 的最小公倍數： $2 \times 2 \times 2 \times 3 = 24$

12 和 8 的公倍數是最小公倍數 24 的倍數。

100 以內 24 的倍數：24、48、72、96

可以拼成邊長 24cm、48cm、72cm、96cm 的正方形，

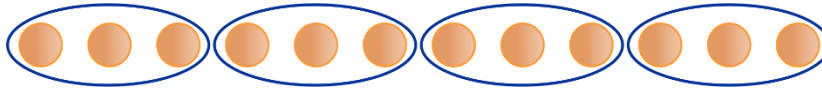
最大的正方形邊長是 96cm。

答：拼成最大的正方形邊長是 96 公分



哥哥有 12 顆彈珠。

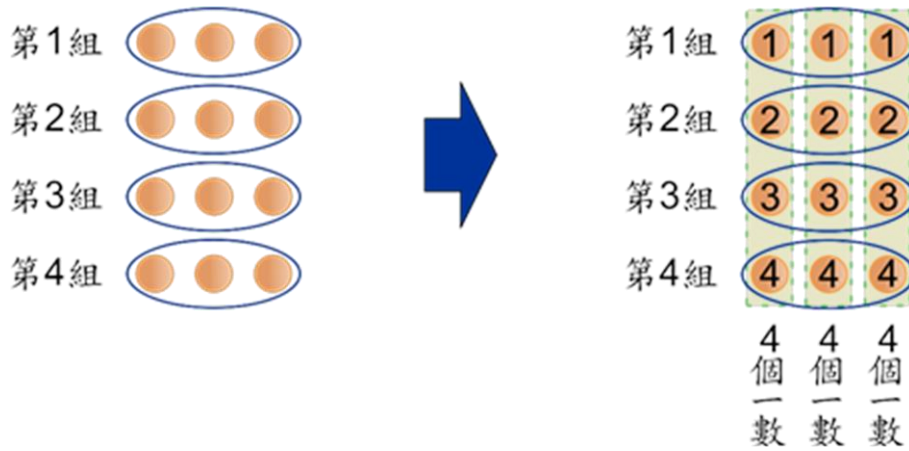
12 個彈珠，平分成 4 組，剛好分完；每組分到 3 個彈珠。



4 個一數，也會剛好數完；數 3 次。

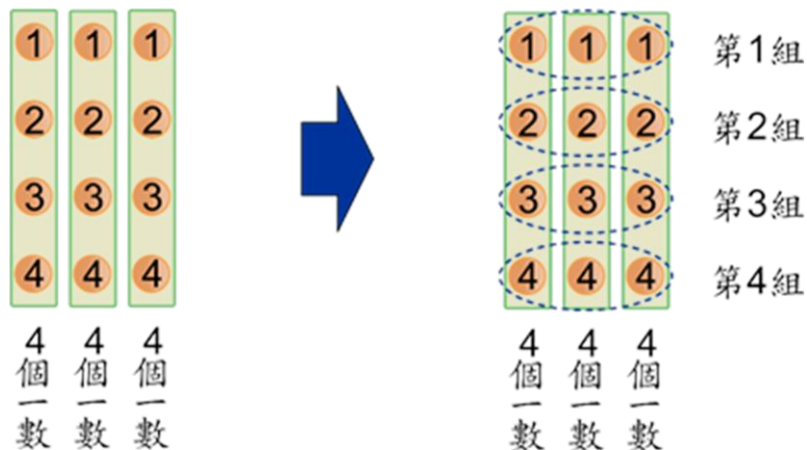


12 個彈珠，平分成 4 組，剛好分完；那麼 4 個一數，也會剛好數完。



平分成 4 組，每組分到 3 個彈珠。 ➡ 4 個一數，數 3 次。

12 個彈珠，4 個一數，剛好數完；那麼平分成 4 組也會剛好分完。



4 個一數，數 3 次。 ➡ 平分成 4 組，每組分到 3 個彈珠。



(4)哥哥有一堆彈珠，12顆一數剛好數完，16顆一數也剛好數完，請問哥哥最少有幾顆彈珠？

12個一數剛好數完，所以可能是12，24，36，48，60……

16個一數剛好數完，所以可能是16，32，48，64，80……

哥哥最少有幾顆彈珠是求12和16的最小公倍數。

$$\begin{array}{r|l}
 2 & 12 \quad 16 \\
 \hline
 2 & 6 \quad 8 \\
 \hline
 & 3 \quad 4
 \end{array}$$

12和16的最小公倍數： $2 \times 2 \times 3 \times 4 = 48$

答：哥哥彈珠數最少有48顆

(5)快樂國小六年級的學生人數不超過300人，全年級分組，每16人分成一組，或24人分成一組，都剛好分完，請問六年級的學生人數不超過300人，六年級學生最多是幾人？

16個一數剛好數完，所以可能是16，32，48，64，80……

24個一數剛好數完，所以可能是24，48，72，96，120……

所以先求16和24的最小公倍數。

$$\begin{array}{r|l}
 2 & 16 \quad 24 \\
 \hline
 2 & 8 \quad 12 \\
 \hline
 2 & 4 \quad 6 \\
 \hline
 & 2 \quad 3
 \end{array}$$

16和24的最小公倍數： $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 48$

我們學過：公倍數是最小公倍數的倍數

16和24的公倍數有： $48 \times 2 = 96$

$$48 \times 3 = 144 \quad 48 \times 5 = 240$$

$$48 \times 4 = 192 \quad 48 \times 6 = 288$$

答：最多288人



(6) 姐姐有一堆糖果，平分成 18 組，剛好分完；平分成 24 組，也剛好分完。
請問姐姐最少有幾顆糖果？

彈珠平分成 18 組，剛好分完→也可以說是 18 個一數，剛好數完
彈珠平分成 24 組，剛好分完→也可以說是 24 個一數，剛好數完
所以是求 18 和 24 的公倍數。

$$\begin{array}{r|l}
 2 & 18 \quad 24 \\
 \hline
 3 & 9 \quad 12 \\
 \hline
 & 3 \quad 4
 \end{array}$$

18 和 24 的最小公倍數： $2 \times 3 \times 3 \times 4 = 72$

答：姐姐最少有 72 顆糖果

(7) 幸福國小六年級的學生人數不超過 300 人，全年級分組，分成 16 組剛好分完，分成 24 組也剛好分完，請問：六年級的學生人數不超過 300 人，六年級學生最多是幾人？

學生人數平分成 16 組，剛好分完→也可以說是 16 個人一數，剛好數完
學生人數平分成 24 組，剛好分完→也可以說是 24 個人一數，剛好數完
所以先求 16 和 24 的最小公倍數。

$$\begin{array}{r|l}
 2 & 16 \quad 24 \\
 \hline
 2 & 8 \quad 12 \\
 \hline
 2 & 4 \quad 6 \\
 \hline
 & 2 \quad 3
 \end{array}$$

16 和 24 的最小公倍數： $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 48$

我們學過：公倍數是最小公倍數的倍數

16 和 24 的公倍數有： $48 \times 2 = 96$

$48 \times 3 = 144$ $48 \times 5 = 240$

$48 \times 4 = 192$ $48 \times 6 = 288$

答：最多 288 人



(8)在一條長 400 公尺的步道，從起點開始，每隔 6 公尺立一盞立燈，每隔 15 公尺種一棵樹。

- ①從這條步道的起點開始，第一次同時有立燈和樹木的地方，距離起點幾公尺？
- ②第四次同時有立燈和樹木的地方，距離起點幾公尺？

每 6 公尺立一盞立燈，所以立燈可能出現在 6m，12m，18m，24m，30m.....

每 15 公尺種一棵樹，所以樹木可能出現在 15m，30m，45m.....

所以是求 6 和 15 的最小公倍數。

$$\begin{array}{r|l} 3 & 6 \quad 15 \\ & 2 \quad 5 \end{array}$$

6 和 15 的最小公倍數： $3 \times 2 \times 5 = 30$

第一次同時有立燈和樹木距離起點 30 公尺

我們學過:公倍數是最小公倍數的倍數

6 和 15 的最小公倍數：30

第四次同時有立燈和樹木的地方，距離起點是 $30 \times 4 = 120$ 公尺

答:① 30 公尺

② 120 公尺



小試身手

做做看：

(1)用數個長 10 公分，寬 8 公分的長方形色紙，拼成一個正方形，請問：

- ①拼成最小正方形的邊長是幾公分？
- ②拼成正方形的邊長可能是幾公分？請寫出 3 個可能的答案。

(2)快樂水果行的橘子不超過 1500 粒，橘子每 80 粒裝一箱剛好裝完，橘子每 100 粒裝一箱也剛好裝完，請問快樂水果行的橘子最少是幾粒？

(3)在一條長 100 公尺的馬路上，從起點開始，每隔 4 公尺插一根國旗，每隔 10 公尺插一根標語旗。

- ①從這條馬路的起點開始，第一次同時有國旗和標語旗的地方，距離起點幾公尺？
- ②第二次同時有標語和國旗的地方，距離起點幾公尺？



教育部國民及學前教育署 編

國民小學

學生學習扶助教材

6 年級數學

