

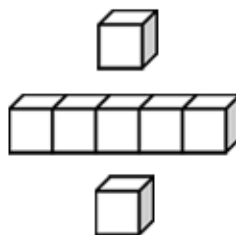


# 基本學習內容：SC-8-10-1

## 理解正方形、長方形、菱形及箏形 的對角線性質

班級：\_\_\_\_\_

姓名：\_\_\_\_\_

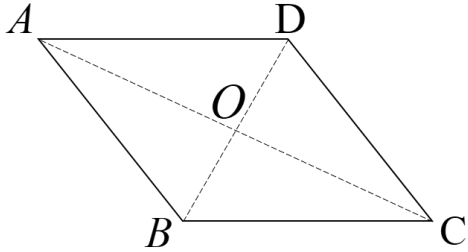




基本學習內容：SC-8-10-1

## ◎複習活動

如圖，平行四邊形 $ABCD$ 中， $\overline{AC}$ 和 $\overline{BD}$ 交於 $O$ 點，已知 $\overline{AB}=6$ ， $\overline{AD}=7$ ， $\overline{BD}=8$ ，請問 $\overline{CD}$ 、 $\overline{BC}$ 、 $\overline{OB}$ 、 $\overline{OD}$ 分別為何？



解：

①因為平行四邊形 $ABCD$ 的對邊等長，  
所以 $\overline{AD} = \overline{BC} = 7$ ， $\overline{AB} = \overline{CD} = 6$ 。

②因為平行四邊形 $ABCD$ 的對角線互相平分， $O$ 為對角線交點，  
所以 $\overline{OB} = \overline{OD} = \frac{1}{2}\overline{BD} = 8 \div 2 = 4$

答： $\overline{CD}=6$ 、 $\overline{BC}=7$ 、 $\overline{OB}=4$ 、 $\overline{OD}=4$



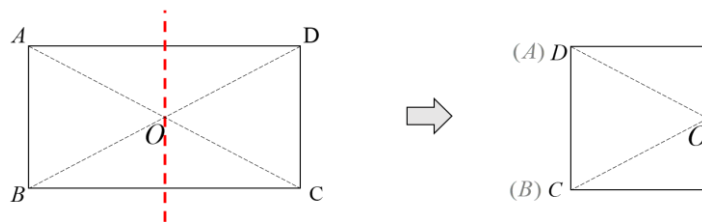
## ◎活動一：長方形的對角線性質

(1) 拿出附件一，

長方形  $ABCD$  的兩條對角線  $\overline{AC}$  與  $\overline{BD}$  相交於  $O$  點，請問這兩條對角線是否互相平分？

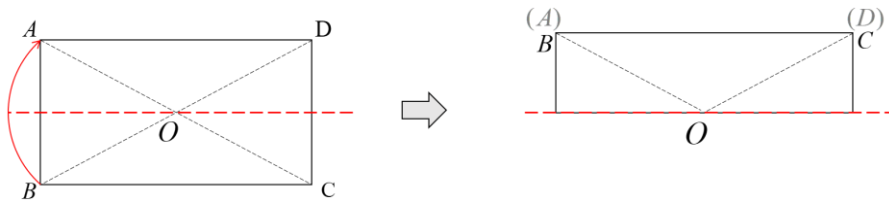
方法一

① 將長方形  $ABCD$  左右對摺，摺線過  $O$  點，使得  $\overline{CD}$  和  $\overline{BA}$  疊合，如下圖。



發現  $\overline{OD}$  與  $\overline{OA}$  疊合、 $\overline{OC}$  與  $\overline{OB}$  也疊合。即  $\overline{OA} = \overline{OD}$ 、 $\overline{OB} = \overline{OC}$ 。

② 將長方形  $ABCD$  上下對摺，摺線過  $O$  點，使得  $\overline{BC}$  與  $\overline{AD}$  疊合，如下圖。



發現  $\overline{OB}$  與  $\overline{OA}$  疊合、 $\overline{OC}$  與  $\overline{OD}$  也疊合。即  $\overline{OA} = \overline{OB}$ 、 $\overline{OD} = \overline{OC}$ 。

③ 所以  $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{CO} = \overline{OD}$

方法二

長方形  $ABCD$  四個角都是直角，可得兩組對邊互相平行，所以也是平行四邊形。

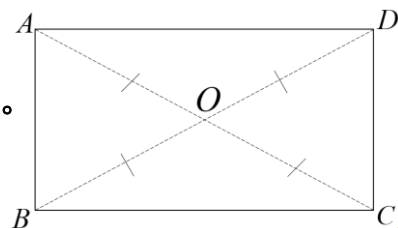
由平行四邊形對角線互相平分性質，可得長方形的對角線也會互相平分。

長方形的對角線交點會將對角線分割成等長的四段，

所以對角線也會等長，

我們稱「長方形兩條對角線等長且互相平分」。

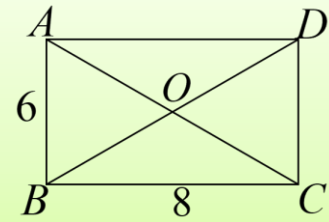
即  $\overline{AC} = \overline{BD}$  且  $\overline{OA} = \overline{OC} = \overline{OB} = \overline{OD}$ 。





基本學習內容：SC-8-10-1

(2) 如圖，四邊形  $ABCD$  為長方形，  
 已知  $\overline{AB} = 6$ ， $\overline{BC} = 8$ ，  
 求  $\overline{OA}$ ， $\overline{OB}$ ， $\overline{OC}$ ， $\overline{OD}$  的長度分別為何？



解：因為四邊形  $ABCD$  為長方形， $\overline{AB} = 6$ ， $\overline{BC} = 8$

$$\text{所以 } \overline{AC} = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10$$

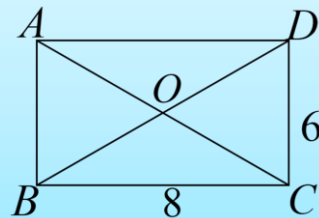
因為長方形的對角線等長且平分，所以  $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = \overline{OD} = 10 \div 2 = 5$

答： $\overline{OA} = 5$ ， $\overline{OB} = 5$ ， $\overline{OC} = 5$ ， $\overline{OD} = 5$ 。



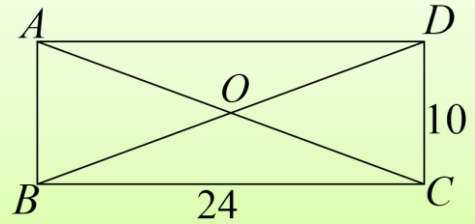
### 隨堂練習

如圖，四邊形  $ABCD$  為長方形， $\overline{BC} = 8$ ， $\overline{CD} = 6$ ，請問  $\triangle BOC$  的周長為何？





(3)如圖，四邊形 $ABCD$ 為長方形，  
已知 $\overline{BC}=24$ ， $\overline{CD}=10$ ，  
請問 $\overline{AC}$ 與 $\overline{OC}$ 的長度分別為何？



解：①在 $\triangle ABC$ 中， $\angle BCD=90^\circ$ ，

$$\text{由畢氏定理可得 } \overline{BD} = \sqrt{\overline{BC}^2 + \overline{CD}^2} = \sqrt{24^2 + 10^2} = \sqrt{576 + 100} = \sqrt{676} = 26$$

②因為四邊形 $ABCD$ 為長方形，對角線等長。

$$\text{所以 } \overline{AC} = \overline{BD} = 26$$

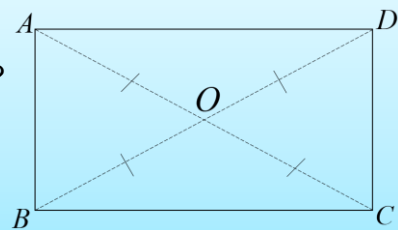
$$\text{所以 } \overline{OC} = \frac{1}{2}\overline{AC} = \frac{1}{2}\overline{BD} = \frac{1}{2} \times 26 = 13$$

答： $\overline{AC}=26$ ， $\overline{OC}=13$ 。



隨堂練習

如圖，長方形 $ABCD$ ，已知 $\overline{AB}=12$ ，  
 $\overline{BC}=16$ ，求 $\overline{OA}$ ， $\overline{OB}$ ， $\overline{OC}$ ， $\overline{OD}$ 的長分別為何？





基本學習內容：SC-8-10-1

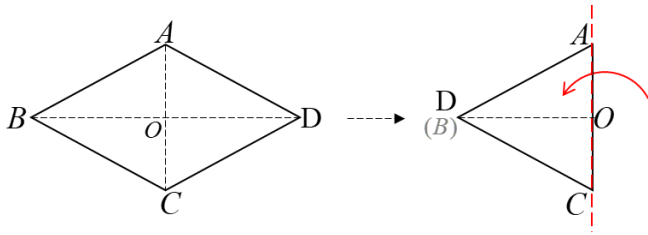
## ◎活動二：菱形的對角線性質

(4) 拿出附件二，

菱形 $ABCD$ 的兩條對角線 $\overline{AC}$ 與 $\overline{BD}$ 相交於 $O$ 點，請問這兩條對角線是否互相平分，也互相垂直？

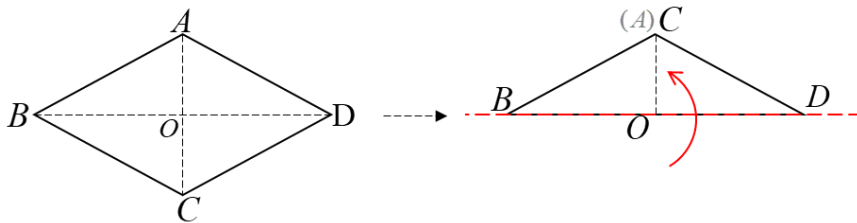
方法一

① 將菱形 $ABCD$ 左右對摺，使得 $\overline{AD}$ 和 $\overline{AB}$ 疊合， $\overline{CD}$ 與 $\overline{CB}$ 疊合，如下圖。



發現對角線 $\overline{AC}$ 是對稱軸， $\overline{OD}$ 與 $\overline{OB}$ 疊合。

② 將菱形 $ABCD$ 上下對摺，使得 $\overline{CB}$ 與 $\overline{AB}$ 疊合， $\overline{CD}$ 與 $\overline{AD}$ 疊合，如下圖。



發現對角線 $\overline{BD}$ 是對稱軸， $\overline{OC}$ 與 $\overline{OA}$ 疊合。

③ 所以對角線 $\overline{AC}$ 和 $\overline{BD}$ 互相垂直，且 $\overline{OA} = \overline{OC}$ ， $\overline{OB} = \overline{OD}$ 。

方法二

因為菱形 $ABCD$ 是對稱圖形，對角線 $\overline{AC}$ 、 $\overline{BD}$ 為其兩條對稱軸。

從對稱軸 $\overline{AC}$ 來看， $B$ 點和 $D$ 點互為對稱點，所以 $\overline{AC}$ 垂直平分 $\overline{BD}$ 。

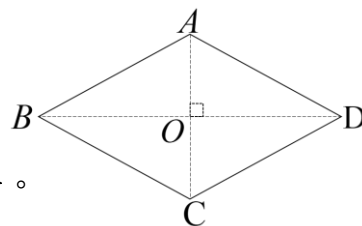
另一方面，從對稱軸 $\overline{BD}$ 來看， $A$ 點和 $C$ 點互為對稱點，所以 $\overline{BD}$ 垂直平分 $\overline{AC}$ 。因此兩條對角線互相垂直平分。

菱形的對角線

①  $\overline{AC}$  垂直平分  $\overline{BD}$

②  $\overline{BD}$  垂直平分  $\overline{AC}$

我們稱菱形的兩條對角線互相垂直平分。

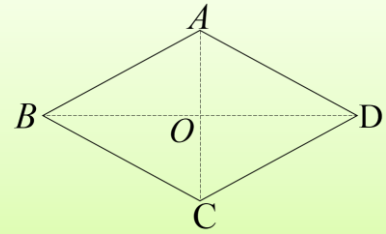




(5) 如圖，菱形  $ABCD$ ，已知  $\overline{OA} = 5$ ， $\overline{OB} = 12$ ，

求

- ① 菱形  $ABCD$  的周長。
- ②  $\triangle OCD$  的周長。



解：① 因為菱形的對角線互相垂直，且  $\angle AOB$  為直角，

$$\text{利用畢氏定理得 } \overline{AB} = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$$

$$\text{菱形 } ABCD \text{ 的周長} = 13 \times 4 = 52$$

② 菱形的對角線互相平分， $\overline{OC} = \overline{OA} = 5$ ， $\overline{OD} = \overline{OB} = 12$ ， $\overline{AB} = \overline{CD} = 13$ ，

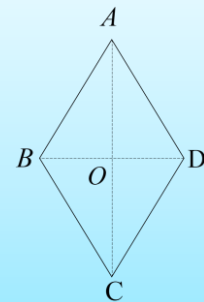
$$\triangle OCD \text{ 的周長} = 5 + 12 + 13 = 30。$$



隨堂練習

如圖，菱形  $ABCD$ ，已知  $\overline{OA} = 13$ ， $\overline{AB} = 15$ ，

請問  $\overline{OA}$ 、 $\overline{OB}$ 、 $\overline{OC}$ 、 $\overline{OD}$  分別為何？





### ◎活動三：正方形的對角線性質

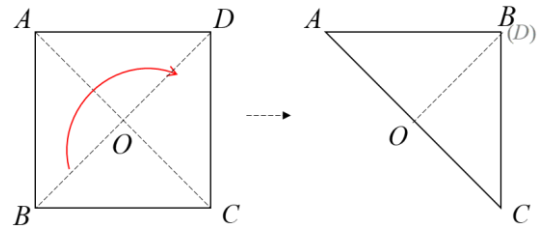
(6) 拿出附件三，

正方形  $ABCD$  的兩條對角線  $\overline{AC}$  與  $\overline{BD}$  相交於  $O$  點，請問這兩條對角線是否互相垂直平分？

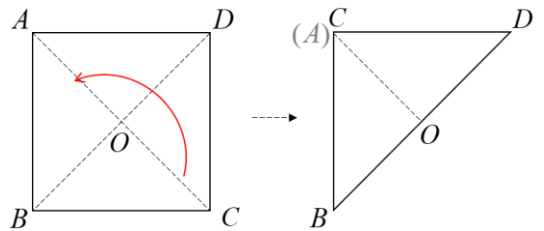
說明：

方法一

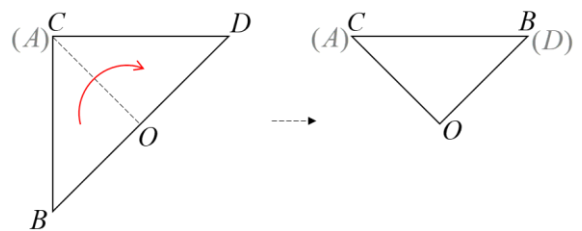
- 將正方形  $ABCD$ ，沿  $\overline{AC}$  對摺，如圖。  
發現對角線  $\overline{AC}$  是對稱軸、 $\overline{AB}$  和  $\overline{AD}$  疊合、  
 $\overline{CB}$  和  $\overline{CD}$  疊合、 $\overline{OB}$  與  $\overline{OD}$  也疊合。  
所以  $\overline{AC}$  垂直平分  $\overline{BD}$ 。



- 將正方形  $ABCD$ ，沿  $\overline{BD}$  對摺，如圖。  
發現對角線  $\overline{BD}$  是對稱軸、 $\overline{CB}$  和  $\overline{AB}$  疊合、  
 $\overline{CD}$  和  $\overline{AD}$  疊合、 $\overline{OC}$  與  $\overline{OA}$  也疊合。  
所以  $\overline{BD}$  垂直平分  $\overline{AC}$ 。



- 將正方形  $ABCD$  再對摺如圖，  
發現  $\triangle AOD$  和  $\triangle AOB$  和  
 $\triangle BOC$  和  $\triangle COD$  皆重合。  
 $\overline{OB} = \overline{OD}$ ， $\overline{OA} = \overline{OC}$ 。



所以正方形的對角線  $\overline{AC}$  與  $\overline{BD}$  等長且互相垂直平分。

方法二

正方形四邊相等

正方形是菱形的一種，所以對角線互相垂直平分；

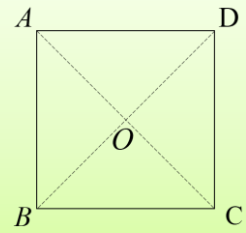
正方形是長方形的一種，所以對角線等長且互相平分；

#### 重點整理

我們稱正方形的兩條對角線等長且互相垂直平分。



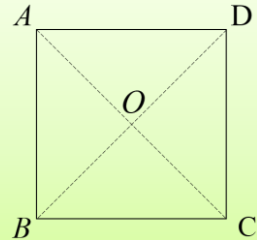
(7)如圖，正方形 $ABCD$ ，已知 $\overline{AB} = \sqrt{2}$ ，  
請問 $\overline{AO}$ 、 $\overline{BO}$ 、 $\overline{CO}$ 、 $\overline{DO}$ 的長分別為何？



解：因為正方形的四邊等長，所以 $\overline{AB} = \overline{BC} = \sqrt{2}$ ，  
 $\overline{AC} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{2+2} = \sqrt{4} = 2$ ，  
因為正方形的對角線互相垂直且平分，  
所以 $\overline{AO} = \overline{BO} = \overline{CO} = \overline{DO} = \frac{1}{2} \times \overline{AC} = \frac{1}{2} \times 2 = 1$

答： $\overline{AO} = 1$ ， $\overline{BO} = 1$ ， $\overline{CO} = 1$ ， $\overline{DO} = 1$ 。

(8)如圖， $O$ 為正方形 $ABCD$ 的對角線交點，  
已知 $\overline{OB} = 3$ ，請問正方形 $ABCD$ 面積為多少？



解：方法一

因為正方形 $ABCD$ 的對角線等長且互相垂直平分，所以 $\overline{OB} = \overline{OC} = 3$

由畢氏定理可知， $\overline{BC} = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

正方形 $ABCD$ 的面積 $= 3\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} = 18$

方法二

因為正方形 $ABCD$ 的對角線互相垂直平分且將面積四等分，

所以 $\overline{OB} = \overline{OC} = 3$ ， $\triangle BOC$ 的面積 $= \frac{1}{2} \times 3 \times 3$

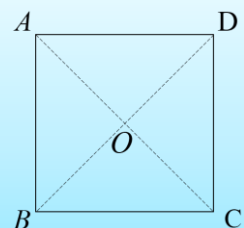
正方形 $ABCD$ 的面積 $= 4 \times \triangle BOC = 4 \times (\frac{1}{2} \times 3 \times 3) = 18$ (平方單位)

答：面積 $= 18$ 。



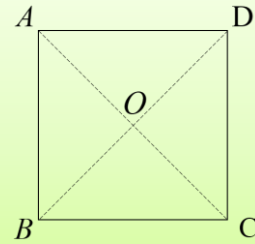
隨堂練習

如圖，四邊形 $ABCD$ 為正方形， $\overline{AC} = 14$ ，  
求 $\overline{AO}$ ， $\overline{BO}$ ， $\overline{CO}$ ， $\overline{DO}$ 。





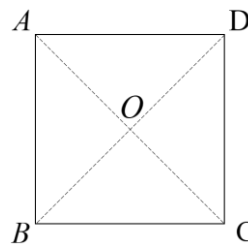
(9)如圖， $O$ 為正方形 $ABCD$ 的對角線交點，  
且  $\overline{AC} = \overline{BD}$ ，  
試說明  $\overline{AC} \perp \overline{BD}$ 。



說明：

- ①如圖，正方形 $ABCD$ 中，對角線 $\overline{AC}$ 與 $\overline{BD}$ 相交於 $O$ 點。  
因為 $ABCD$ 為正方形，所以四邊等長  
所以  $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{AD}$ ， $\angle ABC = \angle BCD = \angle CDA = \angle DAB = 90^\circ$ 。
- ②因為 $ABCD$ 為正方形，所以對角線互相平分  
所以  $\overline{OA} = \overline{OC} = \frac{1}{2}\overline{AC} = \frac{1}{2}\overline{BD} = \overline{OB} = \overline{OD}$
- ③在 $\triangle AOB$ 與 $\triangle AOD$ 中，  
 $\overline{AB} = \overline{AD}$ ，  
 $\overline{OB} = \overline{OD}$   
 $\overline{AO} = \overline{AO}$   
所以  $\triangle AOB \cong \triangle AOD$  (SSS)  
得  $\angle AOB = \angle AOD$ ，又因為  $\angle AOB + \angle AOD = 180^\circ$   
所以  $\angle AOB = \angle AOD = 180^\circ \div 2 = 90^\circ$   
所以  $\overline{AC} \perp \overline{BD}$ 。

由上述說明可知，  
正方形的對角線等長且互相垂直平分。  
即  $\overline{AC} = \overline{BD}$ 、  
 $\overline{OA} = \overline{OC} = \overline{OB} = \overline{OD}$  且  $\overline{AC} \perp \overline{BD}$ 。



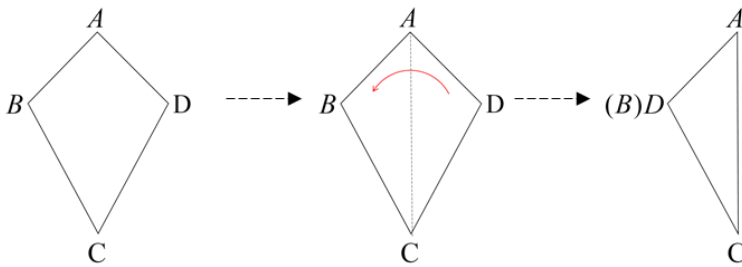


## ◎複習活動：箏形

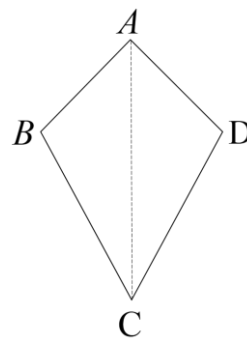
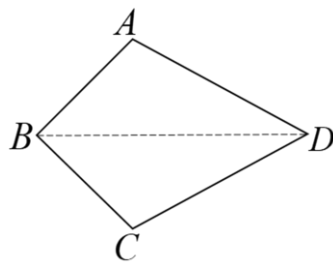
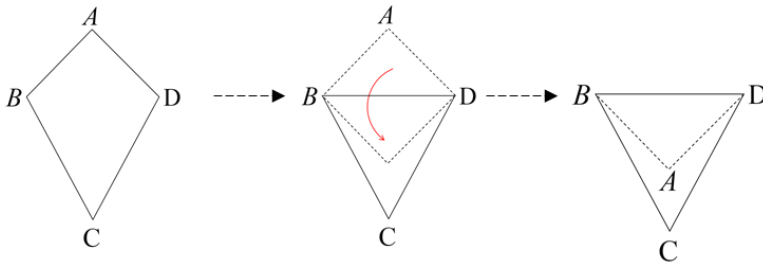
(10) 拿出附件四，

摺摺看，箏形是不是線對稱圖形？

① 將箏形左右對摺，發現對角線  $\overline{AC}$  是對稱軸，而且 B 和 D 是對稱點。



② 將箏形上下對摺，發現另一條對角線  $\overline{BD}$  不是對稱軸。



箏形恰有一條對角線是對稱軸，所以箏形是線對稱圖形。



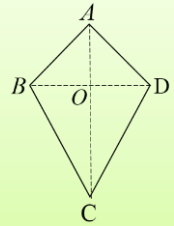


## ◎活動四：箏形的對角線性質

(11)如圖，箏形 $ABCD$ 的兩條對角線 $\overline{AC}$ 與 $\overline{BD}$ 相交於 $O$ 點，

請問

- ①  $\overline{AC}$  與  $\overline{BD}$  是否互相垂直平分？
- ②  $\overline{OB}$  和  $\overline{OD}$  是否等長？

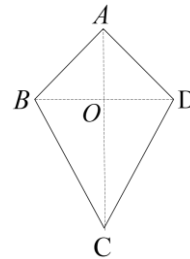


解：

因為對角線 $\overline{AC}$ 為對稱軸， $B$ 和 $D$ 為對稱點。

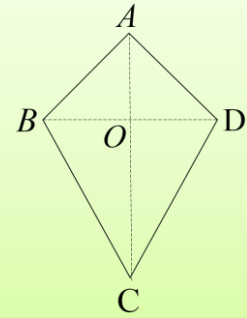
所以 $\overline{AC}$ 垂直對角線 $\overline{BD}$ ，且 $\overline{OB} = \overline{OD}$ 。

箏形恰有一條對角線垂直平分另一條對角線，  
例如 $\overline{OB} = \overline{OD}$ 且 $\overline{AC} \perp \overline{BD}$ 。





(12) 如圖，箏形  $ABCD$ ，已知  $\overline{AO} = 5$ ， $\overline{BO} = 7$ ， $\overline{CO} = 13$ ，  
求箏形  $ABCD$  的周長。



解：

因為  $\overline{AO} = 5$ ， $\overline{BO} = 7$ ， $\overline{CO} = 13$

因為箏形的對角線互相垂直，

所以  $\overline{AB} = \sqrt{5^2 + 7^2} = \sqrt{74}$ ， $\overline{BC} = \sqrt{7^2 + 13^2} = \sqrt{218}$ 。

箏形  $ABCD$  的周長  $= 2 \times (\overline{AB} + \overline{BC}) = 2 \times (\sqrt{74} + \sqrt{218}) = 2\sqrt{74} + 2\sqrt{218}$

答：  $2\sqrt{74} + 2\sqrt{218}$

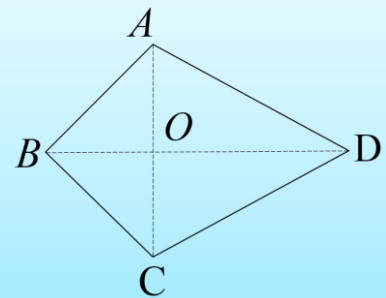


隨堂練習

如圖，箏形  $ABCD$ ，已知  $\overline{AO} = 6$ ，

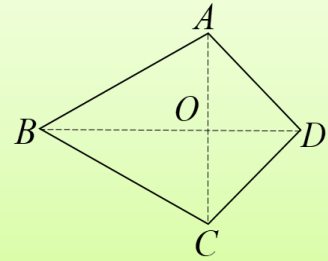
$\overline{AB} = 10$ ， $\overline{DO} = 13$ ，

求箏形  $ABCD$  的周長。





(13) 如圖，箏形  $ABCD$ ，已知  $\overline{AO}=5$ ， $\overline{DO}=7$ ， $\overline{BO}=13$ ，  
請問箏形  $ABCD$  的面積為何？



解：

因為  $\overline{AO}=6$ ， $\overline{DO}=7$ ， $\overline{BO}=13$  且箏形的對角線互相垂直，

$$\text{所以 } \triangle ABD \text{ 的面積} = \frac{1}{2} \times \overline{BD} \times \overline{AO} = \frac{1}{2} \times (\overline{BO} + \overline{DO}) \times \overline{AO} = \frac{1}{2} \times (13+7) \times 6 = 60$$

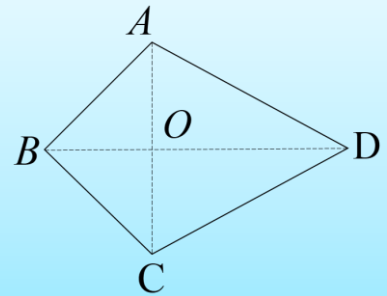
箏形  $ABCD$  的面積  $= 2 \times 60 = 120$  (平方單位)

答：120(平方單位)



### 隨堂練習

如圖，箏形  $ABCD$ ，已知  $\overline{AO}=6$ ， $\overline{AB}=10$ ，  
 $\overline{DO}=13$ ，求箏形  $ABCD$  的面積。

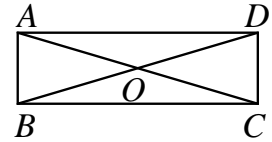




小試身手

(1) 如圖，長方形  $ABCD$  中， $\overline{AD} = 24$ ， $\overline{AB} = 7$ ，則：

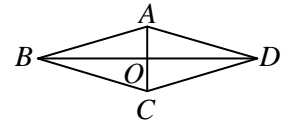
- ①  $\overline{AO} + \overline{OD} = ?$
- ②  $\triangle AOD$  的面積 = ?



(2) 菱形  $ABCD$  的對角線相交於  $O$  點，且  $\overline{AC} = 14$ ，

$\overline{BD} = 48$ ，

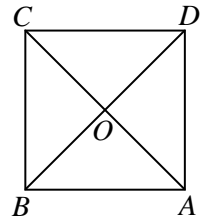
求  $\triangle ABD$  的周長與面積。



(3) 如圖， $O$  為正方形  $ABCD$  的對角線的交點，

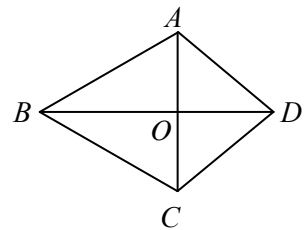
且  $\overline{AC} = 8$ ，則：

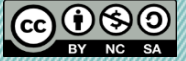
- ① 正方形  $ABCD$  的周長為？
- ② 正方形  $ABCD$  的面積 = ？



(4) 如圖， $ABCD$  為箏形，其中  $\overline{AB} = \overline{BC}$ ， $\overline{AD} = \overline{CD}$ 。

若  $\overline{AB} = \sqrt{13}$ ， $\overline{OB} = 3$ ，則  $\overline{OC} = ?$





教育部國民及學前教育署 編

國民中學

學生學習扶助教材

8

年級數學

