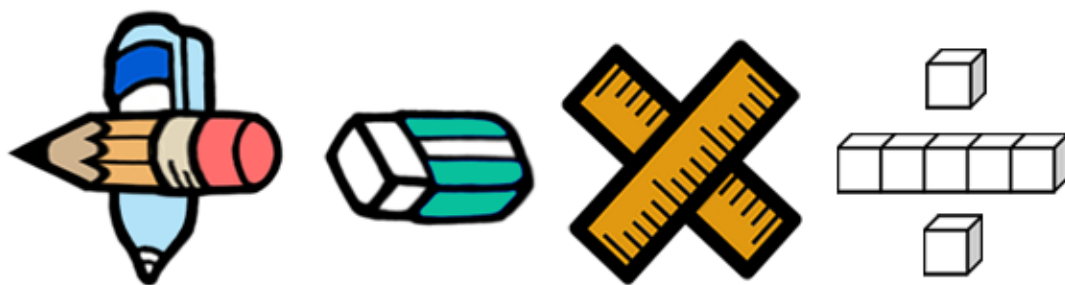




# 基本學習內容：FC-9-1-1

## 二次函數

### 【教師用】







基本學習內容：FC-9-1-1

## 學習內容：

**9-1-1 二次函數的意義：**二次函數的意義；具體情境中列出兩量的二次函數關係。

## 基本學習內容：

FC-9-1-1 二次函數。

## 基本學習表現：

FCP-9-1-1-1 能以具體情境來理解二次函數。

FCP-9-1-1-2 認識二次函數的形式為 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 。

FCP-9-1-1-3 能求二次函數的函數值。

## 概要說明：

- 本基本學習內容 FC-9-1-1 為 FC-8-1-1 之後續學習概念，故學生已理解函數的對應關係及認識常數函數及一次函數。本基本學習內容幫助學生認識二次函數及計算其函數值。
- 學生在此之前已有一次函數的先備知識，故可由此直接引入二次函數並利用具體實例或情境（如正方形面積  $y$  與邊長  $x$  的對應關係為  $y = x^2$ ）複習與加強函數的概念，從生活情境關係逐步抽象到數的關係。

邊長(公分)	1	2	3	4	5	6
面積(平方公分)	$1^2$	$2^2$	$3^2$	$4^2$	$5^2$	$6^2$

我們可以假設邊長 $x$ (公分)，面積為 $y$ (平方公分)， $x$ 為任意正數，把上述關係改記成 $y = x^2$ 。

- 二次函數 $y = ax^2 + bx + c$ 也可看成是一個對應：將 $x$ 值對應到的 $y$ 值為 $ax^2 + bx + c$ 。因此，二次多項式中「先化簡或運算，再代入值」與「先代入值，再化簡或運算所得的值」均相等。
- 學生在一次函數的單元，已練習過求一次函數之函數值的方法，在此求函數值的作法雖然一樣，但二次函數牽涉到求 $ax^2$ 的值，在教學時可銜接學生的舊經驗，強調欲求當 $x = t$ 時 $y = ax^2$ 的函數值，在把 $x = t$ 代入的過程中，應先平方再乘以 $a$ ，而不能先把 $t$ 乘以 $a$ 之後再一起平方。



基本學習內容：FC-9-1-1 二次函數。

◎二次函數

(1) 假設是正方形邊長為  $x$  公分，面積為  $y$  平方公分，

① 請完成下列表格。

邊長為 $x$ 公分	1		2.5		$\sqrt{10}$
面積為 $y$ 平方公分		4		9	



② 邊長  $x$  與面積  $y$  的關係式為何？

解：

① 請完成下列表格。

邊長為 $x$ 公分	1	2	2.5	3	$\sqrt{10}$
面積為 $y$ 平方公分	1	4	6.25	9	10

② 邊長  $x$  與面積  $y$  的關係為何？

正方形面積 = 邊長  $\times$  邊長

$x$  與  $y$  的關係可表示為  $y = x \times x = x^2$ ，即  $y = x^2$



當邊長 2.5 公分時，面積是 6.25 平方公分，也就是當  $x = 2.5$  時， $y = 6.25$ 。

(2) 已知長方形的寬都比長多 2 公分，長方形的長和面積的關係為何？

假設長方形的長為  $x$  公分，寬為  $x + 2$  公分，面積為  $y$  平方公分，

① 請完成下列表格。

長為 $x$ 公分	1		5	8	
寬為 $x + 2$ 公分		4			11
面積為 $y$ 平方公分					



② 長  $x$  與面積  $y$  的關係式為何？

③ 當  $x = 20$  時， $y = ?$

解：

① 請完成下列表格。

長為 $x$ 公分	1	2	5	8	9
寬為 $x + 2$ 公分	3	4	7	10	11
面積為 $y$ 平方公分	3	8	35	80	99

② 長  $x$  與面積  $y$  的關係為何？

長方形面積 = 長  $\times$  寬

$x$  與  $y$  的關係可表示為  $y = x \times (x + 2) = x^2 + 2x$ ，即  $y = x^2 + 2x$

③ 將  $x = 20$  代入  $y = x^2 + 2x$ ，得到  $y = 20^2 + 2 \times 20 = 440$

**教材內容說明：**

1. 本教材第 1 頁的教學重點是幫助學生認識二次函數並以未知數符號記錄生活中的情境問題。
2. 第(1)題給定正方形邊長為 $x$ 公分、面積為 $y$ 公分及一表格，要求學生完成表格並列出 $x$ 與 $y$ 的關係式
  - 由本題可知道 $x$ 與 $y$ 的關係式為 $y = x^2$ ，教師提醒框提醒學生此處代表邊長為 $x$ 公分，面積為 $y$ 平方公分，若邊長為 3 公分，面積為 9 平方公分。
3. 第(2)題給定長方形長為 $x$ 公分、寬為 $x + 2$ 公分，面積為 $y$ 平方公分及一表格，要求學生完成下面三個子題。
  - 子題①可透過「長方形面積=長×寬」，得到 $y = x^2 + 2x$ 。
  - 子題②若學生無法列出 $x$ 與 $y$ 的二次關係式，教師可舉 $x$ 與 $y$ 的一次關係式的例子引導學生。
  - 子題③幫助學生建立二次函數代入值的運算。



基本學習內容：FC-9-1-1 二次函數。

由前面的例子中， $y=x^2$ 、 $y=x^2+2x$ ，其中 $x^2$ 與 $x^2+2x$ ， $x$ 的部分是二次多項式，也就是 $y=ax^2+bx+c$  ( $a \neq 0$ )，稱為 $y$ 是 $x$ 的二次函數。

若一個函數經過化簡之後，形如 $y=ax^2+bx+c$  ( $a \neq 0$ )，此函數也稱為 $y$ 是 $x$ 的二次函數。

例如： $y=(x+1)^2$ 、 $y=-2x^2-x+1$ 都是 $x$ 的二次函數。



(3)判斷下列各式中，那些 $y$ 是 $x$ 的二次函數？

- |                    |                        |
|--------------------|------------------------|
| ① $y=2x$           | ② $y=2x^2$             |
| ③ $y=-0.5x^2+3x+1$ | ④ $y=\frac{3}{2}x^2-1$ |
| ⑤ $y=(x-2)^2+4$    | ⑥ $y=4$                |

解：

①  $y=2x$ ，其中 $2x$ 不是二次多項式，所以 $y=2x$ 不是 $x$ 的二次函數。

②  $y=2x^2$ ，其中 $2x^2$ 是二次多項式，所以 $y=2x^2$ 是 $x$ 的二次函數。

③  $y=-0.5x^2+3x+1$ ，其中 $-0.5x^2+3x+1$ 是二次多項式，  
所以 $y=-0.5x^2+3x+1$ 是 $x$ 的二次函數。

④  $y=\frac{3}{2}x^2-1$ ，其中 $\frac{3}{2}x^2-1$ 是二次多項式，所以 $y$ 是 $x$ 的二次函數。

⑤  $y=(x-2)^2+4=x^2-4x+8$ ，其中 $x^2-4x+8$ 是二次多項式，  
所以 $y=(x-2)^2+4$ 是 $x$ 的二次函數。

⑥  $y=4$ ，其中 $4$ 不是二次多項式，所以 $y=4$ 不是 $x$ 的二次函數。

答：選項②、③、④與⑤， $y$ 是 $x$ 的二次函數



隨堂練習

判斷下列各式中，那些 $y$ 是 $x$ 的二次函數？

- |                 |                |
|-----------------|----------------|
| ① $y=x$         | ② $y=-4$       |
| ③ $y=-x^2-2x$   | ④ $y=2.5x^2+2$ |
| ⑤ $y=(x-1)^2+4$ | ⑥ $y=-3x$      |

答：③、④與⑤

**教材內容說明：**

1. 本教材第 2 頁的教學重點是幫助學生認識二次函數。
2. 教師重點框幫助學生認識二次函數，利用前述兩情境所代表的關係式 $y = x^2$ 、 $y = x^2 + 2x$ ，幫助學生理解 $x$ 和 $y$ 的關係式。

$y = ax^2 + bx + c$ 稱為二次函數，其中 $a \neq 0$ 。

3. 第(3)題給定六個函數，要求學生判斷何者為二次函數。
  - 引導學生理解最高次 $x^2$ 係數為小數、分數、負數皆為二次函數。
4. 隨堂練習給定六個函數，要求學生判斷哪些為二次函數。



基本學習內容：FC-9-1-1 二次函數。

(4)二次函數 $y = x^2 + 4x + 2$ ，在 $x = 3$ 時， $y = ?$

解：

二次函數 $y = x^2 + 4x + 2$ ，將 $x = 3$ 代入 $y = 3^2 + 4 \times 3 + 2$

$$= 9 + 12 + 2$$

$$= 23$$

在 $x = 3$ 時， $y = 23$

答： $y = 23$

當 $x = 3$ 時， $y = 23$ ，我們也可以說 $x = 3$ 對應的函數值是 23。



隨堂練習

二次函數 $y = x^2 - 2x + 4$ ，在 $x = 2$ 時， $y = ?$  答：4

(5)二次函數 $y = (x + 1)^2$ ，在 $x = -2$ 時，其函數值是多少？

解：

二次函數 $y = (x + 1)^2$ ，將 $x = -2$ 代入 $y = (-2 + 1)^2 = 1$

在 $x = -2$ 時，其函數值是 1。

答：函數值是 1



隨堂練習

二次函數 $y = -(x - 3)^2 - 4$ ，在 $x = 2$ 時，其函數值是多少？ 答：-5

**教材內容說明：**

1. 本教材第 3 頁的教學重點是幫助學生認識二次函數的函數值。
2. 第(4)題給定一形如 $y = ax^2 + bx + c$ 的二次函數，要求學生計算出函數值。
3. 教師提醒框說明對應函數值的意義。
4. 隨堂練習給定一形如 $y = ax^2 + bx + c$ 的二次函數，要求學生計算出函數值。
5. 第(5)題給定一形如 $y = (x + a)^2$ 的二次函數，要求學生計算出函數值。
6. 隨堂練習給定一形如 $y = (x + a)^2$ 的二次函數，要求學生計算出函數值。



基本學習內容：FC-9-1-1 二次函數。

(6)正一國中辦理童軍教育活動，參加的學生有  $y$  人，共分成  $x$  隊，每隊的學生人數比隊數多 3 人，試回答下列問題。

- ①寫出  $x$  和  $y$  的關係式。
- ② $y$  是否為  $x$  的二次函數？

解：

- ①寫出  $x$  和  $y$  的關係式，  
參加人數=每隊學生人數 $\times$ 隊數

$$y = (x+3) \times x$$

$$y = x^2 + 3x$$

- ②在  $y = x^2 + 3x$ ，

其中  $x^2 + 3x$  是二次多項式，所以  $y$  是  $x$  的二次函數。

答：①  $y = x^2 + 3x$  ②  $y$  是  $x$  的二次函數

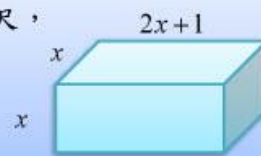


隨堂練習

一個長方體的長為  $x$  公尺、寬為  $2x+1$  公尺、高也為  $x$  公尺，  
表面積為  $y$  平方公尺，試回答下列問題。

- ①寫出  $x$  和  $y$  的關係式。 答： $y = 10x^2 + 4x$

- ② $y$  是否為  $x$  的二次函數？ 答： $y$  是  $x$  的二次函數



**教材內容說明：**

1. 本教材第 4 頁的教學重點是幫助學生認識生活中的二次函數問題。
2. 第(6)題給定一生活情境，要求學生找出情境中 $x$ 和 $y$ 的關係，並判斷 $y$ 是否為 $x$ 的二次函數。
  - 可以先幫助學生找到題目中的關係式，  
「參加人數 = 每隊人數  $\times$  隊數」，再將每隊人數比隊數多 3 人的關係代入，  
得到 $y = (x + 3) \times x$ 。
  - 若學生無法回答出子題②，教師應幫助學生回到第(3)題，重新判斷何者為二次函數。
3. 隨堂練習給定一生活情境，要求學生找出情境中 $x$ 和 $y$ 的關係，並判斷 $y$ 是否為 $x$ 的二次函數。



基本學習內容：FC-9-1-1 二次函數。

(7) 熊熊旅行社辦理畢業旅行，成團人數 30 人，每人團費 5400 元，若每多一人參加，團費每人減少 50 元，假設多增加  $x$  人參加，總金額共收費  $y$  元，試回答下列問題。

- ① 寫出  $x$  和  $y$  的關係式。
- ②  $y$  是否為  $x$  的二次函數？

解：

- ① 寫出  $x$  和  $y$  的關係式。

多增加人數( $x$ 人)	參加人數	每人團費	總金額 $y$ 元
1	30+1	5400-50×1	(30+1)(5400-50×1)
2	30+2	5400-50×2	(30+2)(5400-50×2)
3	30+3	5400-50×3	(30+3)(5400-50×3)
4	30+4	5400-50×4	(30+4)(5400-50×4)
5	30+5	5400-50×5	(30+5)(5400-50×5)
⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮
$x$	30+ $x$	5400-50× $x$	(30+ $x$ )(5400-50× $x$ )

由上表可以歸納出  $y = (30+x)(5400-50x)$

- ②

$$\begin{aligned} y &= (30+x)(5400-50x) \\ &= 162000 - 1500x + 5400x - 50x^2 \\ &= -50x^2 + 3900x + 162000 \end{aligned}$$

其中  $-50x^2 + 3900x + 162000$  是二次多項式，所以  $y$  是  $x$  的二次函數。

答：①  $y = (30+x)(5400-50x)$  ②  $y$  是  $x$  的二次函數



隨堂練習

阿姿種了 40 顆芒果樹，每顆芒果樹一年可產 700 顆芒果，若每加種一棵芒果樹，芒果樹會少產 50 顆芒果，若多種  $x$  顆樹，總產量共有  $y$  顆芒果，試回答下列問題。

- ① 寫出  $x$  和  $y$  的關係式。 答： $y = (40+x)(700-50x)$
- ②  $y$  是否為  $x$  的二次函數？ 答： $y$  是  $x$  的二次函數

**教材內容說明：**

1. 本教材第 5 頁的教學重點是幫助學生認識生活中的二次函數問題。
2. 第(7)題給定較複雜的生活情境，子題①要求學生找出情境中 $x$ 和 $y$ 的關係式，子題②判斷 $y$ 是否為 $x$ 的二次函數。
  - 本題的情境較為複雜，本教材透過表格，幫助學生觀察增加人數與每人團費的關係，再進一步藉由  
「總金額 = 參加人數  $\times$  每人團費」，列出 $x$ 和 $y$ 的關係式。
  - 若學生無法回答出子題②，教師應幫助學生回到第(3)題，重新判斷何者為二次函數。
3. 隨堂練習給定較複雜的生活情境，子題①要求學生找出情境中 $x$ ,  $y$ 的關係，子題②判斷 $y$ 是否為 $x$ 的二次函數。



基本學習內容：FC-9-1-1 二次函數。

(8)若二次函數 $y=(x-3)^2+2$ ，試回答下列問題：

①請完成下列表格。

$x$	0	1	2	3	4	5	6
$y$							

②當 $x$ 的值從0到6， $y$ 的值的改變方式是下列何種情況？

- A. 由小到大。
- B. 由大到小。
- C. 先由小到大，再由大到小。
- D. 先由大到小，再由小到大。

解：

①二次函數 $y=(x-3)^2+2$ ，試完成下列表格。

$x=0$ 代入 $y=(x-3)^2+2$ ，得到 $y=(0-3)^2+2=11$ 。

$x=1$ 代入 $y=(x-3)^2+2$ ，得到 $y=(1-3)^2+2=6$ 。

$x=2$ 代入 $y=(x-3)^2+2$ ，得到 $y=(2-3)^2+2=3$ 。

$x=3$ 代入 $y=(x-3)^2+2$ ，得到 $y=(3-3)^2+2=2$ 。

$x=4$ 代入 $y=(x-3)^2+2$ ，得到 $y=(4-3)^2+2=3$ 。

$x=5$ 代入 $y=(x-3)^2+2$ ，得到 $y=(5-3)^2+2=6$ 。

$x=6$ 代入 $y=(x-3)^2+2$ ，得到 $y=(6-3)^2+2=11$ 。

$x$	0	1	2	3	4	5	6
$y$	11	6	3	2	3	6	11

②觀察上面表格，發現當 $x$ 的值從0到6，

$y$ 的值的改變方式是先由大到小，再由小到大，選擇D。



隨堂練習

若二次函數 $y=-(x+2)^2-3$ ，試完成下列表格

$x$	-5	-4	-3	-2	0	1	2
$y$							

答：

$x$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1
$y$	6	1	-2	-3	-2	1	6



**教材內容說明：**

1. 本教材第 6 頁的教學重點是幫助學生認識二次函數的函數值改變的情況。
2. 第(8)題給定一二次函數，要求學生觀察指定區間內 $x$ 的值由小到大時，函數值 $y$ 改變的方式。  
子題①給定表格，要求學生完成表格。  
子題②要求學生判斷函數值 $y$ 的改變情況。
3. 隨堂練習給定給定一二次函數，幫助學生看到 $x$ 值改變，函數值 $y$ 改變的方式。



基本學習內容：FC-9-1-1 二次函數。



小試身手

1. 判斷下列各式中，那些  $y$  是  $x$  的二次函數？

①  $y = 2x^2$

②  $y = x - 4$

③  $y = -0.5(x - 3)^2 + 1$

④  $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3$

答：①、③、④

2. 二次函數  $y = x^2 - 3x + 6$ ，在  $x = -2$  時，其函數值是多少？

答：16

3. 若二次函數  $y = (x - 2)^2 + 1$ ，試完成下列表格。

$x$	-1	0	1	2	3	4	5
$y$							

答：

$x$	-1	0	1	2	3	4	5
$y$	10	5	2	1	2	5	10



**教材內容說明：**

1. 本頁小試身手針對本基本學習內容做綜合練習。
2. 第(1)題給定選項做判斷二次函數的練習。
3. 第(2)題給定一二次函數做求出函數值的練習。
4. 第(3)題給定一二次函數及表格做求出函數值二元一次式的練習。



教育部國民及學前教育署 編

國民中學 **9** 年級數學  
學生學習扶助教材

