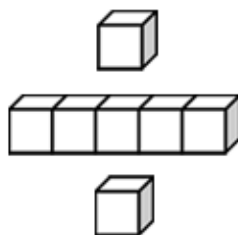




基本學習內容：SC-9-1-1

多邊形相似的意義

【教師用】





基本學習內容：SC-9-1-1

學習內容：

S-9-1 相似形：平面圖形縮放的意義；多邊形相似的意義；對應角相等；對應邊長成比例。

基本學習內容：

SC-9-1-1 多邊形相似的意義。

基本學習表現：

SCP-9-1-1-1 認識相似多邊形。

SCP-9-1-1-2 認識兩多邊形相似時，對應邊成比例，對應角相等。

SCP-9-1-1-3 認識兩多邊形對應邊成比例，對應角相等時，此兩多邊形相似。



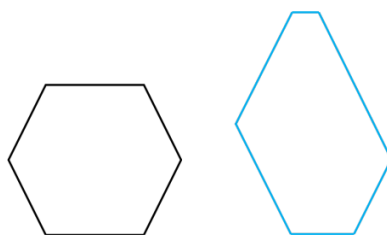
概要說明：

- 基本學習內容 SC-9-1-1 是 SC-6-1-1 的後續學習概念，故學生應已認識放大圖與縮小圖的意義。本基本學習內容 SC-9-1-1 幫助學生理解多邊形相似的意義。
- 學生在八年級時，已經能使用「對應頂點」、「對應邊」及「對應角」描述兩全等圖形對應的關係。教師可藉此概念，幫助學生使用「對應頂點」、「對應邊」及「對應角」描述兩相似圖形對應的關係。
- 透過圖形的放大與縮小，理解縮放前後的對應邊長成比例，對應角相等。
- 幫助學生認識多邊形甲與多邊形乙相似，多邊形乙與多邊形丙相似，則多邊形甲與多邊形丙亦相似。
- 兩個邊數相同的多邊形，若對應角都相等且對應邊長都成比例時，則這兩個多邊形會相似。在辨別多邊形相似時，應讓學生認識除了對應角相等，且對應邊長都要成比例時，這兩個多邊形才會相似。

例 1：兩個菱形的對應邊長都相等，但對應角不一定相等，則兩菱形不相似。

例 2：下圖中，兩個六邊形的每個內角都是 120 度，但其對應邊長沒有成比例，

因此這兩六邊形不相似。



- 任意兩個正 n 邊形，因為對應角皆相等，且對應邊長皆成比例，故這兩正 n 邊形會相似。

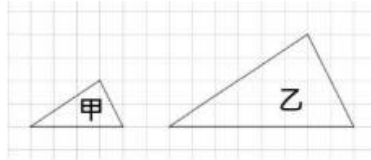


基本學習內容:SC-9-1-1 多邊形相似的意義。

◎相似圖形的意義

圖形經由放大或縮小後，雖然大小和原圖形不同，但其形狀是相同的。

下圖為甲、乙兩個三角形，



觀察圖形，我們可以發現這兩個三角形的形狀相同，但大小不同。

(1) 乙圖的對應邊長是甲圖的對應邊長的2倍，且對應角相等，

稱乙圖是甲圖的2倍放大圖。

(2) 甲圖的對應邊長是乙圖的對應邊長的 $\frac{1}{2}$ 倍，且對應角相等，

稱甲圖是乙圖的 $\frac{1}{2}$ 倍縮小圖。

我們稱甲圖和乙圖為相似圖形。



教材內容說明：

1. 本教材第 1~4 頁的教學重點是幫助學生建立相似圖形的意義。

本頁教學重點為利用放大圖或縮小圖幫助學生學習相似圖形的概念。

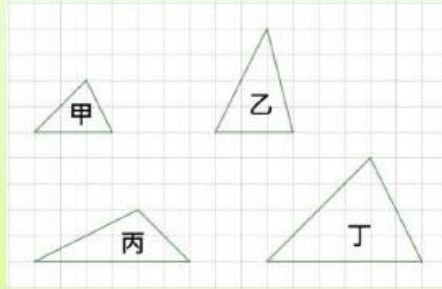
- 建議教師可以先用三角形或四邊形幫助學生複習放大或縮小的概念，學生可以檢查對應的角度是否相等及對應的邊長是否都有倍數關係，較不建議使用圖卡(照片)來說明。
- 建議教師提醒學生圖形經由放大或縮小後，角度不會改變，邊長會變成原來邊長的 k 倍。
- 如果一個圖形可以放大或縮小成另一個圖形，則這兩個圖行為相似圖形。



基本學習內容:SC-9-1-1 多邊形相似的意義。

(1) 如圖，有甲、乙、丙、丁 4 個三角形，請利用附件一，剪下甲三角形，檢查其它三角形，並回答問題：

- ①在乙、丙、丁 3 個三角形中，何者是甲三角形的 2 倍放大圖？
- ②在乙、丙、丁 3 個三角形中，何者和甲三角形為相似圖形？



解：

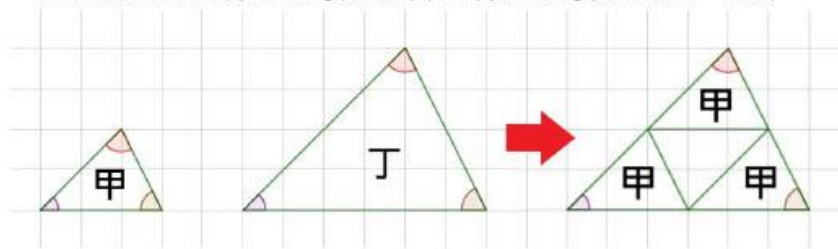
①甲三角形的底邊長為 3，它的 2 倍放大圖的對應邊長為 6；

甲三角形邊長為 $2\sqrt{2}$ 的邊，它的 2 倍放大圖的對應邊長為 $4\sqrt{2}$ ；

甲三角形邊長為 $\sqrt{5}$ 的邊，它的 2 倍放大圖的對應邊長為 $2\sqrt{5}$ 。

符合這些條件的只有丁三角形，也就是丁三角形的邊長都是甲三角形的邊長的 2 倍。

剪下甲三角形，比比看，發現丁三角形的 3 個角與甲三角形的 3 個角都相等，也可以發現丁三角形的邊長都是甲三角形的邊長的 2 倍，如圖。



所以，丁三角形是甲三角形的 2 倍放大圖。

- ②因為丁三角形是甲三角形的 2 倍放大圖，所以，丁三角形和甲三角形為相似圖形。

答：①丁 ②丁



教材內容說明：

1. 本教材第 1~4 頁的教學重點是幫助學生建立相似圖形的意義。

本頁教學重點為幫助學生判斷相似圖形。

2. 第(1)題給定 4 個三角形，要求學生回答 2 個子問題：

子問題①：給定甲三角形，要求學生找出甲三角形的 2 倍放大圖。

子問題②：給定甲三角形，要求學生找出甲三角形的相似圖形。

子問題①的解題方法：

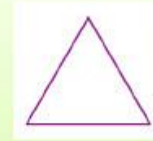
計算甲三角形的三邊長，並算出 2 倍放大圖所對應的長度，找出符合條件的圖形，再利用附件檢查該圖形的角是否和甲三角形對應的角相等，也可以發現丁三角形的邊長都是甲三角形的邊長的 2 倍，所以丁三角形是甲三角形的 2 倍放大圖。

子問題②的解題方法：

由丁三角形是甲三角形的縮放圖形，得知丁三角形和甲三角形為相似圖形。

基本學習內容:SC-9-1-1 多邊形相似的意義。

- (2) 右圖是邊長為 2 的正三角形，
 將它放大為 4 倍後得到一個新圖形，
 請問：①新圖形的邊長是多少？
 ②新圖形的每一個內角度數是多少？
 ③新圖形是正三角形嗎？

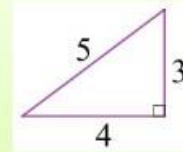


解：

- ①將圖形放大為 4 倍後，它的邊長會變為原來的邊長的 4 倍，
 又正三角形的三邊等長，新圖形的三邊長都是 $2 \times 4 = 8$ 。
 ②將圖形放大後，它的內角度數不變，
 又正三角形的每一個內角為 60° ，新圖形的每一個內角也都是 60° 。
 ③因為新圖形三邊等長，所以新圖形是正三角形。

答：①8，② 60° ，③是

- (3) 右圖是邊長為 3、4、5 的直角三角形，
 將它縮小為 0.6 倍後得到一個新圖形，
 請問：①新圖形的邊長分別是多少？
 ②新圖形的內角度數會改變嗎？
 ③新圖形是直角三角形嗎？



解：

- ①將圖形縮小為 0.6 倍後，它的邊長會變為原來的邊長的 0.6 倍，
 新圖形的邊長分別為 $3 \times 0.6 = 1.8$ 、 $4 \times 0.6 = 2.4$ 、 $5 \times 0.6 = 3$ 。
 ②將圖形縮小後，它的內角度數不變。
 ③原圖形有一個角是直角，因為對應角相等，
 此直角的對應角也是直角，所以新圖形也是直角三角形。

答：①1.8、2.4、3，②不會改變，③是



教材內容說明：

1. 本教材第 1~4 頁的教學重點是幫助學生建立相似圖形的意義。

本頁教學重點為幫助學生學習放大或縮小後的圖形相關概念。

2. 第(2)題給定正三角形邊長及放大倍率，要求學生回答 3 個子問題：

子問題①：要求學生算出新圖形的邊長。

子問題②：要求學生算出新圖形的角度。

子問題③：要求學生判斷新圖行為何。

子問題①的解題方法：圖形放大為 4 倍，邊長都會變成原來的 4 倍。

子問題②的解題方法：圖形放大，角度不變，正三角形的每一個內角為 60° ，所以新圖形的每一個內角也是 60° 。

子問題③的解題方法：由新圖形邊長的三邊等長得到新圖形也是正三角形。

3. 第(2)題給定直角三角形邊長及縮小倍率，要求學生回答 3 個子問題：

子問題①：要求學生算出新圖形的邊長。

子問題②：要求學生算出新圖形的角度。

子問題③：要求學生判斷新圖行為何。

子問題①的解題方法：圖形縮小為 0.6 倍，邊長都會變成原來的 0.6 倍。

子問題②的解題方法：圖形放大，角度不變。

子問題③的解題方法：由原圖形有一個角是直角對應到的新圖形的角也是直角，得到新圖形也是直角三角形。

基本學習內容:SC-9-1-1 多邊形相似的意義。

如圖，在紙上畫一個三角形，拿去影印放大為 2 倍後，印出來的圖形是三角形，新三角形與原三角形是相似圖形，我們知道新三角形的邊長都是原三角形的邊長的 2 倍，即對應邊成比例，且這兩個三角形的對應角角度不會改變，即對應角相等。



設 $k > 0$ ，當一個圖形縮放為原來的 k 倍時，新圖形的邊長都是原圖形的邊長的 k 倍，代表原圖形與新圖形的對應邊長比為 $1:k$ ，即對應邊成比例。原圖形與新圖形的對應角不會改變，即對應角相等。我們稱新圖形與原圖形為相似圖形。

若兩個圖形為相似圖形，則這兩個圖形的對應邊成比例、對應角相等。

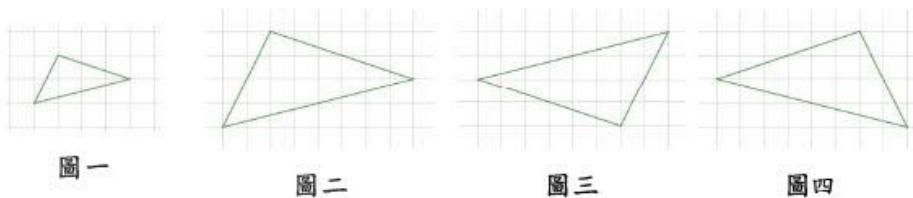


在兩個全等三角形中，可以將其中一個三角形經由旋轉或翻轉後，與另一個三角形完全疊合。同樣地，兩個相似三角形，若將其中一個三角形經由旋轉或翻轉後，這兩個三角形還是相似三角形。

例如：將圖一放大為 2 倍得到圖二，得圖一和圖二為相似圖形；

將圖二旋轉 180° 得到圖三，因圖二和圖三全等，得圖一和圖三也會相似；

將圖二左右翻轉得到圖四，因圖二和圖四全等，得圖一和圖四也會相似。





教材內容說明：

1. 本教材第 1~4 頁的教學重點是幫助學生建立相似圖形的意義。

本頁教學重點為幫助學生學習相似圖形的意義。

2. 本頁上半部利用影印將三角形放大為 2 倍說明相似圖形的對應邊成比例和對應角相等，並說明圖形縮放為原來的 k 倍($k > 0$)代表原圖形與新圖形的對應邊長比為 $1 : k$ 。

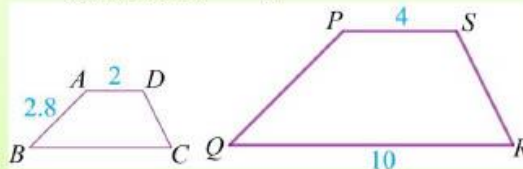
3. 本頁教師提示重點為相似圖形的性質。

4. 本頁下半部說明兩個相似三角形經由旋轉或翻轉後，兩個三角形還是相似三角形。



基本學習內容:SC-9-1-1 多邊形相似的意義。

- (4) 如圖，四邊形 $ABCD$ 和四邊形 $PQRS$ 相似，
其中 $A、B、C、D$ 分別對應到 $P、Q、R、S$ ，



已知 $\overline{AB} = 2.8$ ， $\overline{AD} = 2$ ， $\overline{PS} = 4$ ， $\overline{QR} = 10$ ，
請問 \overline{BC} 和 \overline{PQ} 的長度分別是多少？

解：四邊形 $ABCD$ 和四邊形 $PQRS$ 相似，

這兩個四邊形的對應邊成比例、對應角相等。

\overline{AD} 的對應邊是 \overline{PS} ，且 $\overline{AD} : \overline{PS} = 2 : 4 = 1 : 2$

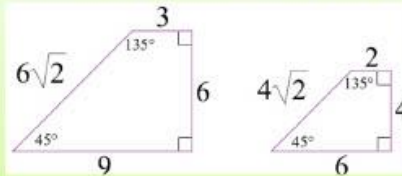
得四邊形 $ABCD$ 和四邊形 $PQRS$ 的邊長比為 $1 : 2$

\overline{BC} 的對應邊是 \overline{QR} ，得 $\overline{BC} : \overline{QR} = \overline{BC} : 10 = 1 : 2$ ， $\overline{BC} = 5$

\overline{PQ} 的對應邊是 \overline{AB} ，得 $\overline{AB} : \overline{PQ} = 2.8 : \overline{PQ} = 1 : 2$ ， $\overline{PQ} = 5.6$

答： $\overline{BC} = 5$ ， $\overline{PQ} = 5.6$

- (5) 根據圖中的邊長和角度，判斷這兩個四邊形是否相似？



解：大四邊形的邊長：小四邊形的邊長 = $3 : 2$ ，即對應邊成比例，

且大四邊形和小四邊形的對應角相等，

所以這兩個四邊形相似。

答：相似



教材內容說明：

1. 本教材第 5 頁的教學重點是幫助學生學習相似圖形的應用。
2. 第(4)題給定 2 個相似四邊形邊長，要求學生回答 2 個邊長的長度。

解題方法：

利用相似三角形對應邊成比例，先找出 2 個已知邊長的對應邊，算出 2 個四邊形的對應邊長比，再列出比例式，計算題目要求的邊長長度。

3. 第(5)題給定 2 個四邊形的邊長和角度，要求學生判斷這兩個四邊形是否相似。

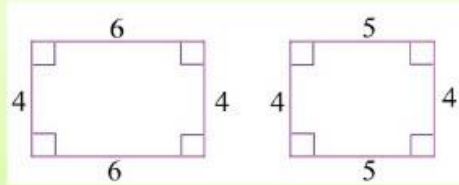
解題方法：

計算每一組對應邊的比是否都相等及檢查每一組對應角是否都相等。如果對應邊成比例，對應角相等，則兩個四邊形為相似圖形。



基本學習內容:SC-9-1-1 多邊形相似的意義。

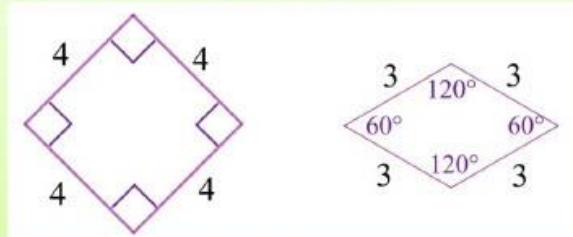
(6) 下圖為兩個長方形，它們的內角都是直角，也就是對應角都相等，請問這兩個長方形會相似嗎？



解：這兩個長方形的長邊比為 $6:5$ ，短邊比為 $4:4=1:1$ ，
這兩個比不相等，代表這兩個長方形的對應邊不成比例，
所以這兩個長方形不相似。

答：不相似

(7) 下圖為兩個菱形，一個菱形的邊長都是 4，另一個菱形的邊長都是 3，也就是對應邊成比例，請問這兩個菱形會相似嗎？



解：這兩個菱形的 4 個角度無法對應相等，
所以這兩個菱形不相似。

答：不相似



教材內容說明：

1. 本教材第 6 頁的教學重點是幫助學生學習判斷相似圖形。
2. 第(6)題給定 2 個長方形及邊長，要求學生判斷這兩個長方形是否相似。

解題方法：

因為長方形的內角都是直角，可得這兩個長方形的對應角相等。接著檢查這兩個長方形的對應邊是否成比例，寫出兩個長方形的長邊比和短邊比，因為長邊比和短邊比不相等，所以這兩個長方形不相似。

3. 第(7)題給定 2 個菱形及角度，要求學生判斷這兩個菱形是否相似。

解題方法：

因為這兩個菱形的內角無法對應相等，所以這兩個菱形不相似。



基本學習內容:SC-9-1-1 多邊形相似的意義。

(8) 已知甲圖和乙圖相似，乙圖和丙圖相似，請問甲圖和丙圖是否相似？

解：甲圖和乙圖相似，代表甲圖的對應角等於乙圖的對應角；

丙圖和乙圖也相似，代表丙圖的對應角也等於乙圖的對應角；

所以，甲圖的對應角等於丙圖的對應角。

設甲圖是乙圖的 a 倍縮放圖，所以

$$\text{甲圖對應邊長} : \text{乙圖對應邊長} = a : 1,$$

設丙圖是乙圖的 b 倍縮放圖，所以

$$\text{丙圖對應邊長} : \text{乙圖對應邊長} = b : 1$$

也就是

$$\text{乙圖對應邊長} : \text{丙圖對應邊長} = 1 : b$$

得到

$$\text{甲圖對應邊長} : \text{乙圖對應邊長} : \text{丙圖對應邊長} = a : 1 : b$$

所以

$$\text{甲圖對應邊長} : \text{丙圖對應邊長} = a : b$$

即甲圖和丙圖的對應邊成比例。

所以，甲圖和丙圖為相似圖形。

答：是



教材內容說明：

1. 本教材第 7~8 頁的教學重點是幫助學生學習判斷圖形是否相似。

本頁教學重點為幫助學生學習相似圖形的遞移性。

2. 第(8)題給定 2 個長方形及邊長，要求學生判斷這兩個長方形是否相似。

解題方法：

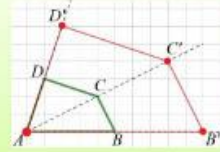
由甲圖和乙圖相似及乙圖和丙圖相似，推論甲圖和丙圖的對應角相等。接著，設甲圖是乙圖的 a 倍縮放圖，丙圖是乙圖的 b 倍縮放圖，得到甲圖對應邊長：乙圖對應邊長：丙圖對應邊長 = $a : 1 : b$ ，所以，甲圖對應邊長：丙圖對應邊長 = $a : b$ ，即甲圖和丙圖的對應邊成比例，所以甲圖和丙圖為相似圖形。

- 如果學生無法理解，建議教師可以舉實例說明，讓學生利用相似圖形的構成要素，檢查甲圖和丙圖是否對應邊成比例及對應角相等，來判斷兩個圖形的相似。



基本學習內容:SC-9-1-1 多邊形相似的意義。

(9) 如圖，在四邊形 $ABCD$ 中，以 A 點為縮放中心，每個方向的長度都放大為 2 倍，得到四邊形 $AB'C'D'$ 。請問四邊形 $ABCD$ 和四邊形 $AB'C'D'$ 是否相似？



解：以 A 點為縮放中心，每個方向的長度都放大為 2 倍。

- ① 沿著 \overline{AB} 方向放大為 2 倍，得 $\overline{AB'} = 2\overline{AB}$ ，
 - ② 沿著 \overline{AD} 方向放大為 2 倍，得 $\overline{AD'} = 2\overline{AD}$ ，
 - ③ 連 \overline{AC} ，沿著 \overline{AC} 方向放大為 2 倍，得 $\overline{AC'} = 2\overline{AC}$ ，
- 在 $\triangle ACD'$ 中，因為

$$\begin{aligned} \overline{AD} : \overline{AD'} &= 1 : 2 \\ \overline{AC} : \overline{AC'} &= 1 : 2 \end{aligned}$$

所以， $\overline{AD} : \overline{AD'} = \overline{AC} : \overline{AC'}$ ，
得 $\overline{CD} \parallel \overline{C'D'}$ ，且 $\overline{CD} : \overline{C'D'} = 1 : 2$ 。

同理，在 $\triangle AB'C'$ 中，因為 $\overline{AB} : \overline{AB'} = \overline{AC} : \overline{AC'}$ ，
得 $\overline{BC} \parallel \overline{B'C'}$ ，且 $\overline{BC} : \overline{B'C'} = 1 : 2$ 。

故 $\overline{AB} : \overline{AB'} = \overline{BC} : \overline{B'C'} = \overline{CD} : \overline{C'D'} = \overline{AD} : \overline{AD'}$ ，
即四邊形 $ABCD$ 和四邊形 $AB'C'D'$ 的對應邊成比例。

在 $\triangle ACD'$ 中，因為 $\overline{CD} \parallel \overline{C'D'}$ ，

$$\text{所以 } \angle ADC = \angle AD'C'、\angle 1 = \angle 2 (\text{同位角相等})。$$

在 $\triangle AB'C'$ 中，因為 $\overline{BC} \parallel \overline{B'C'}$ ，

$$\text{所以 } \angle ABC = \angle AB'C'、\angle 3 = \angle 4 (\text{同位角相等})。$$

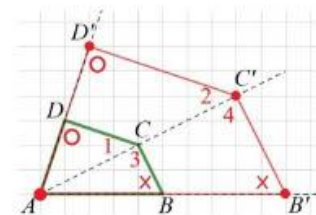
又 $\angle 1 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 4$ ，得 $\angle C = \angle C'$ ，

故 $\angle A = \angle A'$ ， $\angle B = \angle B'$ ， $\angle C = \angle C'$ ， $\angle D = \angle D'$ ，

即四邊形 $ABCD$ 和四邊形 $AB'C'D'$ 的對應角相等。

因為四邊形 $ABCD$ 和四邊形 $AB'C'D'$ 的對應邊成比例、對應角相等，

所以四邊形 $ABCD$ 和四邊形 $AB'C'D'$ 相似。



答：相似



教材內容說明：

1. 本教材第 7~8 頁的教學重點是幫助學生學習判斷圖形是否相似。

本頁教學重點為幫助學生學習判斷兩圖形是否相似。

2. 第(9)題給定四邊形及以四邊形其中一頂點為縮放中心的放大圖，要求學生判斷兩圖形是否相似。

解題方法：

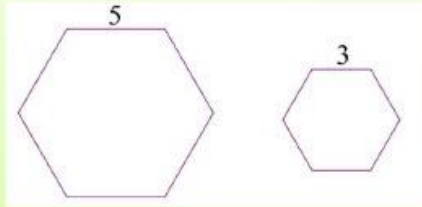
先說明放大圖形是以 A 點為縮放中心， A 點與其他頂點的連線方向都放大為 2 倍，分別得到 $\overline{AB'} = 2\overline{AB}$ 、 $\overline{AD'} = 2\overline{AD}$ 及 $\overline{AC'} = 2\overline{AC}$ 。

接著，將四邊形分割成 2 個三角形來說明線段長的比例，得到四邊形 $ABCD$ 和四邊形 $AB'C'D'$ 的對應邊成比例，也可以得到線段的平行關係 $\overline{CD} \parallel \overline{C'D'}$ 及 $\overline{BC} \parallel \overline{B'C'}$ ；再利用線段的平行得到同位角相等，來說明四邊形 $ABCD$ 和四邊形 $AB'C'D'$ 的對應角相等。

最後，得到兩個四邊形的對應邊成比例、對應角相等，所以四邊形 $ABCD$ 和四邊形 $AB'C'D'$ 相似。

基本學習內容：SC-9-1-1 多邊形相似的意義。

- (10) ①下圖為 2 個正六邊形，一個正六邊形的邊長是 5，另一個正六邊形的邊長是 3，請問這兩個正六邊形是否相似？



- ②任意兩個正六邊形是否相似？

解：正六邊形的每一個邊都等長，每一個內角都是 $\frac{(6-2) \times 180^\circ}{6} = 120^\circ$ 。

①大正六邊形的邊長：小正六邊形的邊長 = 5 : 3，即對應邊成比例，大正六邊形和小正六邊形的每一個內角都是 120° ，即對應角相等，所以，這兩個正六邊形相似。

②設兩個正六邊形的邊長分別為 a 、 b ，

兩個正六邊形的邊長比為 $a : b$ ，即對應邊成比例，

兩個正六邊形的內角都是 120° ，即對應角相等，

所以，任意兩個正六邊形相似。

答：①是，②是。

任意兩個正 n 邊形，因為對應角皆相等，且對應邊長皆成比例，故這兩正 n 邊形會相似。





教材內容說明：

1. 本教材第 9 頁的教學重點是幫助學生學習兩個正 n 邊形為相似圖形。

2. 第(10)題為判斷兩個正 n 邊形是否為相似圖形，要求學生回答 2 個子問題。

子問題①：給定 2 個正六邊形及其邊長，要求學生判斷這兩個正六邊形是否相似。

子問題②：給定任意 2 個正六邊形，要求學生判斷這兩個正六邊形是否相似。

子問題①的解題方法：

檢查兩個正六邊形的邊長比是否都相等，邊長比都是 5:3，即對應邊成比例，再說明正六邊形的每個內角是否都相等，它們的內角都是 120° ，即對應角相等，所以，這兩個正六邊形相似。

子問題②的解題方法：

檢查兩個正六邊形的邊長比是否都相等，假設兩個正六邊形的邊長分別為 a 、 b ，邊長比都是 $a:b$ ，即對應邊成比例，再說明正六邊形的每個內角是否都相等，它們的內角都是 120° ，即對應角相等，所以，這兩個正六邊形相似。

3. 本頁教師提示重點為任意兩個正 n 邊形為相似圖形。

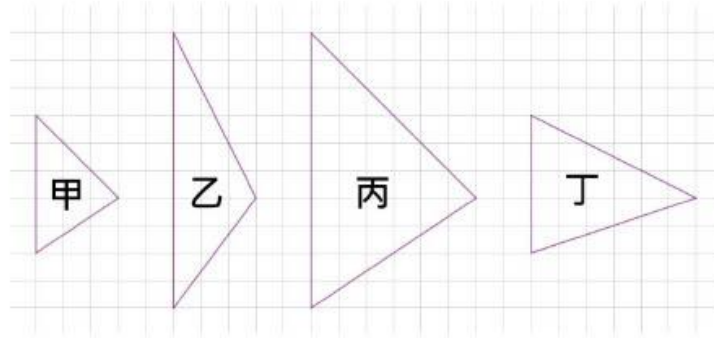


基本學習內容:SC-9-1-1 多邊形相似的意義。



小試身手

1. 如圖，有甲、乙、丙、丁 4 個三角形，哪一個圖形和甲圖形為相似圖形？



答：丙。

2. 已知四邊形 $ABCD$ 和四邊形 $EFGH$ 相似，
 其中 $A、B、C、D$ 分別是 $E、F、G、H$ 的對應點，
 如果 $\overline{BC} = 4$ ， $\overline{CD} = 6$ ， $\overline{EF} = 6$ ， $\overline{FG} = 12$ ，
 請問： $\overline{AB} = ?$ $\overline{GH} = ?$

答： $\overline{AB} = 2$ ， $\overline{GH} = 18$ 。

3. (1) 請問兩個內角都是 108° 的五邊形是否相似？
 (2) 請問兩個邊長都是 6 的六邊形是否相似？
 (3) 請問兩個正八邊形是否相似？

答：(1) 否，(2) 否，(3) 是。



教材內容說明：

1. 本教材第 10 頁的教學重點是小試身手。

第 1 題評量學生判斷相似圖形的能力。

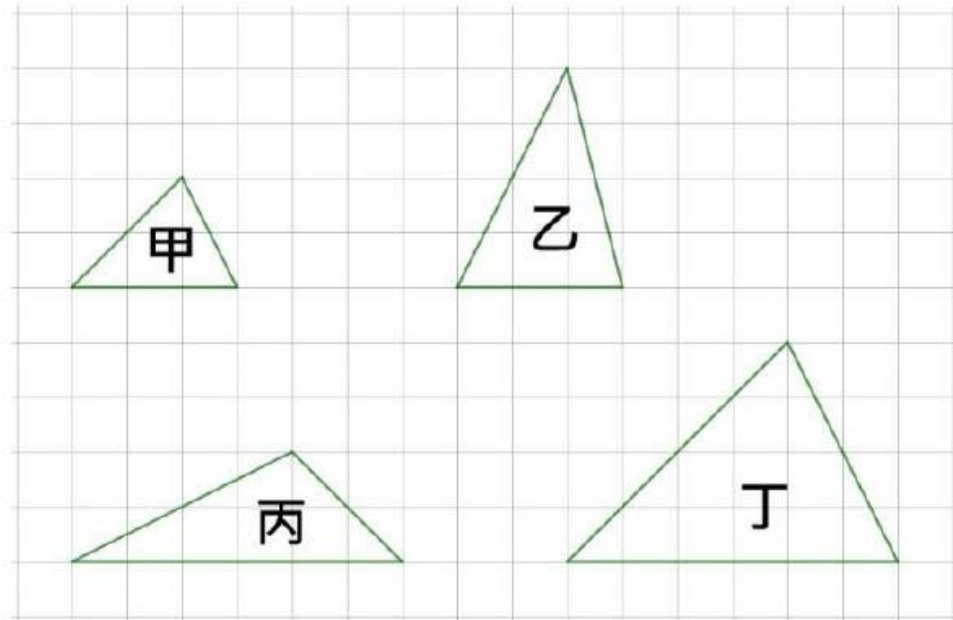
第 2 題評量學生利用相似圖形解題的能力。

第 3 題評量學生是判斷兩個多邊形是否為相似圖形的能力。



基本學習內容:SC-9-1-1 多邊形相似的意義。

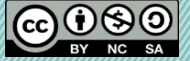
附件一





教材內容說明：

1. 本教材第 11 頁為附件一，配合第 2 頁第(1)題。



教育部國民及學前教育署 編

國民中學 **9** 年級數學
學生學習扶助教材

