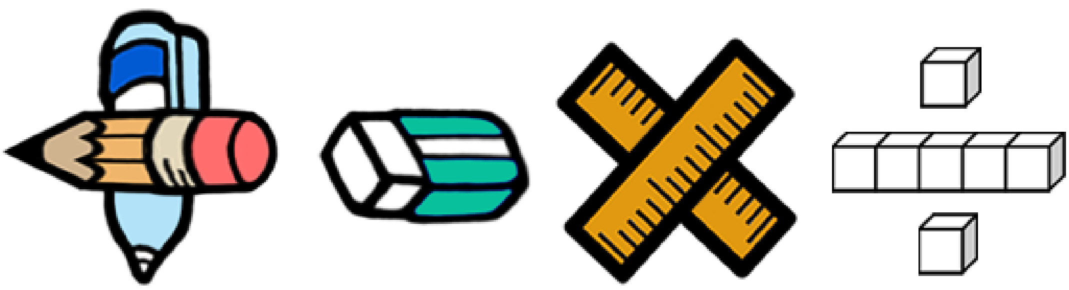
基本學習內容：SC-9-6-3

切線段等長

【教師用】



教育部國民及學前教育署 編

中華民國 113 年 8 月

學習內容：

S-9-6 圓的幾何性質：圓心角、圓周角與所對應弧的度數三者之間的關係；圓內接四邊形對角互補；切線段等長。

基本學習內容：

SC-9-6-3 切線段等長。

基本學習表現：

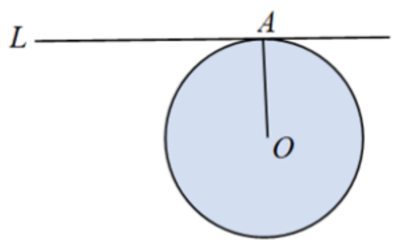
SCP-9-6-3-1 認識切線的意義。

SCP-9-6-3-2 認識圓外一點作圓的兩條切線段等長。

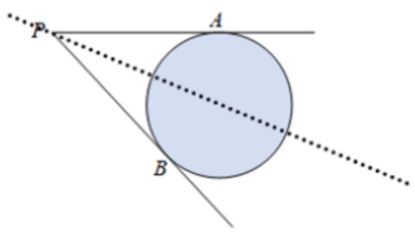
概要說明：

■ 本基本學習內容SC-9-6-3為SC-8-1-2角平分線與SC-8-4-1全等圖形的後續學習概念。本基本學習內容幫助學生認識從圓外一點作圓的兩條切線，此兩切線等長的性質

■ 當直線 L 與圓 O 恰交於一點時，如下圖所示，我們稱直線 L 與圓 O 相切，直線 L 為圓 O 的切線，交點 A 為切點。



■ 學生在國小階段已學過圓為對稱圖形，任意通過圓心的直線皆為圓的對稱軸。教學時可將圓外一點 P 與圓心 O 的連線段對摺 (如下圖)，觀察到兩切線段即為對稱線段，故兩切線段等長。



◎切線的意義

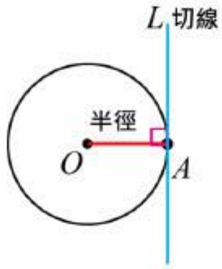
「切線性質」

若直線 L 與圓 O 只交於一點 A ，

則 L 稱為圓 O 的**切線**，A 點稱為**切點**。

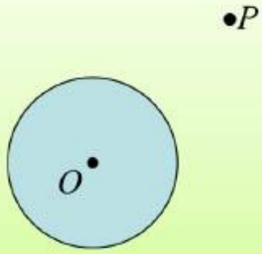
此時，(1) 圓 O 到 L 的距離**等於圓的半徑長**。

(2) $L \perp \overline{OA}$



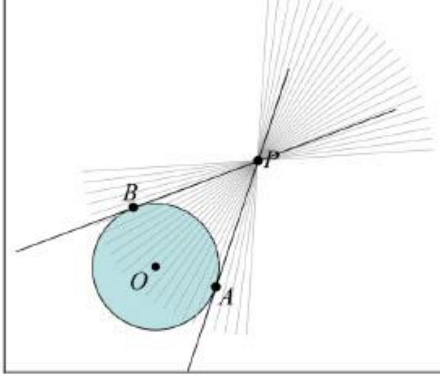
◎切線段性質

(1) 說說看，P 為圓 O 外一點，
過 P 點的直線中，有幾條是圓 O 的切線？

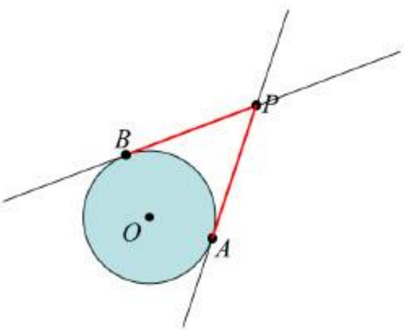


解：

畫出過 P 點且與圓相交的線，如右圖發現和圓 O 相切的線只有兩條，



且 A、B 為切點，有 $\overleftrightarrow{PA}$ 與 $\overleftrightarrow{PB}$ 兩條切線。



答：有 $\overleftrightarrow{PA}$ 與 $\overleftrightarrow{PB}$ 兩條切線

1

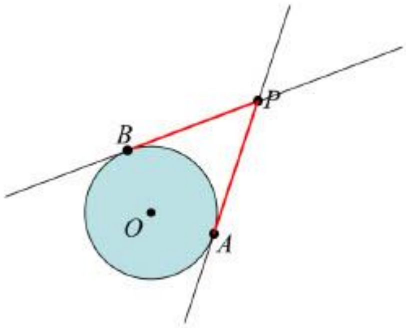
教材內容說明：

1. 本教材第 1~5 頁的教學重點是幫助學生認識切線段有兩條，而且兩條切線段等長。

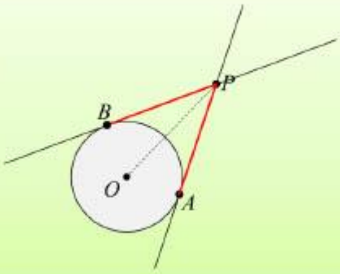
2. 本頁上方複習切線的意義。

3. 第(1)題給定一個圓 O 與圓 O 外一點 P，討論圓 O 外任何一點和圓相切的直線僅有兩條。

P 為圓 O 外一點，$\overleftrightarrow{PA}$ 與 $\overleftrightarrow{PB}$ 都是過 P 點與圓 O 相切的切線，A、B 是切點，$\overline{PA}$和$\overline{PB}$ 都稱為 P 點對圓 O 的**切線段**。



(2) 如圖，直線 PA、PB 為圓 O 的切線，A、B 為切點，若圓 O 半徑為 5、$\overline{OP}=13$，求兩條切線段 $\overline{PA}$ 和 $\overline{PB}$ 的長？



解：

P 為圓 O 外一點，$\overleftrightarrow{PA}$ 與 $\overleftrightarrow{PB}$ 為圓 O 的兩條切線，A、B 為切點。

連接$\overline{OA}$、$\overline{OB}$ 和$\overline{OP}$，$\overline{AP}\perp\overline{OA}$，$\overline{BP}\perp\overline{OB}$，

$\overline{OA}=\overline{OB}=$ 半徑

在直角△OAP 中，

$\overline{PA}=\sqrt{\overline{OP}^2-\overline{OA}^2}=\sqrt{13^2-5^2}=\sqrt{144}=12$

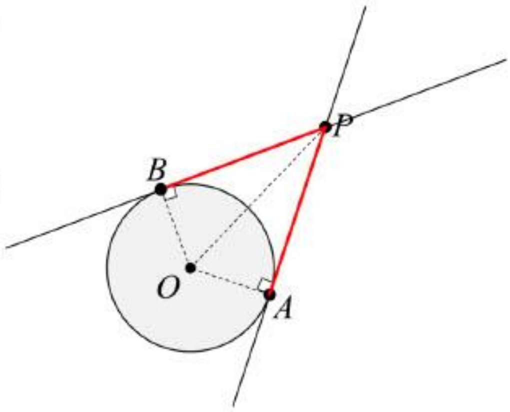
在直角△OBP 中，

$\overline{PB}=\sqrt{\overline{OP}^2-\overline{OB}^2}$

$=\sqrt{13^2-5^2}$

$=\sqrt{144}$

$=12$



答：$\overline{PA}=\overline{PB}=12$

教材內容說明：

1. 本教材第 1~5 頁的教學重點是幫助學生認識切線段有兩條，而且兩條切線段等長。
2. 本頁上方教師提示重點在說明 P 為圓 O 外一點，$\overleftrightarrow{PA}$ 與 $\overleftrightarrow{PB}$ 都是過 P 點與圓 O 相切的切線， A、B 是切點，$\overline{PA}$和$\overline{PB}$ 都稱為 P 點對圓 O 的**切線段**。
3. 第(2)題給定直線 PA、PB 為圓 O 的切線，A、B 為切點，圓 O 的半徑為 5，$\overline{OP}$ =13，求出切線段$\overline{PA}$ 、$\overline{PB}$的長度，幫助學生理解兩切線段等長。

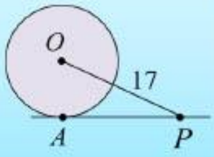
   本教材提供解法如下

   - 利用切線性質，發現△OAP 與△OBP 為直角三角形，並利用畢氏定理，分別求出$\overline{PA}$ 、$\overline{PB}$的長度，進而發現$\overline{PA}=\overline{PB}$ 。

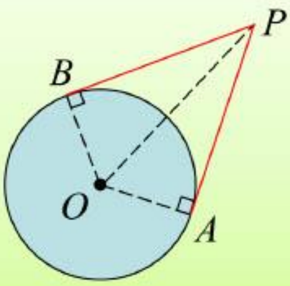
基本學習內容：SC-9-6-3 切線段等長。

隨堂練習

如圖，直線 PA 為圓 O 的切線，A 為切點，
若圓 O 半徑為 8、$\overline{OP}=17$，求 $\overline{PA}=$？ 答: 15



(3) 如圖，直線 PA、PB 為圓 O 的切線，
A、B 為切點，若圓 O 半徑為 r，
請問兩條切線段 $\overline{PA}$ 和 $\overline{PB}$ 等長嗎？

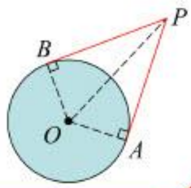


解：

如圖 ，P 為圓 O 外一點，$\overleftrightarrow{PA}$ 與 $\overleftrightarrow{PB}$ 為圓 O 的兩條切線，A、B 為切點。
連接$\overline{OA}$、$\overline{OB}$ 和$\overline{OP}$，$\overline{AP}\perp\overline{OA}$，$\overline{BP}\perp\overline{OB}$，$\overline{OA}=\overline{OB}=$ r
在直角$\triangle OAP$ 中，
$\overline{PA}^2=\overline{PO}^2-\overline{OA}^2=\overline{PO}^2-r^2=\overline{PO}^2-\overline{OB}^2=\overline{PB}^2$
得 $\overline{PA}=\overline{PB}$。

答：$\overline{PA}$和$\overline{PB}$ 會等長

P 為圓 O 外一點，過 P 點與圓 O 相切的切線有兩條，
若 A、B 為切點，
則 P 點到圓 O 的兩條**切線段** $\overline{PA}$ 、$\overline{PB}$ 會等長。
即 $\overline{PA}=\overline{PB}$，
簡稱為「切線段等長」。



3

教材內容說明：

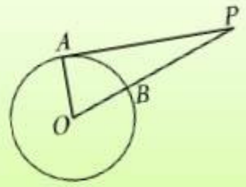
1. 本教材第 1~5 頁的教學重點是幫助學生認識切線段有兩條，而且兩條切線段等長。
2. 本頁隨堂練習答案為 15。
3. 第(3)題給定直線 PA、PB 為圓 O 的切線，A、B 為切點，若圓 O 半徑為 r，問兩條切線段 $\overline{PA}$ 和 $\overline{PB}$ 是否等長。

   本題解題方式為未知數解題，幫助學生發現兩條切線段等長。

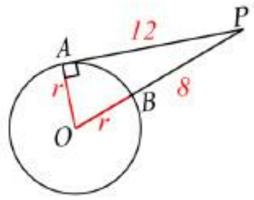
   本教材提供解法如下

   - 利用切線性質，發現$\triangle OAP$ 與$\triangle OBP$ 為直角三角形，並利用畢氏定理證明 $\overline{PA}=\overline{PB}$ 。
4. 本頁下方教師提示重點 P 為圓 O 外一點，過 P 點與圓 O 相切的切線有兩條，若 A、B 為切點，則 P 點到圓 O 的兩條**切線段** $\overline{PA}$ 、$\overline{PB}$ 會等長。即 $\overline{PA}$ = $\overline{PB}$，簡稱為「切線段等長」。

(4) 如圖，$\overline{AP}$為圓 O 的切線，A 為切點，$\overline{OP}$ 交圓 O 於 B 點，若 $\overline{AP}=12$，$\overline{BP}=8$，則圓 O 的半徑為何？



解：



$\because A$ 為切點， $\therefore \angle OAP=90^\circ$

設半徑$=r$，$\overline{PO}=\overline{BP}+r=8+r$

圓 O 的半徑 $r^2=\overline{PO}^2-\overline{PA}^2=(8+r)^2-12^2$

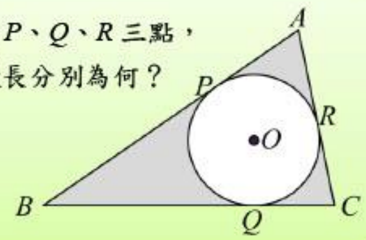
$r^2=64+16r+r^2-144$

$16r=80$

$r=5$

答: 5

(5) 如圖，$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{AC}$三邊分別與圓 O 相切於 P、Q、R 三點，$\overline{AP}=6$，$\overline{BQ}=10$，$\overline{CR}=5$，則△ABC 的三邊長分別為何？



解：

$\because$ $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{AC}$三邊分別與圓 O 相切於 P、Q、R 三點

$\therefore$ $\overline{AP}=\overline{AR}=6$，$\overline{BQ}=\overline{BP}=10$，$\overline{CR}=\overline{CQ}=5$

$\overline{AB}=\overline{AP}+\overline{BP}=6+10=16$、

$\overline{BC}=\overline{BQ}+\overline{CQ}=10+5=15$、

$\overline{AC}=\overline{AR}+\overline{CR}=5+6=11$

答： $\overline{AB}=16$ ，$\overline{BC}=15$、$\overline{AC}=11$

教材內容說明：

1. 本教材第 1~5 頁的教學重點是幫助學生認識切線段有兩條，而且兩條切線段等長。
2. 第(4)題給定 $\overleftrightarrow{AP}$ 為圓 O 的切線，A 為切點，$\overline{OP}$ 交圓 O 於 B 點，

   若 $\overline{AP}=12$，$\overline{BP}=8$，求圓 O 的半徑。

   引導學生利用切線性質解題。

   本教材提供解法如下

   因為 A 為切點，所以 $\angle OAP=90^\circ$，假設半徑與 $\overline{OP}$ 的值，再利用畢氏定理求出半徑。
3. 第(5)題給定，$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{AC}$三邊分別與圓 O 相切於 P、Q、R 三點，

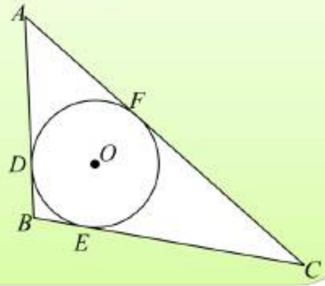
   $\overline{AP}=6$，$\overline{BQ}=10$，$\overline{CR}=5$，求△ABC 的三邊長。

   引導學生利用切線段等長解題。

   本教材提供解法如下

   利用切線段等長性質，可知$\overline{AP}=\overline{AR}$=6，$\overline{BQ}=\overline{BP}$=10，$\overline{CR}=\overline{CQ}$=5，再分別算出各段的長度。

(5) 如圖，$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{AC}$三邊分別與圓 O 相切於 D、E、F 三點，
$\overline{AB}=10$，$\overline{BC}=12$，$\overline{AC}=18$，則$\overline{AC}$ =？



解：

方法一

∵ $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{AC}$三邊分別與圓 O 相切於 D、E、F 三點，

∵圓外一點到此圓的兩切線段長相等，

∴可令 $\overline{AD}=\overline{AF}=a$，$\overline{BD}=\overline{BE}=b$，$\overline{CE}=\overline{CF}=c$

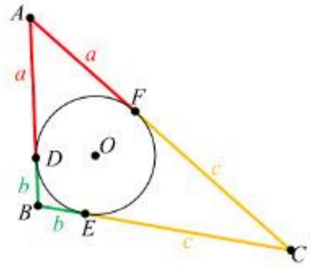
∵ $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AC}=10+12+18=40$

$(a+b)+(b+c)+(a+c)=40$

∴ $a+b+c=20$

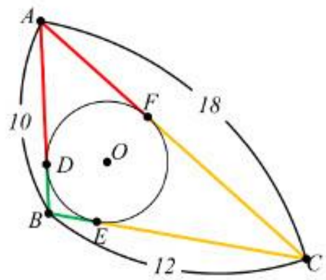
∵ $b+c=12$

∴ $a=8$



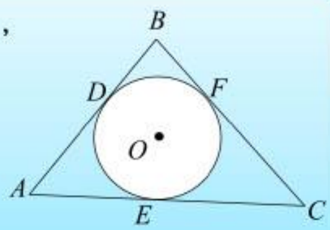
方法二:

$\overline{AD}=\frac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{AC}-\overline{BC})=\frac{1}{2}(10+18-12)=8$



隨堂練習

如圖，△ABC 三邊分別為圓 O 相切於 D、E、F 三點，
若$\overline{AB}=9$，$\overline{BC}=10$，$\overline{AC}=11$，求$\overline{BF}$ 。答: 4



5

教材內容說明：

1. 本教材第 1~5 頁的教學重點是幫助學生認識切線段有兩條，而且兩條切線段等長。
2. 第(5)題給定$\triangle ABC$，$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{AC}$三邊分別與圓 O 相切於 D、E、F 三點，$\overline{AB}=10$，$\overline{BC}=12$，$\overline{AC}=18$，求$\overline{AC}$ 的長度。

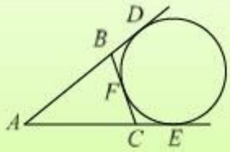
   引導學生利用切線段等長性質解題。

   本教材提供解法如下

   因為 D、E、F 為切點且兩切線段等長，假設$\overline{AD}=\overline{AF}=a$，

   $\overline{BD}=\overline{BE}=b$，$\overline{CE}=\overline{CF}=c$ ，求出其中一段的邊長。
3. 本頁隨堂練習答案：4。

(6) 如圖，$\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{AE}$、$\overline{BC}$ 分別與圓切於 D、E、F 三點，
若切線段 $\overline{AD}$、$\overline{AE}$ 皆為 12，則△ABC 的周長為？



解：

∵ $\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{AE}$、$\overline{BC}$ 分別與圓切於 D、E、F 三點

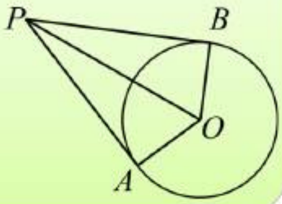
∴ $\overline{AD}=\overline{AE}$，$\overline{BD}=\overline{BF}$，$\overline{CE}=\overline{CF}$ ，

$\overline{BC}=\overline{BF}+\overline{CF}$

△ABC 的周長$=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AC}=\overline{AB}+\overline{BF}+\overline{CF}+\overline{AC}=\overline{AD}+\overline{AE}=2\times12=24$

答: 24

(7) P 是圓 O 外一點，$\overline{PA}$、$\overline{PB}$ 為過 P 點至圓 O 的兩條切線，
A 與 B 是切點，若 $\angle AOB=150°$，則 $\angle APB=$？



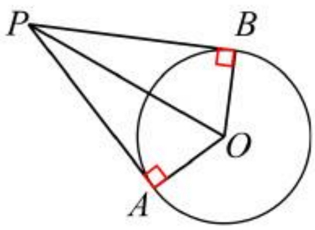
解：

∵ $\overline{PA}$、$\overline{PB}$ 為過 P 點至圓 O 的兩條切線

∴ $\overline{PA}\perp\overline{OA}$，$\overline{PB}\perp\overline{OB}$，$\angle PBO=90°$，$\angle PAO=90°$

四邊形 $OAPB$ 的內角和$=360°$

∵ $\angle AOB=150°$ ∴ $\angle APB=30°$



答: $\angle APB=30°$

教材內容說明：

1. 本教材第 6~7 頁的教學重點是幫助學生理解切線段有兩條，而且兩條切線段等長。
2. 第(6)題給定 $\overleftrightarrow{AD}$ 、$\overleftrightarrow{AE}$ 、$\overline{BC}$ 分別與圓切於 D、E、F 三點，若切線段 $\overline{AD}$ 、$\overline{AE}$ 皆為 12，求△ABC 的周長。

   引導學生利用切線段等長性質解題。

   本教材提供解法如下

   因為 D、E、F 為切點且兩切線段等長，利用 $\overline{BC}=\overline{BF}+\overline{CF}$ 求出周長。
3. 第(7)題給定 $\overline{PA}$ 、$\overline{PB}$ 為過 P 點至圓 O 的兩條切線，A 與 B 是切點，若 $\angle AOB＝150°$，求 $\angle APB$ 的度數。

   引導學生利用切線性質解題。

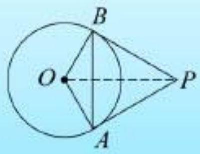
   本教材提供解法如下

   利用切線性質，得出 $\angle PBO=90°$、$\angle PAO＝90°$，並利用四邊形的內角和，求得 $\angle APB$ 的度數。

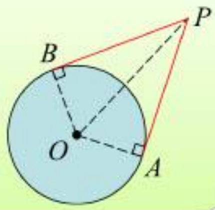
基本學習內容：SC-9-6-3 切線段等長。

隨堂練習

P 是圓 O 外一點，$\overline{PA}$、$\overline{PB}$ 為過 P 點至圓 O 的兩條切線，A 與 B 是切點，若 $\angle AOB=130°$，則 $\angle APB=$？ 答: 50°



(8) 如圖，直線 PA、PB 為圓 O 的切線，A、B 為切點，
請問四邊形 PBOA 是何種四邊形？



解：

因為 A、B 是圓上的點，所以$\overline{OA}=\overline{OB}$ 為圓 O 的半徑，

又 $\overline{PA}$、$\overline{PB}$ 都是 P 對圓 O 的切線段，所以$\overline{PA}=\overline{PB}$。

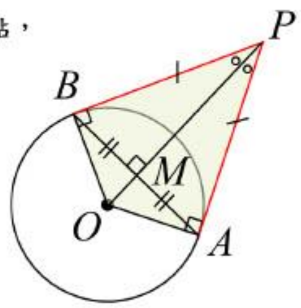
因$\overline{OA}=\overline{OB}$ 且 $\overline{PA}=\overline{PB}$，故 $PBOA$ 為箏形。

P 為圓 O 外一點，A、B 為圓 O 的切點，
則 $PBOA$ 為箏形，因此

(1) $\overline{PO}$ 垂直平分 $\overline{AB}$。

(2) $\overline{PO}$ 為 $\angle APB$ 的角平分線，

$\overline{OP}$也是 $\angle AOB$ 的角平分線。



7

教材內容說明：

1. 本頁隨堂練習答案：50°。

2. 本教材第 6~7 頁的教學重點是幫助學生理解切線段有兩條，而且兩條切線段等長。

   第(8)題給定直線 PA、PB 為圓 O 的切線，A、B 為切點，要求學生判斷四邊形 PBOA 是箏形，本頁教材透過以下步驟幫學生解題：

   步驟一：圓的半徑階相等，得到四邊形一組鄰邊等長。

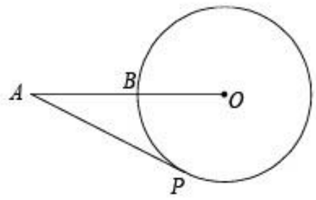
   步驟二：利用切線段等長性質，得到四邊形另一組鄰邊也等長。

3. 本頁重點整理教師宜提示學生。

基本學習內容：SC-9-6-3 切線段等長。

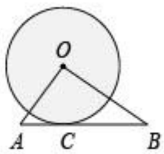
小試身手

1. $\overline{AP}$ 切圓 O 於 P 點，$\overline{OA}=25$，$\overline{OB}=7$，則 $\overline{AP}$ ＝ 17



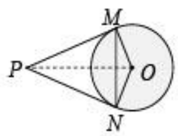
答：17

2. 如右圖，直線 AB 為圓 O 的切線，切點為 C，若 $\overline{OA}=5$，$\overline{AC}=3$，$\overline{BC}=6$，則 $\overline{OB}$＝________。



答：$2\sqrt{13}$

3. 如右圖，P 為圓 O 外一點，$\overleftrightarrow{PM}$、$\overleftrightarrow{PN}$ 為圓 O 的切線，M、N 為切點，已知圓 O 半徑為 5，$\overline{OP}=13$，則：
(1) 四邊形 $OMPN$ 的周長＝________。
(2) 四邊形 $OMPN$ 的面積＝________。
(3) $\angle MON+\angle MPN$＝________度。
(4) $\overline{MN}$＝________。



答：(1) 34；(2) 60；(3) 180；(4) $\dfrac{120}{13}$

8

教材內容說明：

1. 本頁小試身手針對切線性質練習題(1)~(2)題。

   第 1 題：利用半徑與切線垂直與畢氏定理得到答案。

   第 2 題：利用半徑與切線垂直與畢氏定理得到答案。

2. 本頁小試身手針對切線段等長性質練習題(3)題。

   第 3 題：利用切線段等長解題，計算出答案。

教育部國民及學前教育署 編

國民中學學生學習扶助教材 9年級數學