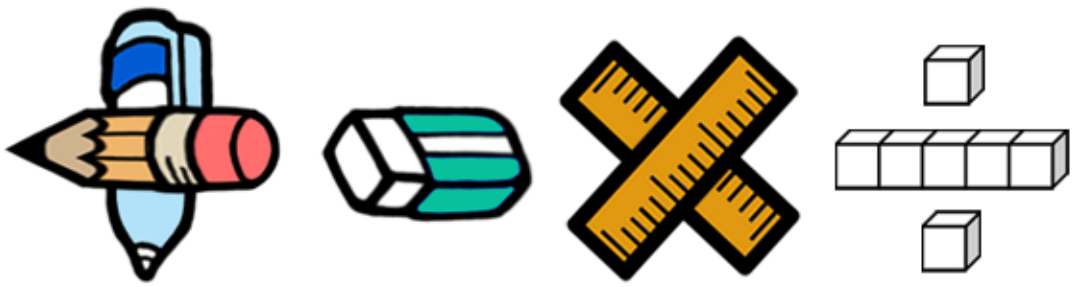
本教材著作財產權為教育部國民及學前教育署所有

基本學習內容：SC-9-7-2

切線性質

【教師用】



教育部國民及學前教育署 編

中華民國 113 年 8 月

本教材著作財產權為教育部國民及學前教育署所有

學習內容：

S-9-7 點、直線與圓的關係：點與圓的位置關係（內部、圓上、 外部）；

直線與圓的位置關係（不相交、相切、交於兩點）；

圓心與切點的連線垂直此切線（切線性質）；

圓心到弦的垂直線段（弦心距）垂直平分此弦。

基本學習內容：

SC-9-7-2 切線性質。

基本學習表現：

SCP-9-7-2-1 認識切線性質：圓心與切點的連線必垂直此切線。

概要說明：

- 基本學習內容 SC-9-7-2 為 SC-9-1-1 的後續學習概念，故學生應已認識直線與圓恰交於一點時，此直線即為圓的切線。
- 本基本學習內容幫助學生認識切線性質。
- 切線的性質不易理解，建議舉生活實例輔助說明。

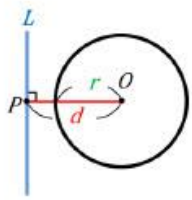
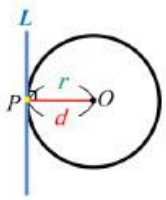
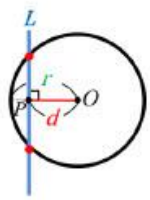
本教材著作財產權為教育部國民及學前教育署所有

◎複習活動

直線與圓的位置關係有下列三種情況：

r 表示圓半徑，

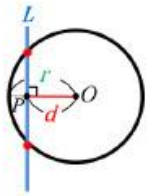
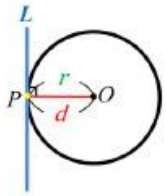
d 表示圓心到直線的距離。

直線與圓不相交	直線與圓恰交於一點	直線與圓相交於兩點
$d > r$	$d = r$	$d < r$
		

如圖一，直線與圓相交於兩點時，我們稱直線 L 為圓 O 的**割線**。

如圖二，直線與圓恰交於一點時，我們稱直線 L 為圓 O 的**切線**，交點 P 為**切點**，P 點為 O 點到直線的垂足。

若 L 為切線，直線與圓交於 P 點，則圓心 O 與 P 點的連線會垂直於 L，記為 $\overline{OP} \perp L$。

直線與圓相交於兩點 $d < r$	直線與圓恰交於一點 $d = r$
	
圖一	圖二

本教材著作財產權為教育部國民及學前教育署所有

教材內容說明：

1. 本教材第 1～3 頁的教學重點是幫助學生理解切線性質。
2. 本頁上方複習活動在說明直線與圓的位置關係有三種情況。

   r 表示圓半徑、d 表示圓心到直線的距離，透過 d 與 r 的大小判斷直線與圓的關係：

   (1) $d > r$，直線與圓不相交；

   (2) $d = r$，直線與圓恰交於一點；

   (3) $d < r$，直線與圓相交於兩點。
3. 本頁下方教師提示重點說明直線與圓相交於兩點時，直線為圓的割線；直線與圓恰交於一點時，直線為圓的切線，並定義切線性質為「圓心與切點的連線必垂直切線」。

本教材著作財產權為教育部國民及學前教育署所有

(1)已知圓 O 的直徑為 20，若圓心到三條直線 L_1、L_2、L_3 的距離分別為 7、10、13，則 L_1、L_2、L_3 哪一條是圓 O 的切線？哪一條是圓 O 的割線？

解：「圓心到直線的距離＝圓半徑時，直線與圓恰交於一點，直線為切線；圓心到直線的距離＜圓半徑時，直線與圓交於兩點，直線為割線。」

(1)我先求出圓半徑，因為圓 O 的直徑是 20，所以**半徑是 10**。

再把圓心到三條直線的距離比大小，發現：

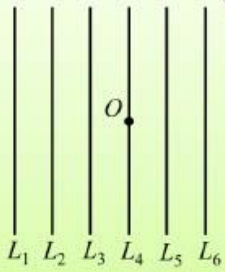
「圓心到直線 L_2 的距離為 10」＝「圓的半徑 10」，

所以直線 L_2 與圓 O 恰交於一點，直線 L_2 是圓 O 的切線。

(2)「圓心到直線 L_1 的距離為 7」＜「圓的半徑 10」，

所以直線 L_1 與圓 O 交於兩點，直線 L_1 是圓 O 的割線。

(2)如右圖，有六條平行線 L_1、L_2、L_3、L_4、L_5、L_6，相鄰兩條平行線的距離皆為 1.5 公分。已知 O 點在直線 L_4 上，若以 O 點為圓心，半徑為 3 公分畫圓，則哪些直線是圓 O 的切線？哪些直線是圓 O 的割線？



解：「圓心到直線的距離＝圓半徑時，直線與圓恰交於一點，直線為切線；圓心到直線的距離＜圓半徑時，直線與圓交於兩點，直線為割線。」

我用圓規畫畫看，以 O 點為圓心，半徑為 3 公分畫圓，發現：

直線 L_3、L_4、L_5 和圓 O 相交於兩點，

所以直線 L_3、L_4、L_5 是圓 O 的割線。

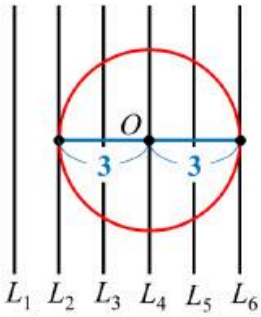
我用距離檢查切線：

因為相鄰兩條平行線的距離皆為 1.5 公分，

所以直線 L_2、L_6 到直線 L_4 的距離都是 3 公分，

則直線 L_2、L_6 分別和圓 O 恰交於一點，

所以直線 L_2、L_6 是圓 O 的切線。



本教材著作財產權為教育部國民及學前教育署所有

教材內容說明：

1. 本教材第 1～3 頁的教學重點是幫助學生理解切線性質。
2. 第(1)題給定直徑為 20 的圓，已知圓心到三條直線的距離分別為 7、10、13，要求學生回答圓的切線、割線分別是哪一條直線。

   教師引導學生利用「**圓心到直線的距離與半徑的大小關係**」推論直線為切線或割線。

   本教材提供解法如下：

   先找出圓的半徑＝10，再將圓心到三條直線的距離比大小：

   圓心到直線 L_2 的距離 10＝圓的半徑，所以直線 L_2 是圓 O 的切線；

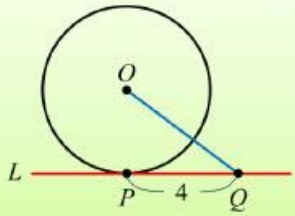
   圓心到直線 L_1 的距離 7 < 圓的半徑，所以直線 L_1 是圓 O 的割線。
3. 第(2)題給定六條平行線，相鄰兩條線的距離皆為 1.5 公分。已知 O 點在直線 L_4 上，若以 O 點為圓心，半徑 3 公分畫圓，要求學生回答圓的切線、割線分別是哪些直線。

   教師引導學生利用圓規依題意畫出圓 O，發現 O 點到直線 L_2、L_6 的距離恰等於半徑，所以與圓 O 恰交於一點，直線 L_2、L_6 是圓 O 的切線。

   觀察作圖結果得知，直線 L_3、L_4、L_5 與圓 O 相交於兩點，所以直線 L_3、L_4、L_5 是圓 O 的割線。

本教材著作財產權為教育部國民及學前教育署所有

(3)如右圖，圓 O 的半徑為 3 公分，
且直線 L 為圓 O 的切線，P 點為切點。
若 Q 點是直線 L 上任一點，且 $\overline{PQ}=4$，
則 $\overline{OQ}=$？



解：「P 點為切點，所以圓心 O 和切點 P 的連線必垂直切線 L」

我先連接 $\overline{OP}$，$\overline{OP}=$半徑，所以 $\overline{OP}=3$。

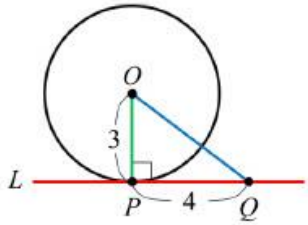
如右圖，$\triangle OPQ$ 是直角三角形，

接著利用畢氏定理

$\overline{OP}^2+\overline{PQ}^2=\overline{OQ}^2$，將 $\overline{OP}=3$、$\overline{PQ}=4$ 代入，

得到 $3^2+4^2=\overline{OQ}^2$，

$\overline{OQ}^2=25$，因為 $\overline{OQ}>0$，所以 $\overline{OQ}=5$。



本教材著作財產權為教育部國民及學前教育署所有

教材內容說明：

1. 本教材第 1～3 頁的教學重點是幫助學生理解切線性質。
2. 第(3)題給定「半徑為 3 公分的圓」，已知「切線 L」和「切點 P」以及切線上任意一點 Q，要求學生算出 $\overline{OQ}$ 的長。

   本教材提供解法如下：

   教師引導學生從**「圓心和切點的連線必垂直切線」**思考解題方法。

   建議教師利用下列步驟解題：

   步驟一：先連接 $\overline{OP}$，因為直線 L 為切線，所以 $\overline{OP} \perp L$，$\triangle OPQ$ 為直角三角形。

   步驟二：利用畢氏定理列式 $\overline{OP}^2 + \overline{PQ}^2 = \overline{OQ}^2$，將 $\overline{OP}$ ＝半徑＝3、$\overline{PQ} = 4$ 代入求得 $\overline{OQ} = 5$。

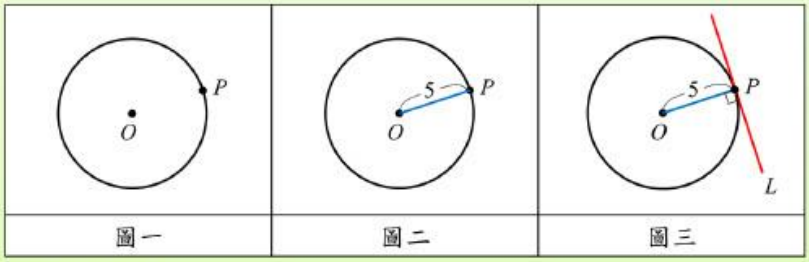
本教材著作財產權為教育部國民及學前教育署所有

(4)如下圖，

圖一：已知圓 O 的半徑=5，P 為圓 O 上的一點

圖二：連接 $\overline{OP}$，$\overline{OP}$ 是圓 O 的半徑，則 $\overline{OP}=5$

圖三：過 P 點作垂直於半徑 $\overline{OP}$ 的直線 L



回答下列問題：

(1) 假設 Q 點在直線 L 上，$Q \neq P$，則 Q 點是否一定在圓外?

(2) 直線 L 是否為圓 O 的切線？

解：「直角三角形的斜邊最長」

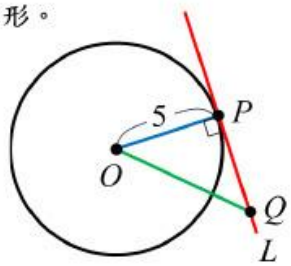
(1)如右圖，

Q 點在直線 L 上，連接 $\overline{OQ}$，$\triangle OPQ$ 為直角三角形。

我發現 $\overline{OQ}$ 是直角三角形的斜邊，

所以 $\overline{OQ}$ 一定比 $\overline{OP}$ 長，也就是 $\overline{OQ} > 5$，

則 Q 點一定在圓外。



(2)從第(1)題得知，

直線 L 和圓 O 只有一個交點 P，所以直線 L 是為圓 O 的切線。

1.過圓上任一點且與半徑垂直的直線必為此圓的切線。

2.切線性質：圓心與切點的連線必垂直此切線。

本教材著作財產權為教育部國民及學前教育署所有

教材內容說明：

1. 本教材第 4～5 頁的教學重點是幫助學生理解「過圓上一點，且圓心和該點連線垂直的直線必為圓的切線」。
2. 第(4)題給定圓 O 及圓上一點 P，過 P 點做垂直於半徑的直線 L，包含兩個子問題。

   子問題一：直線上有一點異於 P 的 Q 點，要求學生回答 Q 點是否一定在圓外。

   ● 教師幫助學生先連接 $\overline{OQ}$，並發現 $\overline{OQ}$ 為直角三角形的斜邊，因為斜邊一定是直角三角形的最長邊，所以 $\overline{OQ} > \overline{OP}$，那麼 Q 點一定在圓外。

   子問題二：要求學生回答直線 L 是否為圓 O 的切線。

   ● 教師引導學生從第一個子問題的答案推得直線 L 和圓 O 只會有一個交點 P，所以直線 L 是圓 O 的切線。

   ● 本題在推論過圓上一點，且與圓心和該點連線垂直的直線只有一條，一定是圓的切線。
3. 本頁下方教師提示重點在說明：

   甲、過圓上任一點且與半徑垂直的直線必為此圓的切線。

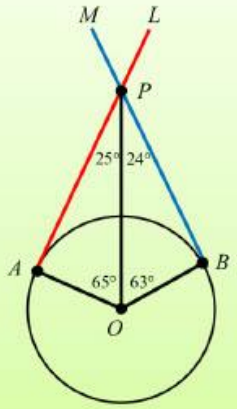
   乙、切線性質：圓心與切點的連線必垂直此切線。

本教材著作財產權為教育部國民及學前教育署所有

(5)如右圖，說說看

直線 L 是圓 O 的切線嗎？

直線 M 是圓 O 的切線嗎？



解：「切線性質：圓心與切點的連線必垂直此切線」

先看△OAP，

$\angle PAO = 180 - (25 + 65) = 90$ 度，

所以 $\overline{OA} \perp \overline{AP}$，直線 L 是圓 O 的切線。

接著看△OBP，

$\angle PBO = 180 - (24 + 63) = 93$ 度，

所以 $\overline{OB}$ 和 $\overline{BP}$ 不會垂直，直線 M 不是圓 O 的切線。

本教材著作財產權為教育部國民及學前教育署所有

教材內容說明：

1. 本教材第 4～5 頁的教學重點是幫助學生理解「過圓上一點，且圓心和該點連線垂直的直線必為圓的切線」。
2. 第(5)題給定圓 O，$\triangle PAO$、$\triangle PBO$ 及其兩個內角度數，要求學生回答直線 L、直線 M 是否為圓 O 的切線。

   教師引導學生利用「過圓上一點，且圓心和該點連線垂直的直線必為圓的切線」的性質判斷，也就是檢查圓心和交點的連線與該直線的夾角是否為 90 度。

   $\triangle PAO$ 中，$\angle PAO = 180° - (25° + 65°) = 90°$，$\overline{PA} \perp \overline{OA}$，所以直線 L 是圓 O 的切線。

   $\triangle PBO$ 中，$\angle PBO = 180° - (24° + 63°) = 93°$，$\overline{PB} \perp \overline{OB}$，所以直線 M 不是圓 O 的切線。

本教材著作財產權為教育部國民及學前教育署所有

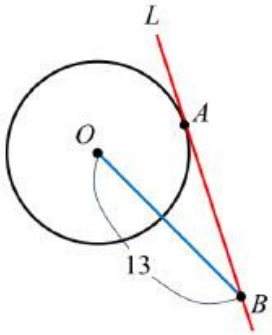
小試身手

(1)已知圓 O 的直徑為 25，若圓心到三條直線 L_1、L_2、L_3 的距離分別為 10、12.5、25，則 L_1、L_2、L_3 哪一條是圓 O 的切線？哪一條是圓 O 的割線？

答：直線 L_2 為切線、直線 L_1 為割線

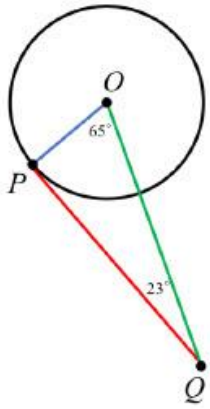
(2)如右圖，圓 O 的直徑為 10 公分，
且直線 L 為圓 O 的切線，A 點為切點。
若 B 點是直線 L 上任一點，且 $\overline{OB}=13$，則 $\overline{AB}=$？

答：$\overline{AB}=12$



(3)如右圖，已知 P 點在圓 O 上。
在△OPQ 中，∠POQ＝65°、∠PQO＝23°。
說說看，$\overline{PQ}$ 是否為圓 O 的切線。

答：否



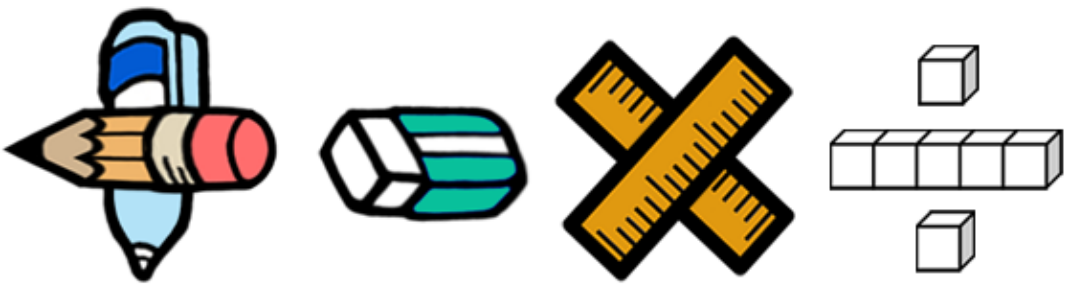
本教材著作財產權為教育部國民及學前教育署所有

教材內容說明：

1. 本頁小試身手提供切線性質類題練習。

本教材著作財產權為教育部國民及學前教育署所有

教育部國民及學前教育署 編

國民中學 9 年級數學

學生學習扶助教材