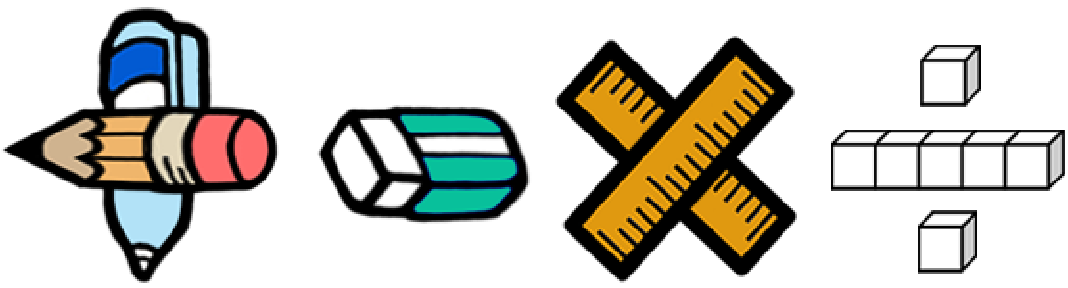
基本學習內容：SC-9-7-3

弦心距

【教師用】



教育部國民及學前教育署 編

中華民國 113 年 8 月

學習內容：

S-9-7 點、直線與圓的關係：點與圓的位置關係（內部、圓上、 外部）；

直線與圓的位置關係（不相交、相切、交於兩點）；

圓心與切點的連線垂直此切線（切線性質）；

圓心到弦的垂直線段（弦心距）垂直平分此弦。

基本學習內容：

SC-9-7-3 弦心距。

基本學習表現：

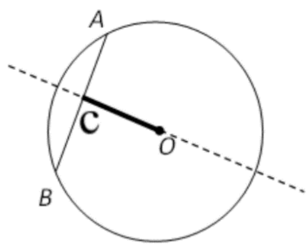
SCP-9-7-3-1 認識弦心距垂直平分弦。

概要說明：

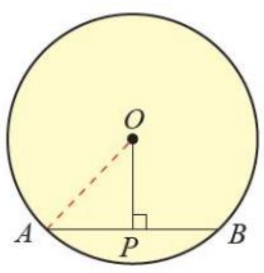
■ 基本學習內容 SC-9-7-3 為 SC-9-7-1 的後續學習概念，故學生應已認識點到直線距離的意義。

■ 本基本學習內容幫助學生認識弦心距的性質。

■ 弦心距為圓心到弦的距離，可透過將弦 $\overline{AB}$ 對摺，交弦 $\overline{AB}$ 於 C 點，觀察出摺痕 $\overline{OC}$ 即為該弦的垂直平分線，$\overline{OC}$ 長即為弦心距。如：

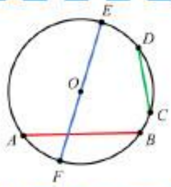


■ 如下圖，弦心距、弦的一半、圓半徑形成直角三角形，可利用畢氏定理求得未知邊長，學生常誤將 $\overline{AP}$ 當作弦長計算，建議教學上請學生先畫出弦後，再計算 $\overline{AB}$。



◎複習活動

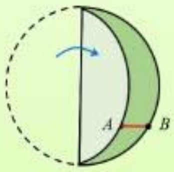
連接圓周上相異兩點的線段稱為**弦**。
如右圖，$\overline{AB}$、$\overline{CD}$、$\overline{EF}$ 都是圓 O 的弦。



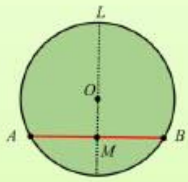
(1) 請剪下附件，已知 $\overline{AB}$ 是圓 O 的一條弦，依照下列步驟觀察圓心與弦的關係：

步驟一：將圓對摺，使得 A、B 兩點疊合在一起，如圖一。

步驟二：打開圓 O，摺線 L 為圓 O 的對稱軸，L 與 $\overline{AB}$ 的交點為 M。如圖二。



圖一



圖二

請回答下列問題：
① $\overline{AM}$ 和 $\overline{BM}$ 是否一樣長？
②摺線 L 是否會垂直 $\overline{AB}$？
③摺線 L 是否會通過圓心 O？

解：

①因為 A、B 為對稱點，所以 $\overline{AM}=\overline{BM}$ 。
②將 $\overline{AB}$ 對摺後得到摺線 L，所以摺線 L 是 $\overline{AB}$ 的對稱軸。
對稱軸一定會垂直對稱點的連線，所以摺線 L 會垂直 $\overline{AB}$。
所以摺線 L 是 $\overline{AB}$ 的垂直平分線。
③因為 O 是圓心，$\overline{OA}=\overline{OB}=$ 半徑，所以 $\triangle OAB$ 是等腰三角形。
則過 $\triangle OAB$ 底邊的垂直平分線 L 會通過頂點 O。

教材內容說明：

1. 本教材第 1～6 頁的教學重點是幫助學生理解弦心距的意義及其性質。
2. 本頁上方複習活動在複習弦的定義：連接圓周上相異兩點的線段稱為弦。
3. 第(1)題給定圓 O 上一條弦 $\overline{AB}$，要求學生剪下附件後依步驟操作，並觀察圓心與弦的關係，包含三個子問題。

   子問題①：要求學生回答 $\overline{AM}$ 和 $\overline{BM}$ 是否一樣長。

   教師引導學生看到摺線 L 為圓 O 的對稱軸，M 為 L 與 AB 的交點，A、B 為 L 的對稱點，兩點疊合在一起，所以 $\overline{AM}$ 和 $\overline{BM}$ 一樣長。

   子問題②：要求學生回答摺線 L 是否垂直 $\overline{AB}$。

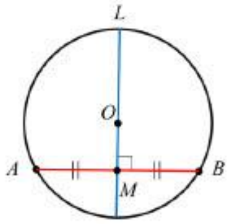
   教師幫助學生複習對稱軸必垂直平分對稱點連線性質，所以摺線 L 垂直 $\overline{AB}$。

   子問題③：要求學生回答摺線 L 是否通過圓心 O。

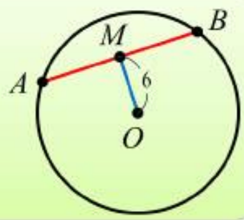
   教師引導學生看到△OAB 為等腰三角形，其底邊的垂直平分線必通過頂點，所以摺線 L 通過圓心 O。

如右圖，直線 L 是 $\overline{AB}$ 的中垂線，M 點為 L 與 $\overline{AB}$ 的交點，則：

1. 弦的中垂線一定會通過圓心，
   也就是 $\overline{OM}$ 垂直平分 $\overline{AB}$。
2. $\overline{OM}$ 的長稱為弦 $\overline{AB}$ 的弦心距。



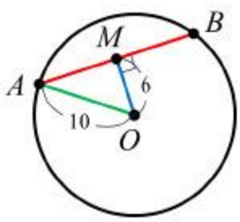
(2) 如右圖，$\overline{AB}$ 是圓 O 上一弦，$\overline{OM}$ 是弦心距。
已知圓 O 的半徑為 10 公分，$\overline{OM}=6$ 公分，則：
① $\overline{AM}=?$
② $\overline{AB}=?$



解：

因為 $\overline{OM}$ 是弦心距，所以 $\overline{OM}$ 垂直平分 $\overline{AB}$。

①我先連接 $\overline{OA}$，$\overline{OA}$ 是半徑，所以 $\overline{OA}=10$。
因為 $\triangle OAM$ 是直角三角形，
利用畢氏定理得到 $\overline{OM}^2+\overline{AM}^2=\overline{OA}^2$，
將 $\overline{OA}=10$、$\overline{OM}=6$ 代入計算：
$6^2+\overline{AM}^2=10^2 \rightarrow \overline{AM}^2=10^2-6^2=64 \rightarrow \overline{AM}=8$



②因為 $\overline{OM}$ 垂直平分 $\overline{AB}$，所以 $\overline{AM}=\overline{BM}=8$。
$\overline{AB}=8+8=16$。

教材內容說明：

1. 本教材第 1～6 頁的教學重點是幫助學生理解弦心距的意義及其性質。
2. 本頁上方教師提示重點在定義弦心距及其性質。
3. 第(2)題給定半徑為 10 公分的圓 O，及圓 O 上一弦 $\overline{AB}$，$\overline{OM}$ 是弦心距，且 $\overline{OM}=6$，要求學生回答兩個子問題。

   本教材提供解法如下：

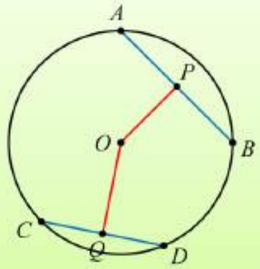
   子問題①：要求學生算出 $\overline{AM}$ 的長度。

   教師引導學生連接 $\overline{OA}$，發現△OAM 為直角三角形，再利用畢氏定理求出 $\overline{AM}$ 的長度。

   子問題②：要求學生算出 $\overline{AB}$ 的長度。

   教師引導學生利用弦心距垂直平分弦的性質算出 $\overline{AB}$ 的長度。

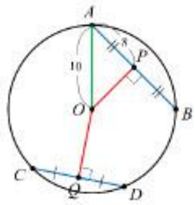
(3) 如右圖，$\overline{AB}$、$\overline{CD}$是圓 O 上的兩弦，
$\overline{OP}$、$\overline{OQ}$分別是$\overline{AB}$、$\overline{CD}$的弦心距。
已知圓 O 的半徑為 10 公分，
$\overline{AB}=16$ 公分、$\overline{CD}=12$ 公分，則：
① $\overline{OP}=$？
② $\overline{OQ}=$？



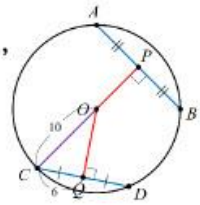
解：

因為$\overline{OP}$、$\overline{OQ}$是$\overline{AB}$、$\overline{CD}$的弦心距，所以$\overline{OP}$垂直平分$\overline{AB}$、$\overline{OQ}$垂直平分$\overline{CD}$。

①先連接$\overline{OA}$，$\overline{OA}$是半徑，所以$\overline{OA}=10$。
因為△OAP 是直角三角形，利用畢氏定理得到$\overline{OP}^2+\overline{PA}^2=\overline{OA}^2$，
將$\overline{OA}=10$、$\overline{PA}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\times16=8$代入計算：
$\overline{OP}^2+8^2=10^2$ ➔ $\overline{OP}^2=10^2-8^2=36$ ➔ $\overline{OP}=6$(負不合)

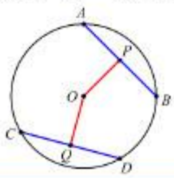


②再連接$\overline{OC}$，$\overline{OC}$也是半徑，所以$\overline{OC}=10$。
因為△OCQ 是直角三角形，利用畢氏定理得到$\overline{OQ}^2+\overline{QC}^2=\overline{OC}^2$，
將$\overline{OC}=10$、$\overline{QC}=\frac{1}{2}\overline{CD}=\frac{1}{2}\times12=6$代入計算：
$\overline{OQ}^2+6^2=10^2$ ➔ $\overline{OQ}^2=10^2-6^2=64$ ➔ $\overline{OQ}=8$(負不合)



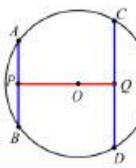
同一圓中，

(1) 弦等長，弦心距等長。



$\overline{AB}=\overline{CD}$
$\overline{OP}=\overline{OQ}$

(2) 弦愈長，弦心距愈短。



$\overline{AB}<\overline{CD}$
$\overline{OP}>\overline{OQ}$

教材內容說明：

1. 本教材第 1～6 頁的教學重點是幫助學生理解弦心距的意義及其性質。
2. 第(3)題給定半徑為 10 公分的圓 O 和圓 O 上相異兩弦及其弦心距。已知兩條弦的弦長，要求學生回答兩個子問題。

   本教材提供解法如下：

   教師幫助學生利用弦心距性質求出弦長的一半，再利用畢氏定理解題。

   子問題①：要求學生算出 $\overline{OP}$ 的長度。

   教師引導學生連接 $\overline{OA}$，發現△OAP 為直角三角形，再利用畢氏定理求出 $\overline{OP}$ 的長度。

   子問題②：要求學生算出 $\overline{OQ}$ 的長度。

   教師引導學生連接 $\overline{OC}$，發現△OCQ 為直角三角形，再利用畢氏定理求出 $\overline{OQ}$ 的長度。

   ●教師幫助學生發現「同一圓中，弦愈長，弦心距愈短；弦愈短，弦心距愈長」。
3. 本頁下方教師提示重點在說明同一圓中弦長與弦心距的關係。

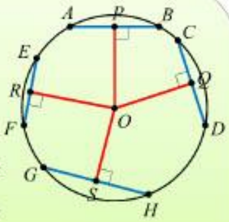
(4) 如右圖，$\overline{AB}$、$\overline{CD}$、$\overline{EF}$、$\overline{GH}$ 分別是圓 O 的四條弦，已知 $\overline{AB}=8$、$\overline{AB}$ 的弦心距長為 3，則：

①圓 O 的半徑＝？

②已知 $\overline{CD}$ 的弦心距長為 3，請比較 $\overline{AB}$、$\overline{CD}$ 的大小關係。

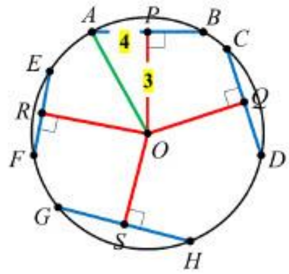
③已知 $\overline{EF}$ 的弦心距長為 4，請比較 $\overline{AB}$、$\overline{EF}$ 的大小關係。

④已知 $\overline{GH}$ 的弦心距長為 2，請比較 $\overline{AB}$、$\overline{GH}$ 的大小關係。



解：

①連接 $\overline{OA}$，$\overline{OA}$ 是半徑，$\triangle OAP$ 為直角三角形。



利用畢氏定理得到 $\overline{OP}^2+\overline{PA}^2=\overline{OA}^2$，

因為 $\overline{AB}$ 的弦心距長為 3，所以 $\overline{OP}=3$，

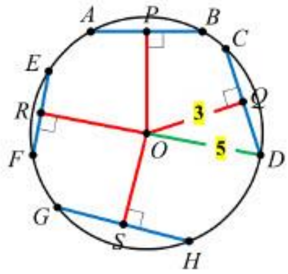
且 $\overline{PA}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\times 8=4$，

代入畢氏定理計算：

$3^2+4^2=\overline{OA}^2$ ➔ $\overline{OA}^2=9+16=25$ ➔ $\overline{OA}=5$(負不合)

所以圓 O 的半徑＝5。

②連接 $\overline{OD}$，$\overline{OD}$ 是半徑，$\triangle ODQ$ 為直角三角形。



利用畢氏定理得到 $\overline{OQ}^2+\overline{QD}^2=\overline{OD}^2$，

因為 $\overline{CD}$ 的弦心距長為 3，所以 $\overline{OQ}=3$，

將 $\overline{OQ}=3$、$\overline{OD}=5$ 代入畢氏定理計算：

$3^2+\overline{QD}^2=5^2$ ➔ $\overline{QD}^2=25-9=16$ ➔ $\overline{QD}=4$(負不合)，

得到 $\overline{CD}=2\overline{QD}=8$ ➔ 所以 $\overline{AB}=\overline{CD}$。

教材內容說明：

1. 本教材第 1～6 頁的教學重點是幫助學生理解弦心距的意義及其性質。
2. 第(4)題給定圓 O 上相異四條弦。已知其中一條弦 $\overline{AB}=8$、$\overline{AB}$ 的弦心距長為 3，要求學生回答四個子問題。

   本教材提供解法如下：

   子問題①：要求學生算出圓 O 的半徑。

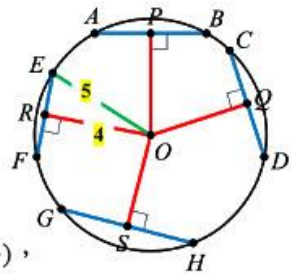
   圓 O 的半徑為子問題②③④解題需要用到的條件。

   教師引導學生連接 $\overline{OA}$，發現$\triangle OAP$ 為直角三角形，再利用畢氏定理求出 $\overline{OA}=5$，則圓 O 的半徑＝5。

   子問題②：給定 $\overline{CD}$ 的弦心距長為 3，要求學生比較 $\overline{AB}$、$\overline{CD}$ 的大小關係。

   教師引導學生連接 $\overline{OD}$，發現$\triangle ODQ$ 為直角三角形，利用畢氏定理求出 $\overline{OD}=4$，再利用弦心距性質算出 $\overline{CD}=8$，所以 $\overline{AB}=\overline{CD}$。

③連接 $\overline{OE}$，$\overline{OE}$ 是半徑，$\triangle OER$ 為直角三角形。



利用畢氏定理得到 $\overline{OR}^2+\overline{RE}^2=\overline{OE}^2$，

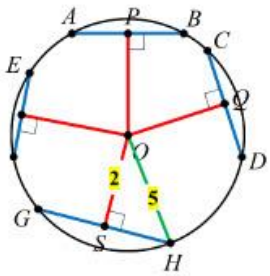
因為 $\overline{EF}$ 的弦心距長為 4，所以 $\overline{OR}=4$，

將 $\overline{OR}=4$、$\overline{OE}=5$ 代入畢氏定理計算：

$4^2+\overline{RE}^2=5^2$ ➔ $\overline{RE}^2=25-16=9$ ➔ $\overline{RE}=3$(負不合)，

得到 $\overline{EF}=2\overline{RE}=6$ ➔ 所以 $\overline{AB}>\overline{EF}$。

④連接 $\overline{OH}$，$\overline{OH}$ 是半徑，$\triangle OHS$ 為直角三角形。



利用畢氏定理得到 $\overline{OS}^2+\overline{SH}^2=\overline{OH}^2$，

因為 $\overline{GH}$ 的弦心距長為 2，所以 $\overline{OS}=2$，

將 $\overline{OS}=2$、$\overline{OH}=5$ 代入畢氏定理計算：

$2^2+\overline{SH}^2=5^2$ ➔ $\overline{SH}^2=25-4=21$ ➔ $\overline{SH}=\sqrt{21}$(負不合)，

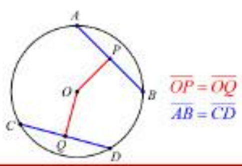
得到 $\overline{GH}=2\overline{SH}=2\sqrt{21}$

因為 $\overline{AB}^2=64$、$\overline{GH}^2=(2\sqrt{21})^2=4\times21=84$，

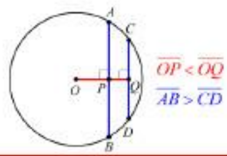
所以 $\overline{AB}^2<\overline{GH}^2$，得到 $\overline{AB}<\overline{GH}$。

同一圓中，

(1)弦心距等長，弦等長。



(2)弦心距愈長，其弦愈短。



教材內容說明：

1. 本教材第 1～6 頁的教學重點是幫助學生理解弦心距的意義及其性質。
2. 第(4)題給定圓 O 上相異四條弦。已知其中一條弦 $\overline{AB}=8$、$\overline{AB}$ 的弦心距長為 3，要求學生回答四個子問題。

   本教材提供解法如下：

   子問題③：給定 $\overline{EF}$ 的弦心距長為 4，要求學生比較 $\overline{AB}$、$\overline{EF}$ 的大小關係。

   教師引導學生連接 $\overline{OE}$，發現$\triangle OER$ 為直角三角形，利用畢氏定理求出 $\overline{RE}=3$，再利用弦心距性質算出 $\overline{EF}=6$，所以 $\overline{AB}>\overline{EF}$。

   子問題④：給定 $\overline{GH}$ 的弦心距長為 2，要求學生比較 $\overline{AB}$、$\overline{GH}$ 的大小關係。

   教師引導學生連接 $\overline{OH}$，發現$\triangle OHS$ 為直角三角形，利用畢氏定理求出 $\overline{SH}=\sqrt{21}$，再利用弦心距性質算出 $\overline{GH}=2\sqrt{21}$。將 $\overline{AB}$、$\overline{GH}$ 分別平方後再比較大小，所以 $\overline{AB}<\overline{GH}$。

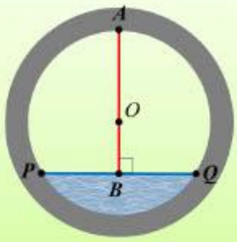
   - 教師幫助學生發現「同一圓中，弦心距相等，兩弦等長；弦心距愈長，弦愈短；弦心距愈短，弦愈長」。
3. 本頁下方教師提示重點在說明同一圓中弦心距與弦的關係。

(5) 已知在圓 O 中，$\overline{OP}$、$\overline{OQ}$、$\overline{OR}$ 分別為 $\overline{AB}$、$\overline{CD}$、$\overline{EF}$ 的弦心距。
如果 $\overline{OP}<\overline{OQ}<\overline{OR}$，請比較 $\overline{AB}$、$\overline{CD}$、$\overline{EF}$ 的大小關係。

解：

我知道，**在同一圓中，弦心距愈長，其弦愈短。**
因為 $\overline{OP}<\overline{OQ}<\overline{OR}$，所以 $\overline{AB}>\overline{CD}>\overline{EF}$。

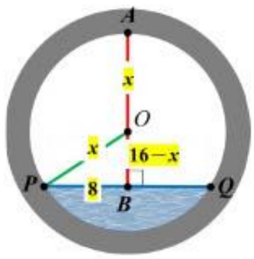
(6) 如右圖，圓 O 為一個水管的橫切面。
水管裡裝有一些水，已知水面寬 $\overline{PQ}=16$ 公分，
水面到水管頂端的高度 $\overline{AB}=16$ 公分。
請問此水管的半徑 $\overline{OP}$ 為多少公分？



解：

先假設水管的半徑為 x 公分，

如右圖，連接 $\overline{OP}$，



$\overline{OA}$、$\overline{OP}$ 都是半徑，所以 $\overline{OA}=\overline{OP}=x$，

得到 $\overline{OB}=16-x$。

觀察△OPB，△OPB 是直角三角形，

利用畢氏定理得到 $\overline{OB}^2+\overline{PB}^2=\overline{OP}^2$，

將 $\overline{OB}=16-x$、$\overline{PB}=\frac{1}{2}\overline{PQ}=\frac{1}{2}\times16=8$、$\overline{OP}=x$ 代入計算：

$(16-x)^2+8^2=x^2$

➔ $(16^2-2\times16\times x+\cancel{x^2})+8^2=\cancel{x^2}$

➔ $-32x=-320$

➔ $x=10$

所以水管的半徑 $\overline{OP}=10$ 公分。

6

教材內容說明：

1. 本教材第 1～6 頁的教學重點是幫助學生理解弦心距的意義及其性質。
2. 第(5)題給定圓 O 中相異三條弦及其弦心距，已知弦心距的長度大小關係，要求學生比較三條弦長的大小關係。

   本教材提供解法如下：

   本題沒有附圖，教師可幫助學生先依題意畫出對應圖形，

   再利用「同一圓中，弦心距愈短，弦愈長」得到 $\overline{AB} > \overline{CD} > \overline{EF}$ 。
3. 第(6)題給定圓 O 為水管的橫切面。已知水管內的水面寬度及水面到水管頂端的高度，要求學生算出水管半徑 $\overline{OP}$ 的長度。

   本教材提供解法如下：

   假設半徑為 x 公分，教師引導學生連接 $\overline{OP}$，幫助學生看到 $\overline{OP} = \overline{OA} = x$，推得 $\overline{OB} = 16 - x$，並記錄在圖形上。利用 $\triangle OPB$ 為直角三角形，利用畢氏定理求出 $x = 10$ ，所以 $\overline{OP} = 10$ 。

小試身手

1. 下列關於弦心距的敘述，哪些是正確的？答：__D__。

   甲：弦心距是圓心到弦的距離

   乙：弦是弦心距的垂直平分線

   丙：同一圓中，弦愈長，弦心距愈短

   丁：同一圓中，弦心距愈短，弦愈短

   戊：若兩條弦等長，則兩弦心距也一定等長。

   (A) 甲乙丙丁戊　(B) 甲乙丙丁　(C) 甲乙丙　(D) 甲丙

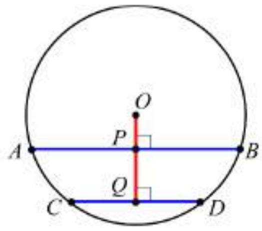
2. 如右圖，$\overline{OP}$、$\overline{OQ}$分別為$\overline{AB}$、$\overline{CD}$兩弦的弦心距，且 O、P、Q 三點共線。

   已知$\overline{OP}=7$、$\overline{AB}=48$、$\overline{CD}=40$，則：

   (1) 圓 O 的半徑＝？答：25

   (2) $\overline{OQ}$＝？答：15

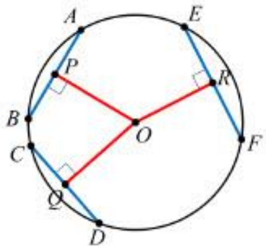
   (3) $\overline{PQ}$＝？答：8



3. 如右圖，已知$\overline{OP}$、$\overline{OQ}$、$\overline{OR}$分別為$\overline{AB}$、$\overline{CD}$、$\overline{EF}$三弦的弦心距。如果 $\overline{AB}<\overline{CD}<\overline{EF}$，

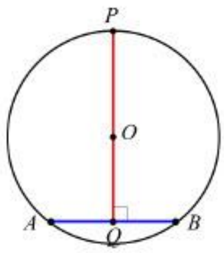
   則$\overline{OP}$、$\overline{OQ}$、$\overline{OR}$的大小關係為何？答：＿＿＿＿＿。

   答：$\overline{OP}>\overline{OQ}>\overline{OR}$



4. 如右圖，$\overline{AB}$為圓 O 的一弦，過 O 點作$\overline{PQ}\perp\overline{AB}$，分別交圓 O 於 P 點、交$\overline{AB}$於 Q 點。已知$\overline{AB}=16$、$\overline{PQ}=32$，求圓 O 的半徑為多少？

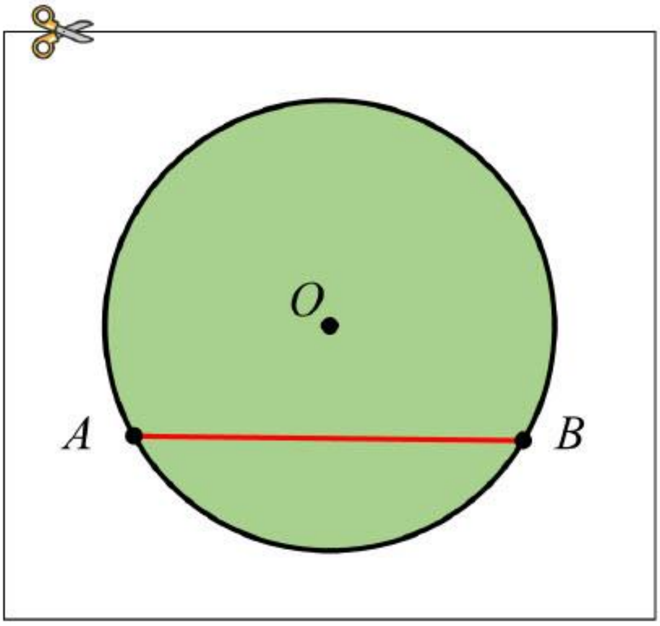
   答：17



教材內容說明：

1. 本教材第 7 頁小試身手提供弦心距的意義及其性質練習題。

附件



教材內容說明：

1. 本教材第 8 頁為第(1)題的附件。

教育部國民及學前教育署 編

國民中學 學生學習扶助教材 9 年級數學