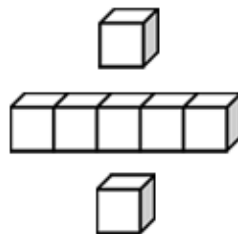


# 基本學習內容：SC-9-13-1

## 多面體的意義

### 【教師用】







基本學習內容：SC-9-13-1

**學習內容：**

**S-9-13 表面積與體積：**直角柱、直圓錐、正角錐的展開圖；

直角柱、直圓錐、正角錐的表面積；直角柱的體積。

**基本學習內容：**

SC-9-13-1 多面體的意義。

**基本學習表現：**

SCP-9-13-1-1 認識多面體、頂、面、邊、側面的意義。

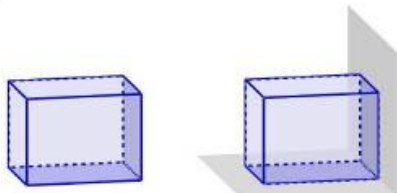
**概要說明：**

- 基本學習內容是 SC-5-7-1 的後續學習概念，故學生應該已經認識球、柱體與錐體。本基本學習內容幫助學生認識多面體。
- 角柱可以區分為直角柱及斜角柱二類。角柱的側面和上底及下底垂直，稱該角柱為直角柱，直角柱的側面是長方形。正角柱也是直角柱，如果直角柱的上底和下底都是正多邊形，稱這些直角柱為正角柱。例如上、下底為正五邊形的角柱稱為正五角柱。角柱的側面和上底及下底不垂直，稱該角柱為斜角柱，斜角柱的側面不是長方形 而是平行四邊形。本基本學習內容只討論直角柱，不討論斜角柱，稱直角柱為角柱。
- 類比角柱的命名方式，底為圓區域的柱體稱為圓柱。圓柱也區分為直圓柱和斜圓柱兩類，上、下兩個底面圓心的連線垂直於兩個底面，稱該圓柱為直圓柱，上、下兩個底面圓心的連線不垂直於兩個底面，稱該圓柱為斜圓柱。本基本學習內容只討論直圓柱，不討論斜圓柱，稱直圓柱為圓柱。
- 數學上透過底面多邊形區域的形狀來命名角錐，例如底面是三角形區域的錐體稱為三角錐，底面是五邊形區域的錐體稱為五角錐。數學上並沒有把角錐區分為直角錐和斜角錐，只有仿正角柱的方式定義正角錐，稱底面是正多邊形，且頂點到底面的垂線剛好經過底面正多邊形內切圓的圓心的 角錐為正角錐本基本學習內容只討論正角錐，稱正角錐為角錐。
- 底面為圓形的錐體稱為圓錐，和圓柱一樣，圓錐也可以區分為直圓錐和斜圓錐兩類，稱頂點到底面圓心的連線垂直於底面的圓錐為直圓錐，稱頂點到底面圓心的連線不垂直於底面的圓錐為斜圓錐。本基本學習內容只討論直圓錐，稱直圓錐為圓錐。

基本學習內容：SC-9-13-1 多面體的意義。

### 平面與平面的垂直

如圖一，長方體中相鄰的兩面都互相垂直，我們可以利用長方體來檢驗兩個平面是否互相垂直。如果兩個平面可同時與長方體的相鄰兩面緊密貼合，如圖二，則這兩個平面互相垂直。

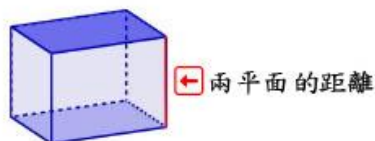


圖一

圖二

### 平面與平面的平行

當兩平面同時垂直於一條直線，稱此兩平面互相平行。兩平面互相平行時，會有很多條共同垂線，這些共同垂線被此兩平面截割下來的線段都等長，此長度稱為兩平面的距離。例如：長方體中的不相鄰兩面同時垂直於一條直線，所以這兩個面平行，如圖三。



圖三

### 直線與平面的垂直

我們利用三角板來檢查直線與平面是否垂直，將三角板的一股立在平面上，另一股靠在直線上，以直線為旋轉軸轉一圈，如果另一股都貼在平面上，就代表直線與平面垂直，如圖四。



圖四



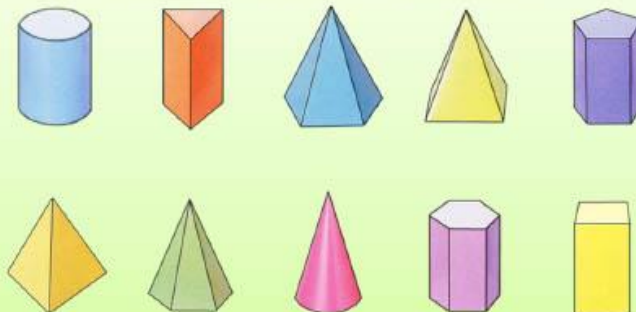
### 教材內容說明：

1. 本教材第 1 頁的教學重點是複習活動，幫助學生複習平面與平面的垂直、平面與平面的平行及直線與平面的垂直。
  - 建議教師幫助學生利用長方體檢驗平面與平面的垂直、平面與平面的平行及直線與平面垂直的關係。由於三角板是學生較容易取得的工具，也可以利用三角板來檢驗垂直，這裡說明用三角板來檢驗直線與平面的垂直。
  - 利用長方體檢驗平面與平面的平行時，建議教師向學生說明兩平面的距離的意義，以利之後的學習。

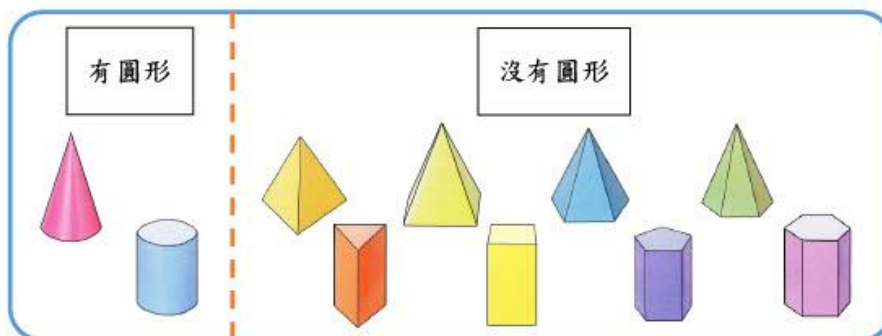
基本學習內容：SC-9-13-1 多面體的意義。

### ◎立體形體的分類

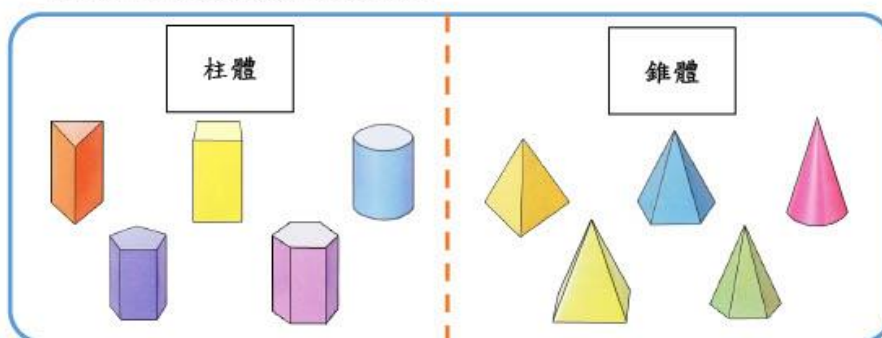
(1) 分分看，請將下面的形體分成 2 類，你會怎麼分呢？



解：【方法一】分成有圓形和沒有圓形 2 類



【方法二】分成柱體和椎體 2 類





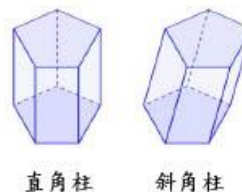
### 教材內容說明：

1. 本教材第 2 頁的教學重點是點是柱體、錐體的分類及命名活動。
2. 第(1)題給定 10 個立體形體，其中 5 個是柱體，5 個是錐體，要求學生將這些立體形體分成兩類，並嘗試說出分類的標準。
  - 學生的分類只要合理，教師都應該先接受，再引導學生將這些立體形體分成柱體和錐體兩類。
  - 例如：學生依顏色來分類，教師都應先肯定學生的分法，再說明題目要求只能分成兩類。
3. 學生可能的分類標準有下列兩種：
  - 第一種：側面和底面垂直，以及側面和底面不垂直兩類。
  - 第二種：上方是平面，以及上方是一點兩類。
  - 這裡只要求學生分類，不要求學生給分類後的立體形體命名。
  - 上面兩種分法的敘述是與教師溝通的，不是學生可能的說法。教師應儘量幫助學生用數學語言來描述分類的方法。

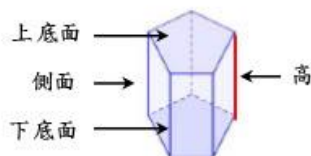
基本學習內容：SC-9-13-1 多面體的意義。

## ◎角柱

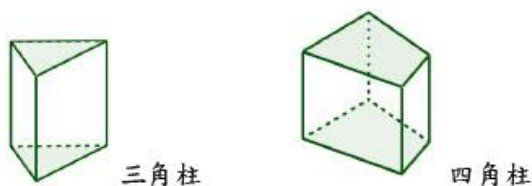
如圖，如果角柱的側面與上、下兩底面均互相垂直，稱為直角柱；如果有些側面與上、下兩底面不垂直，稱為斜角柱。本教材所討論的角柱都是直角柱，底下稱為角柱。



一個多面體的上底面與下底面是兩個全等的多邊形，其側面都是長方形，稱為角柱。如圖，角柱的上底面與下底面會互相平行，上底面與下底面之間的距離稱為角柱的高，角柱的側面與底面會互相垂直。角柱側面的邊會與上下底面垂直，故側面的邊長即為柱高。



如圖，底面為三角形的柱體稱為三角柱、底面為四邊形的柱體稱為四角柱、.....，以此類推。



底面為正  $n$  邊形的柱體稱為正  $n$  角柱。如圖，底面為正五邊形的柱體為正五角柱、底面為正六邊形的柱體為正六角柱。







**教材內容說明：**

1. 本教材第 3 頁的教學重點是幫助學生學習角柱及其相關名稱。
2. 本頁上半部為角柱的意義，說明角柱的面分成上底面、下底面和側面，並說明柱高。
3. 本頁下半部為角柱的例子，說明  $n$  角柱和正  $n$  角柱。
  - 建議教師試著讓學生比較  $n$  角柱和正  $n$  角柱的差異，並強調正  $n$  角柱的底面必須是正  $n$  邊形。



基本學習內容：SC-9-13-1 多面體的意義。

(2) 右圖為四角柱，  
請問四角柱有幾個頂點？幾條邊？幾個面？



解：【方法一】

<p>頂點： 上面 4 個，下面 4 個， 共 8 個頂點。</p>	<p>邊： 上面 4 條，側邊 4 條， 下面 4 條，共 12 條邊。</p>	<p>面： 側面 4 個，底面 2 個， 共 6 個面。</p>

【方法二】

四角柱的頂點都在上底面與下底面的多邊形頂點上，四邊形有 4 個頂點，  
所以頂點的個數為  $4 \times 2 = 8$ 。

四角柱的邊的位置分為三類：在上底面、下底面及側面。側面的每一條邊都會對應到上底面(或下底面)的一個頂點，所以側面的邊數和上底面(或下底面)的邊數相等，所以邊的個數為  $4 \times 3 = 12$ 。

四角柱的面有上底面、下底面和幾個側面，每一個側面和上底面(或下底面)都共用一個邊，所以側面的個數和上底面(或下底面)的邊數相等，所以面的個數為  $2 + 4 = 6$ 。

答：8 個頂點，12 條邊，6 個面



**教材內容說明：**

1. 本教材第 4～6 頁的教學重點是幫助學生學習角柱的頂點、邊和面的個數。

本頁教學重點為幫助學生建立角柱的頂點、邊和面的個數的關係。

2. 第(2)題給定四角柱，要求學生算出四角柱的頂點、邊和面的個數。

解題方法：

方法一：

將立體形體分成上面、下面來計算頂點的個數；

用上面、側面和下面來計算邊的個數；

用底面及側面來計算面的個數。

方法二：

用底面四邊形的頂點會分別對應到上、下底面的頂點來計算立體形體的頂點個數；

用底面四邊形的頂點會分別對應到上底面、側邊和下底面的邊來計算立體形體的邊個數；

用底面四邊形的邊數會對應到側邊的面數再加上上底面與下底面來算出面的個數。

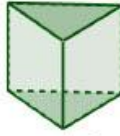
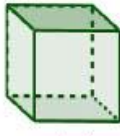
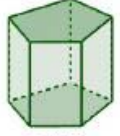
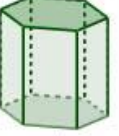
- 如果學生無法理解，教師可參閱 SC-5-7-1 的教材，或提供 SC-5-7-1 的教材讓學生練習。

基本學習內容：SC-9-13-1 多面體的意義。

(3) 觀察下列角柱各有幾個頂點、幾條邊和幾個面，並完成表格。

形體	三角柱	四角柱	五角柱	六角柱	$n$ 角柱
項目					
頂點個數					
邊的個數					
面的個數					

解：

形體	三角柱	四角柱	五角柱	六角柱	$n$ 角柱
項目					
頂點個數	$3 \times 2$	$4 \times 2$	$5 \times 2$	$6 \times 2$	$n \times 2$
邊的個數	$3 \times 3$	$4 \times 3$	$5 \times 3$	$6 \times 3$	$n \times 3$
面的個數	$3 + 2$	$4 + 2$	$5 + 2$	$6 + 2$	$n + 2$

$n$  角柱有  $2n$  個頂點， $3n$  條邊， $(n+2)$  個面。



(4) 請問十角柱有幾個頂點？幾條邊？幾個面？

解：十角柱的頂點個數為  $10 \times 2 = 20$ ，

邊的個數為  $10 \times 3 = 30$ ，

面的個數為  $10 + 2 = 12$ 。

答：20 個頂點，30 條邊，12 個面



### 教材內容說明：

1. 本教材第 4～6 頁的教學重點是幫助學生學習角柱的頂點、邊和面的個數。

本頁教學重點為幫助學生學習  $n$  角柱的頂點、邊和面的個數。

2. 第(3)題給定 5 種角柱，要求學生寫出這些角柱的頂點、邊和面的個數。

解題方法：

先觀察底面的多邊形形狀，如果是  $n$  角柱，底面是  $n$  邊形，上底面及下底面都有  $n$  個頂點，頂點的個數為  $n \times 2$ ；上底、下底及側面都有  $n$  條邊，邊的個數為  $n \times 3$ ；有  $n$  個長方形側面及上底面、下底面，面的個數為  $(n+2)$ 。

- 如果學生直接寫出頂點、邊及面的個數，教師應先接受，建議教師先引導學生用底面多邊形的個數來表示角柱的頂點、邊和面的個數，幫助學生建立公式。

3. 本頁教師提示重點為  $n$  角柱的頂點、邊和面的個數公式。

4. 第(4)題給定十角柱，要求學生利用公式計算出十角柱的頂點、邊和面的個數。

解題方法：

利用公式，得

十角柱的頂點個數為  $n \times 2 = 10 \times 2 = 20$ ，

邊的個數為  $n \times 3 = 10 \times 3 = 30$ ，

面的個數為  $n + 2 = 10 + 2 = 12$ 。



基本學習內容：SC-9-13-1 多面體的意義。



隨堂練習

請問十二角柱有幾個頂點？幾條邊？幾個面？

答：24 個頂點，36 條邊，14 個面

(5) 已知一個角柱有 24 條邊，請問此角柱為何？  
此角柱有幾個頂點？有幾個面？

解：假設此角柱為  $n$  角柱， $n$  角柱的邊數為  $3n$ ，得

$3n=24$ ， $n=8$ ，此角柱為八角柱。

頂點個數為  $8 \times 2 = 16$

面的個數為  $8 + 2 = 10$

答：八角柱，16 個頂點，10 個面



隨堂練習

已知一個角柱有 15 個面，請問此角柱為何？  
此角柱有幾個頂點？有幾條邊？

答：十三角柱，26 個頂點，39 條邊



### 教材內容說明：

1. 本教材第 4～6 頁的教學重點是幫助學生學習角柱的頂點、邊和面的個數。

本頁教學重點為幫助學生學習利用角柱的頂點、邊或面的個數解決問題。

2. 本頁上半部隨堂練習給定十二角柱，要求學生利用公式計算出十二角柱的頂點、邊和面的個數，評量學生是否具備利用公式解題的能力。
3. 第(5)題給定某角柱的邊的個數，要求學生找出該角柱，並寫出該角柱的頂點及面的個數。

解題方法：

假設該角柱為  $n$  角柱，得  $n$  角柱的邊數為  $3n$ ，算出  $n=8$ ，

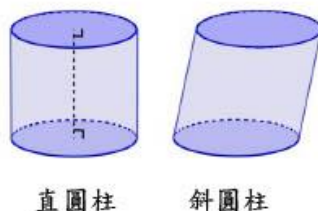
找出該角柱為八角柱，利用公式，再寫出八角柱的頂點和面的個數。

4. 本頁下半部隨堂練習給定某角柱的面的個數，要求學生找出該角柱，並寫出該角柱的頂點及邊的個數，評量學生是否具備利用公式找出角柱的能力。

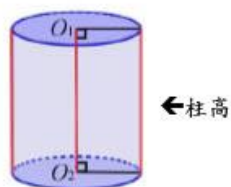
基本學習內容：SC-9-13-1 多面體的意義。

## ◎圓柱

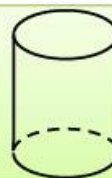
圓柱是上、下底面為等圓的柱體。如圖，兩底面圓心的連線與兩底面都垂直的圓柱稱為直圓柱，不垂直的稱為斜圓柱。本教材所討論的圓柱都是直圓柱，底下稱為圓柱。



圓柱的上底面與下底面是兩個等圓，上底面與下底面之間的距離稱為圓柱的高，因為兩底面圓心的連線會同時垂直於上、下底面，故圓柱的高等於兩底面圓心的連線長( $\overline{O_1O_2}$ )。



- (6) 右圖為一圓柱，已知圓柱的上底圓周長為  $8\pi$ ，請問下底圓的半徑是多少？



**解：**因為上底圓與下底圓是等圓，圓周長相等，

假設下(或上)底圓半徑為  $r$ ，

下底圓周長=上底圓周長，

$$2\pi r = 8\pi, r = 4,$$

下(或上)底圓半徑為 4。



答：4





**教材內容說明：**

1. 本教材第 7 頁的教學重點是幫助學生學習圓柱及其相關名稱。
2. 本頁上半部在定義圓柱，說明圓柱的上、下底面為等圓，上、下底面之間的距離為圓柱的高。
3. 第(6)題給定圓柱及其上底圓的周長，要求學生算出下底圓的半徑。

**解題方法：**

因為上底圓與下底圓是等圓，利用「下底圓周長＝上底圓周長」，算出圓的半徑。

基本學習內容：SC-9-13-1 多面體的意義。

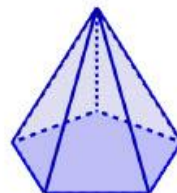
## ◎角錐

如圖，角錐是由一個多邊形底面和數個三角形側面所構成的立體形體。

如果底面是正  $n$  邊形，側面都是等腰三角形，稱為正  $n$  角錐。

本教材所討論的角錐都是正  $n$  角錐，底下稱為  $n$  角錐。

如圖為五角錐，它的底面是正五邊形，側面都是等腰三角形。






(7) 右圖為三角錐，

請問三角錐有幾個頂點？幾條邊？幾個面？



解：【方法一】

頂點： 上面 1 個，下面 3 個， 共 4 個頂點。	邊： 側邊 3 條，下面 3 條， 共 6 條邊。	面： 側面 3 個，底面 1 個， 共 4 個面。
		

【方法二】

三角錐的頂點在錐體頂端的頂點和底面多邊形的頂點上，三角形有 3 個頂點，所以頂點的個數為  $3+1=4$ 。

三角錐的邊的位置分為兩類：在底面及側面。

側面的每一條邊都會對應到底面的一個頂點，側面的邊數和底面的邊數相等，所以邊的個數為  $3 \times 2 = 6$ 。

三角錐的面有一個底面和幾個等腰三角形的側面，每一個側面和底面都共用一個邊，側面的個數和底面的邊數相等，所以面的個數為  $1+3=4$ 。

答：4 個頂點，6 條邊，4 個面



### 教材內容說明：

1. 本教材第 8～10 頁的教學重點是幫助學生學習角錐的頂點、邊和面的個數。

本頁教學重點為幫助學生建立角錐的頂點、邊和面的個數的關係。

2. 本頁上半部在說明角錐的意義。

3. 第(7)題給定三角錐，要求學生算出三角錐的頂點、邊和面的個數。

解題方法：

方法一：

將立體形體分成上面、下面來計算頂點的個數；

用側面和下面來計算邊的個數；

用底面及側面來計算面的個數。

方法二：

三角錐的頂點個數為底面三角形的 3 個頂點數和頂端的 1 個頂點，共有 4 個頂點；

三角錐的邊分成底面及側面來看，底面有 3 條邊，而底面的每個頂點都會對應到側面的每條邊，所以側面有 3 條邊，共有 6 條邊；

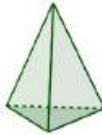
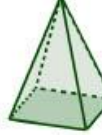
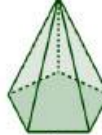
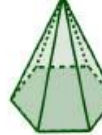
三角錐的面有 1 個底面，因為底面是三角形會有 3 個邊，對應到的側面個數會有 3 個等腰三角形的側面，共有 4 個面。

基本學習內容：SC-9-13-1 多面體的意義。

(8) 觀察下列角錐各有幾個頂點、幾條邊和幾個面，並完成表格。

形體					$n$ 角錐
項目	三角錐	四角錐	五角錐	六角錐	
頂點個數					
邊的個數					
面的個數					

解：

形體					$n$ 角錐
項目	三角錐	四角錐	五角錐	六角錐	
頂點個數	$3+1$	$4+1$	$5+1$	$6+1$	$n+1$
邊的個數	$3 \times 2$	$4 \times 2$	$5 \times 2$	$6 \times 2$	$n \times 2$
面的個數	$3+1$	$4+1$	$5+1$	$6+1$	$n+1$

$n$  角錐有  $(n+1)$  個頂點， $2n$  條邊， $(n+1)$  個面。



(9) 請問十角錐有幾個頂點？幾條邊？幾個面？

解：十角錐的頂點個數為  $10+1=11$ ，

邊的個數為  $10 \times 2=20$ ，

面的個數為  $10+1=11$ 。

答：11 個頂點，20 條邊，11 個面



### 教材內容說明：

1. 本教材第 8～10 頁的教學重點是幫助學生學習角錐的頂點、邊和面的個數。

本頁教學重點為幫助學生學習  $n$  角錐的頂點、邊和面的個數。

2. 第(8)題給定 5 種角錐，要求學生寫出這些角錐的頂點、邊和面的個數。

解題方法：

先觀察底面的多邊形形狀，如果是  $n$  角錐，底面是  $n$  邊形，就會有  $n$  個頂點，再加上頂端的 1 個頂點，頂點的個數為  $(n+1)$ ；下底和側面都有  $n$  條邊，邊的個數為  $n \times 2$ ；有  $n$  個等腰三角形側面和 1 個底面，面的個數為  $(n+1)$ 。

● 如果學生直接寫出頂點、邊及面的個數，教師應先接受，建議教師先引導學生用底面多邊形的個數來表示角錐的頂點、邊和面的個數，幫助學生建立公式。

3. 本頁重點框在說明  $n$  角錐的頂點、邊和面的個數公式。
4. 第(9)題給定十角錐，要求學生利用公式計算出十角錐的頂點、邊和面的個數。

解題方法：

利用公式，得

十角錐的頂點個數為  $n+1=10+1=11$ ，

邊的個數為  $n \times 2=10 \times 2=20$ ，

面的個數為  $n+1=10+1=11$ 。



基本學習內容：SC-9-13-1 多面體的意義。



### 隨堂練習

請問十二角錐有幾個頂點？幾條邊？幾個面？

答：13 個頂點，24 條邊，13 個面

(10) 已知一個角錐有 8 個頂點，請問此角錐為何？

此角錐有幾條邊？有幾個面？

解：假設此角錐為  $n$  角錐， $n$  角錐的頂點數為  $n+1$ ，得

$n+1=8$ ， $n=7$ ，此角錐為七角錐。

邊的個數為  $7 \times 2 = 14$

面的個數為  $7+1=8$

答：七角錐，14 條邊，8 個面



### 隨堂練習

已知一個角錐有 9 個面，請問此角錐為何？

此角錐有幾個頂點？有幾條邊？

答：八角錐，9 個頂點，16 條邊



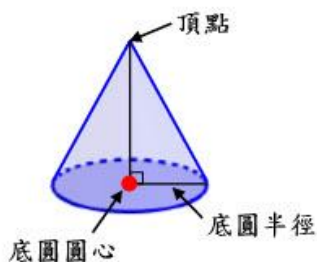
### 教材內容說明：

1. 本教材第 8～10 頁的教學重點是幫助學生學習角錐的頂點、邊和面的個數。  
本頁教學重點為幫助學生學習利用角錐的頂點、邊或面的個數解決問題。
2. 本頁上半部隨堂練習給定十二角錐，要求學生利用公式計算出十二角錐的頂點、邊和面的個數，評量學生是否具備利用公式解題的能力。
3. 第(10)題給定某角錐的頂點的個數，要求學生找出該角錐，並寫出該角錐的邊及面的個數。  
假設該角錐為  $n$  角錐，得  $n$  角錐的頂點數為  $(n+1)$ ，算出  $n=7$ ，  
找出該角柱為七角錐，利用公式，再寫出七角錐的頂點和面的個數。
4. 本頁下半部隨堂練習給定某角錐的面的個數，要求學生找出該角錐，並寫出該角錐的頂點及邊的個數，評量學生是否具備利用公式找出角錐的能力。

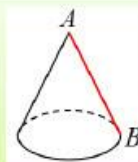
基本學習內容：SC-9-13-1 多面體的意義。

### ◎圓錐

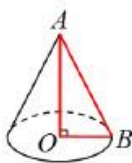
圓錐有一個圓形的底面和一個頂點。如果圓錐的頂點與底面圓心的連線垂直於底面，稱為直圓錐；如果沒有垂直就是斜圓錐。本教材所討論的圓錐都是直圓錐，底下稱為圓錐。



- (11) 右圖為一圓錐，已知圓錐頂點到底圓圓心的距離為 8，底圓半徑為 6，請問  $\overline{AB} = ?$



解：如圖，



圓錐頂點到底圓圓心( $\overline{AO}$ )、底圓半徑( $\overline{BO}$ )與 $\overline{AB}$ 圍成一個直角三角形，其中直角三角形的兩股分別為 $\overline{AO}$ 和 $\overline{BO}$ ，斜邊為 $\overline{AB}$ ，根據畢氏定理，  

$$\overline{AB}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{BO}^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$$
，  
 得 $\overline{AB} = 10$ 。

答：10





**教材內容說明：**

1. 本教材第 11 頁的教學重點是幫助學生學習圓錐及其相關名稱。
2. 本頁上半部在定義圓錐，說明圓錐的頂點與底面圓心的連線垂直於底面。
3. 第(11)題給定圓錐、圓錐頂點到底圓圓心的距離及底圓半徑，要求學生算出圖中  $\overline{AB}$  的長度。

**解題方法：**

先畫出圓錐頂點到底圓圓心的連線和底圓半徑，發現直角三角形後，利用畢氏定理，算出  $\overline{AB}$  的長度。



基本學習內容：SC-9-13-1 多面體的意義。



小試身手

1. 七角柱有幾個頂點？幾條邊？幾個面？

答：14 個頂點，21 條邊，9 個面

2. 已知一個角柱有 20 個面，請問此角柱為何？

答：十八角柱

3. 已知圓柱的上底圓面積為  $16\pi$ ，請問下底圓的周長是多少？

答： $8\pi$

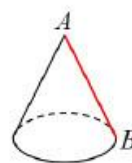
4. 十三角錐有幾個頂點？幾條邊？幾個面？

答：14 個頂點，26 條邊，14 個面

5. 已知一個角錐有 15 個面，請問此角錐為何？

答：十四角錐

6. 右圖為一圓錐，已知圓錐頂點到底圓圓心的距離為 12，  
底圓直徑為 10，請問  $\overline{AB} = ?$



答：13



**教材內容說明：**

1. 本教材第 12 頁為小試身手。
2. 第 1 題評量學生是否理解角柱的頂點、邊和面的個數。
3. 第 2 題評量學生是否能利用角柱的頂點、邊和面的個數，反求該角柱。
4. 第 3 題評量學生是否理解圓柱的上下底圓為等圓。
5. 第 4 題評量學生是否理解角錐的頂點、邊和面的個數。
6. 第 5 題評量學生是否能利用角錐的頂點、邊和面的個數，反求該角錐。
7. 第 6 題評量學生是否理解圓錐頂點到底圓圓心連線垂直底圓半徑，並能利用畢氏定理解決問題。



教育部國民及學前教育署 編

# 國民中學

# 9 年級數學

學生學習扶助教材

