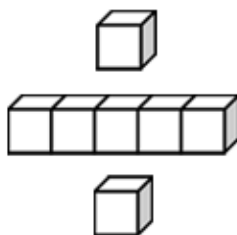


基本學習內容：SC-9-1-1

多邊形相似的意義

班級：_____

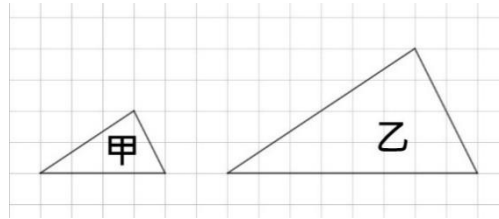
姓名：_____



◎相似圖形的意義

圖形經由放大或縮小後，雖然大小和原圖形不同，但其形狀是相同的。

下圖為甲、乙兩個三角形，



觀察圖形，我們可以發現這兩個三角形的形狀相同，但大小不同。

(1) 乙圖的對應邊長是甲圖的對應邊長的 2 倍，且對應角相等，

稱乙圖是甲圖的 2 倍放大圖。

(2) 甲圖的對應邊長是乙圖的對應邊長的 $\frac{1}{2}$ 倍，且對應角相等，

稱甲圖是乙圖的 $\frac{1}{2}$ 倍縮小圖。

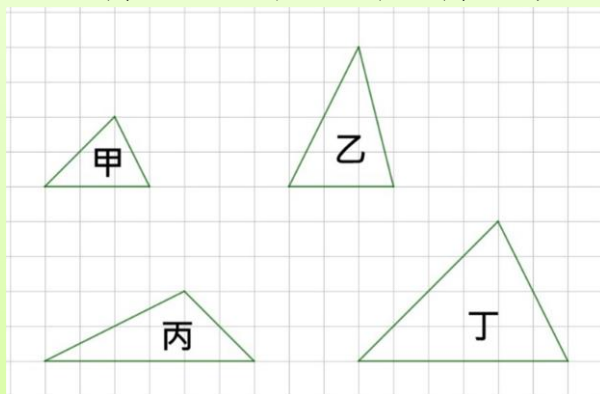
我們稱甲圖和乙圖為相似圖形。



(1) 如圖，有甲、乙、丙、丁 4 個三角形，請利用附件一，剪下甲三角形，檢查其它三角形，並回答問題：

①在乙、丙、丁 3 個三角形中，何者是甲三角形的 2 倍放大圖？

②在乙、丙、丁 3 個三角形中，何者和甲三角形為相似圖形？



解：

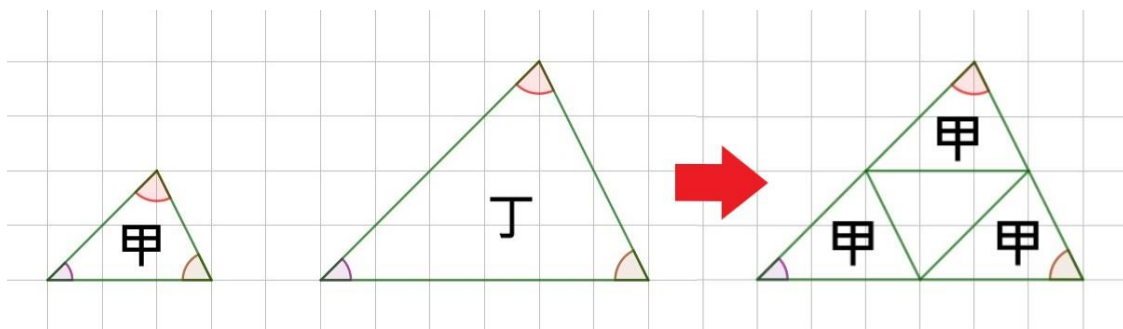
①甲三角形的底邊長為 3，它的 2 倍放大圖的對應邊長為 6；

甲三角形邊長為 $2\sqrt{2}$ 的邊，它的 2 倍放大圖的對應邊長為 $4\sqrt{2}$ ；

甲三角形邊長為 $\sqrt{5}$ 的邊，它的 2 倍放大圖的對應邊長為 $2\sqrt{5}$ 。

符合這些條件的只有丁三角形，也就是丁三角形的邊長都是甲三角形的邊長的 2 倍。

剪下甲三角形，比比看，發現丁三角形的 3 個角與甲三角形的 3 個角都相等，也可以發現丁三角形的邊長都是甲三角形的邊長的 2 倍，如圖。



所以，丁三角形是甲三角形的 2 倍放大圖。

②因為丁三角形是甲三角形的 2 倍放大圖，

所以，丁三角形和甲三角形為相似圖形。

答：①丁 ②丁

- (2) 右圖是邊長為 2 的正三角形，
 將它放大為 4 倍後得到一個新圖形，
 請問：①新圖形的邊長是多少？
 ②新圖形的每一個內角度數是多少？
 ③新圖形是正三角形嗎？

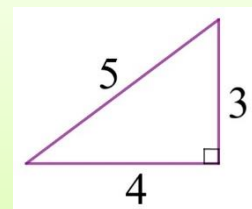


解：

- ①將圖形放大為 4 倍後，它的邊長會變為原來的邊長的 4 倍，
 又正三角形的三邊等長，新圖形的三邊長都是 $2 \times 4 = 8$ 。
 ②將圖形放大後，它的內角度數不變，
 又正三角形的每一個內角為 60° ，新圖形的每一個內角也都是 60° 。
 ③因為新圖形三邊等長，所以新圖形是正三角形。

答：①8，② 60° ，③是

- (3) 右圖是邊長為 3、4、5 的直角三角形，
 將它縮小為 0.6 倍後得到一個新圖形，
 請問：①新圖形的邊長分別是多少？
 ②新圖形的內角度數會改變嗎？
 ③新圖形是直角三角形嗎？



解：

- ①將圖形縮小為 0.6 倍後，它的邊長會變為原來的邊長的 0.6 倍，
 新圖形的邊長分別為 $3 \times 0.6 = 1.8$ 、 $4 \times 0.6 = 2.4$ 、 $5 \times 0.6 = 3$ 。
 ②將圖形縮小後，它的內角度數不變。
 ③原圖形有一個角是直角，因為對應角相等，
 此直角的對應角也是直角，所以新圖形也是直角三角形。

答：①1.8、2.4、3，②不會改變，③是

如圖，在紙上畫一個三角形，拿去影印放大為 2 倍後，印出來的圖形是三角形，新三角形與原三角形是相似圖形，我們知道新三角形的邊長都是原三角形的邊長的 2 倍，即對應邊成比例，且這兩個三角形的對應角角度不會改變，即對應角相等。



設 $k > 0$ ，當一個圖形縮放為原來的 k 倍時，新圖形的邊長都是原圖形的邊長的 k 倍，代表原圖形與新圖形的對應邊長比為 $1:k$ ，即對應邊成比例。原圖形與新圖形的對應角不會改變，即對應角相等。我們稱新圖形與原圖形為相似圖形。

若兩個圖形為相似圖形，則這兩個圖形的對應邊成比例、對應角相等。

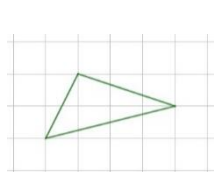


在兩個全等三角形中，可以將其中一個三角形經由旋轉或翻轉後，與另一個三角形完全疊合。同樣地，兩個相似三角形，若將其中一個三角形經由旋轉或翻轉後，這兩個三角形還是相似三角形。

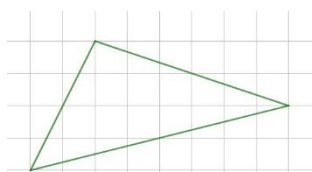
例如：將圖一放大為 2 倍得到圖二，得圖一和圖二為相似圖形；

將圖二旋轉 180° 得到圖三，因圖二和圖三全等，得圖一和圖三也會相似；

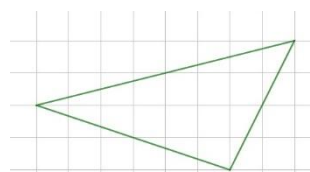
將圖二左右翻轉得到圖四，因圖二和圖四全等，得圖一和圖四也會相似。



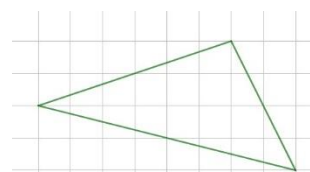
圖一



圖二

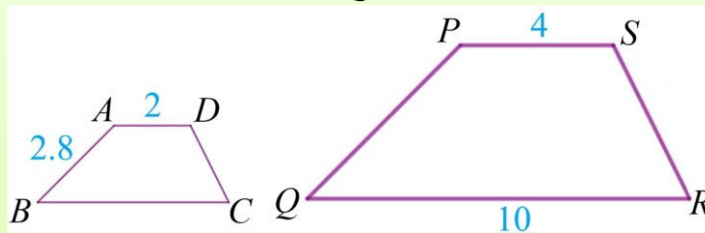


圖三



圖四

- (4) 如圖，四邊形 $ABCD$ 和四邊形 $PQRS$ 相似，
其中 A 、 B 、 C 、 D 分別對應到 P 、 Q 、 R 、 S ，



已知 $\overline{AB} = 2.8$ ， $\overline{AD} = 2$ ， $\overline{PS} = 4$ ， $\overline{QR} = 10$ ，
請問 \overline{BC} 和 \overline{PQ} 的長度分別是多少？

解：四邊形 $ABCD$ 和四邊形 $PQRS$ 相似，

這兩個四邊形的對應邊成比例、對應角相等。

\overline{AD} 的對應邊是 \overline{PS} ，且 $\overline{AD} : \overline{PS} = 2 : 4 = 1 : 2$

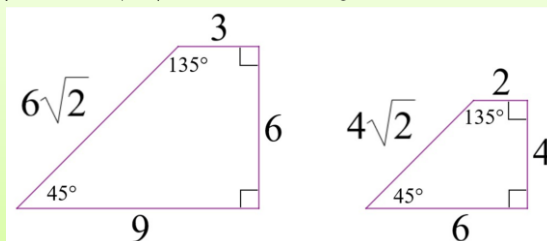
得四邊形 $ABCD$ 和四邊形 $PQRS$ 的邊長比為 $1 : 2$

\overline{BC} 的對應邊是 \overline{QR} ，得 $\overline{BC} : \overline{QR} = \overline{BC} : 10 = 1 : 2$ ， $\overline{BC} = 5$

\overline{PQ} 的對應邊是 \overline{AB} ，得 $\overline{AB} : \overline{PQ} = 2.8 : \overline{PQ} = 1 : 2$ ， $\overline{PQ} = 5.6$

答： $\overline{BC} = 5$ ， $\overline{PQ} = 5.6$

- (5) 根據圖中的邊長和角度，判斷這兩個四邊形是否相似？

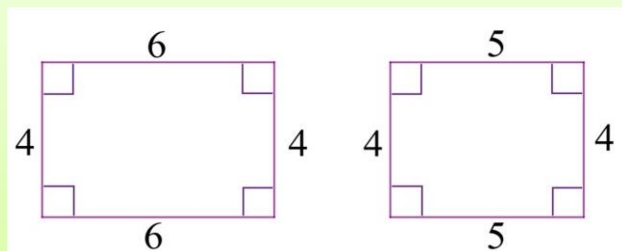


解：大四邊形的邊長：小四邊形的邊長 $= 3 : 2$ ，即對應邊成比例，
且大四邊形和小四邊形的對應角相等，
所以這兩個四邊形相似。

答：相似



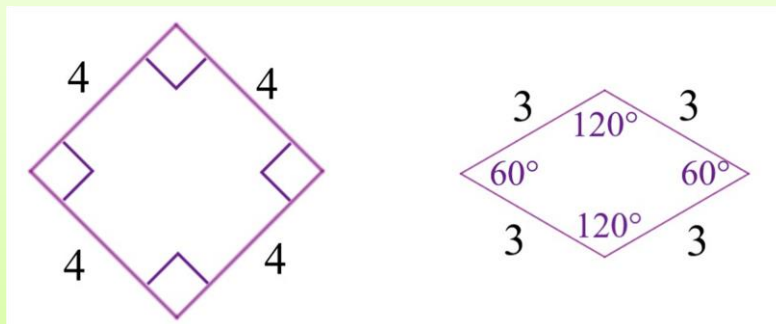
(6) 下圖為兩個長方形，它們的內角都是直角，也就是對應角都相等，請問這兩個長方形會相似嗎？



解： 這兩個長方形的長邊比為 $6:5$ ，短邊比為 $4:4=1:1$ ，
這兩個比不相等，代表這兩個長方形的對應邊不成比例，
所以這兩個長方形不相似。

答：不相似

(7) 下圖為兩個菱形，一個菱形的邊長都是 4，另一個菱形的邊長都是 3，也就是對應邊成比例，請問這兩個菱形會相似嗎？



解： 這兩個菱形的 4 個角度無法對應相等，
所以這兩個菱形不相似。

答：不相似



(8) 已知甲圖和乙圖相似，乙圖和丙圖相似，請問甲圖和丙圖是否相似？

解：甲圖和乙圖相似，代表甲圖的對應角等於乙圖的對應角；

丙圖和乙圖也相似，代表丙圖的對應角也等於乙圖的對應角；

所以，甲圖的對應角等於丙圖的對應角。

設甲圖是乙圖的 a 倍縮放圖，所以

$$\text{甲圖對應邊長} : \text{乙圖對應邊長} = a : 1,$$

設丙圖是乙圖的 b 倍縮放圖，所以

$$\text{丙圖對應邊長} : \text{乙圖對應邊長} = b : 1$$

也就是

$$\text{乙圖對應邊長} : \text{丙圖對應邊長} = 1 : b$$

得到

$$\text{甲圖對應邊長} : \text{乙圖對應邊長} : \text{丙圖對應邊長} = a : 1 : b$$

所以

$$\text{甲圖對應邊長} : \text{丙圖對應邊長} = a : b$$

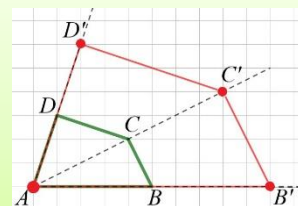
即甲圖和丙圖的對應邊成比例。

所以，甲圖和丙圖為相似圖形。

答：是



- (9) 如圖，在四邊形 $ABCD$ 中，以 A 點為縮放中心，每個方向的長度都放大為 2 倍，得到四邊形 $AB'C'D'$ 。請問四邊形 $ABCD$ 和四邊形 $AB'C'D'$ 是否相似？



解：以 A 點為縮放中心，每個方向的長度都放大為 2 倍。

- ① 沿著 \overline{AB} 方向放大為 2 倍，得 $\overline{AB'} = 2\overline{AB}$ ，
 - ② 沿著 \overline{AD} 方向放大為 2 倍，得 $\overline{AD'} = 2\overline{AD}$ ，
 - ③ 連 \overline{AC} ，沿著 \overline{AC} 方向放大為 2 倍，得 $\overline{AC'} = 2\overline{AC}$ ，
- 在 $\triangle AC'D'$ 中，因為

$$\overline{AD} : \overline{AD'} = 1 : 2$$

$$\overline{AC} : \overline{AC'} = 1 : 2$$

所以， $\overline{AD} : \overline{AD'} = \overline{AC} : \overline{AC'}$ ，
得 $\overline{CD} \parallel \overline{C'D'}$ ，且 $\overline{CD} : \overline{C'D'} = 1 : 2$ 。

同理，在 $\triangle AB'C'$ 中，因為 $\overline{AB} : \overline{AB'} = \overline{AC} : \overline{AC'}$ ，
得 $\overline{BC} \parallel \overline{B'C'}$ ，且 $\overline{BC} : \overline{B'C'} = 1 : 2$ 。

故 $\overline{AB} : \overline{AB'} = \overline{BC} : \overline{B'C'} = \overline{CD} : \overline{C'D'} = \overline{AD} : \overline{AD'}$ ，

即四邊形 $ABCD$ 和四邊形 $AB'C'D'$ 的對應邊成比例。

在 $\triangle AC'D'$ 中，因為 $\overline{CD} \parallel \overline{C'D'}$ ，

所以 $\angle ADC = \angle AD'C'$ 、 $\angle 1 = \angle 2$ (同位角相等)。

在 $\triangle AB'C'$ 中，因為 $\overline{BC} \parallel \overline{B'C'}$ ，

所以 $\angle ABC = \angle AB'C'$ 、 $\angle 3 = \angle 4$ (同位角相等)。

又 $\angle 1 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 4$ ，得 $\angle C = \angle C'$ ，

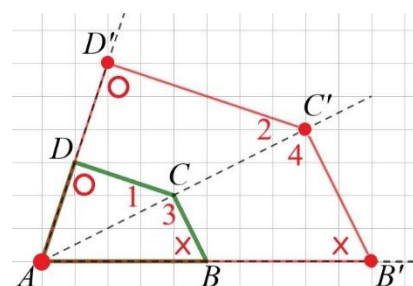
故 $\angle A = \angle A'$ ， $\angle B = \angle B'$ ， $\angle C = \angle C'$ ， $\angle D = \angle D'$ ，

即四邊形 $ABCD$ 和四邊形 $AB'C'D'$ 的對應角相等。

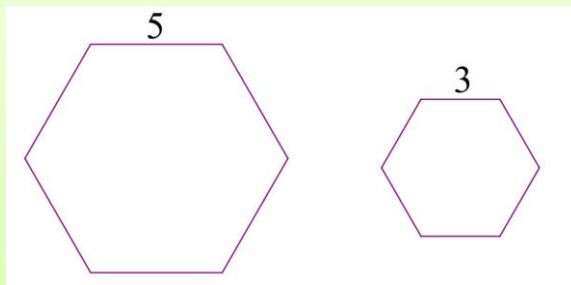
因為四邊形 $ABCD$ 和四邊形 $AB'C'D'$ 的對應邊成比例、對應角相等，

所以四邊形 $ABCD$ 和四邊形 $AB'C'D'$ 相似。

答：相似



- (10) ①下圖為 2 個正六邊形，一個正六邊形的邊長是 5，另一個正六邊形的邊長是 3，請問這兩個正六邊形是否相似？



- ②任意兩個正六邊形是否相似？

解：正六邊形的每一個邊都等長，每一個內角都是 $\frac{(6-2) \times 180^\circ}{4} = 120^\circ$ 。

①大正六邊形的邊長：小正六邊形的邊長 = 5 : 3，即對應邊成比例，
大正六邊形和小正六邊形的每一個內角都是 120° ，即對應角相等，
所以，這兩個正六邊形相似。

②設兩個正六邊形的邊長分別為 a 、 b ，
兩個正六邊形的邊長比為 $a : b$ ，即對應邊成比例，
兩個正六邊形的內角都是 120° ，即對應角相等，
所以，任意兩個正六邊形相似。

答：①是，②是。

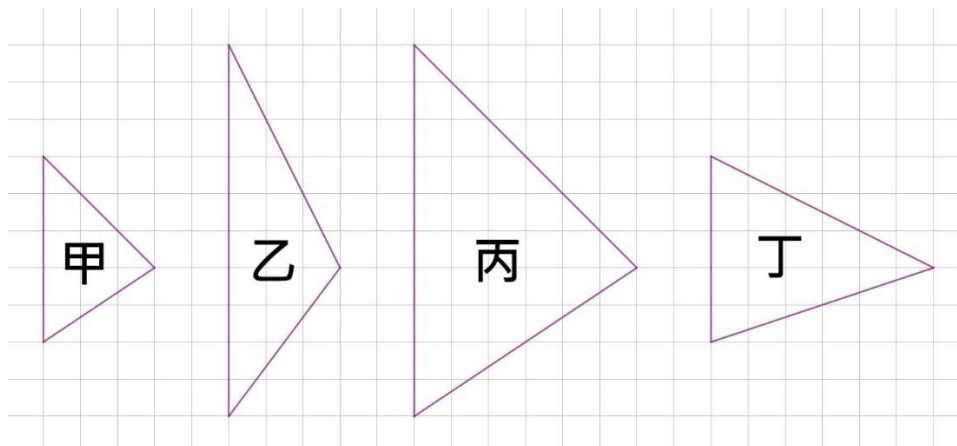
任意兩個正 n 邊形，因為對應角皆相等，且對應邊長皆成比例，
故這兩正 n 邊形會相似。





小試身手

1. 如圖，有甲、乙、丙、丁 4 個三角形，哪一個圖形和甲圖形為相似圖形？



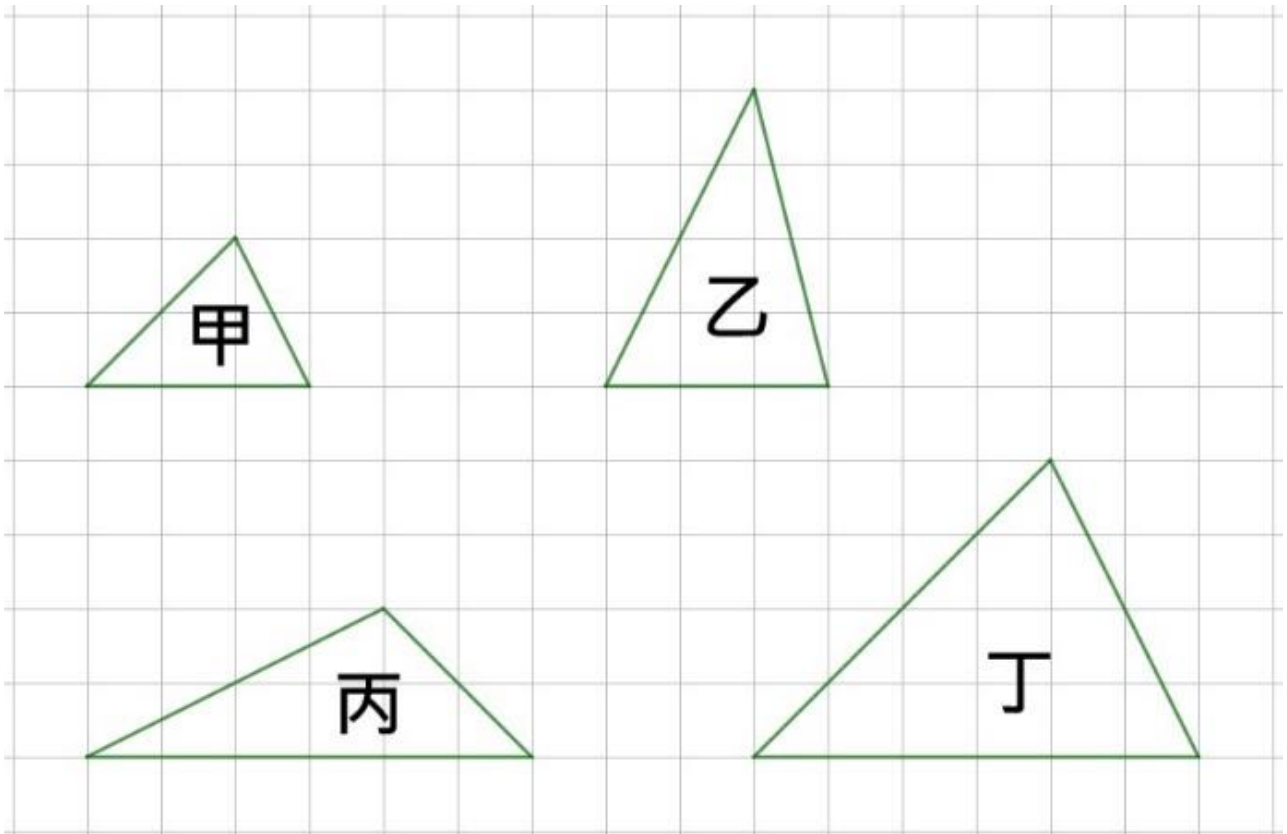
2. 已知四邊形 $ABCD$ 和四邊形 $EFGH$ 相似，
其中 A 、 B 、 C 、 D 分別是 E 、 F 、 G 、 H 的對應點，
如果 $\overline{BC} = 4$ ， $\overline{CD} = 6$ ， $\overline{EF} = 6$ ， $\overline{FG} = 12$ ，
請問： $\overline{AB} = ?$ $\overline{GH} = ?$

3. (1)請問兩個內角都是 108° 的五邊形是否相似？
(2)請問兩個邊長都是 6 的六邊形是否相似？
(3)請問兩個正八邊形是否相似？



基本學習內容：SC-9-1-1

附件一





教育部國民及學前教育署 編

國民中學

學生學習扶助教材

9 年級數學

