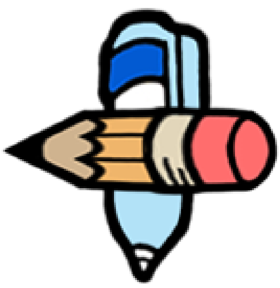
基本學習內容：SC-9-2-2

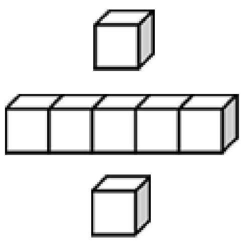
相似三角形對應面積之比

為其對應邊長平方之比

班級：________________

姓名：________________

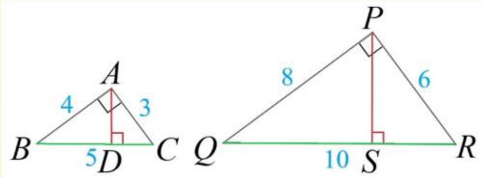


教育部國民及學前教育署 編

中華民國 113 年 8 月

(1) 如圖，$\triangle ABC \sim \triangle PQR$，$A$、$B$、$C$ 的對應點分別是 P、Q、R，其中 $\overline{AD}$ 是 $\overline{BC}$ 邊上的高，$\overline{PS}$ 是 $\overline{QR}$ 邊上的高。



請問：①求 $\overline{AD}$ 和 $\overline{PS}$ 的長？

② $\overline{BC}:\overline{QR}$ 和 $\overline{AD}:\overline{PS}$ 是否相等？

解：

① 因為 $\overline{AD}$、$\overline{PS}$ 都是直角三角形斜邊上的高，

直角三角形斜邊上的高 $=\dfrac{\text{兩股乘積}}{\text{斜邊}}$

$$\overline{AD}=\frac{3\times4}{5}=\frac{12}{5}$$

$$\overline{PS}=\frac{6\times8}{10}=\frac{48}{10}=\frac{24}{5}$$

② $\overline{BC}:\overline{QR}=5:10=1:2$

$$\overline{AD}:\overline{PS}=\frac{12}{5}:\frac{24}{5}=1:2$$

所以，$\overline{BC}:\overline{QR}=\overline{AD}:\overline{PS}$

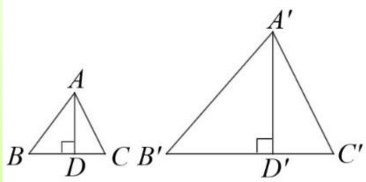
答：① $\overline{AD}=\dfrac{12}{5}$、$\overline{PS}=\dfrac{24}{5}$，②是

(2) 如圖，已知$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$，$A$、$B$、$C$ 的對應點分別是 A'、B'、C'，

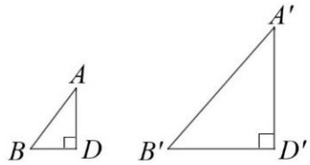
$\overline{AD} \perp \overline{BC}$ 於 D 點，$\overline{A'D'} \perp \overline{B'C'}$ 於 D'點，

請問：① $\triangle ABD$ 與$\triangle A'B'D'$是否相似？

② $\overline{AD}$ ：$\overline{A'D'}$ 和 $\overline{AB}$ ：$\overline{A'B'}$ 是否相等？



解： ① 如圖，



在$\triangle ABD$ 和$\triangle A'B'D'$中，

因為$\angle B = \angle B'$ ($\because \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$)

$\angle ADB = \angle A'D'B' = 90°$ ($\because \overline{AD} \perp \overline{BC}$ 且 $\overline{A'D'} \perp \overline{B'C'}$)

因為兩個三角形的兩組對應角相等，

由 AA 相似性質，$\triangle ABD \sim \triangle A'B'D'$。

② 因為$\triangle ABD \sim \triangle A'B'D'$，$\triangle ABD$ 與$\triangle A'B'D'$的對應邊成比例，

得 $\overline{AD}$ ：$\overline{A'D'} = \overline{AB}$ ：$\overline{A'B'}$

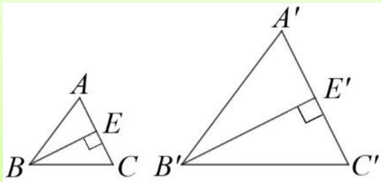
答：①是，②是

(3) 如圖，已知$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$，$A$、$B$、$C$ 的對應點分別是 A'、B'、C'，

$\overline{BE} \perp \overline{AC}$ 於 E 點，$\overline{B'E'} \perp \overline{A'C'}$ 於 E'點，

問題：① $\triangle BCE$ 與$\triangle B'C'E'$是否相似？

② $\overline{BE}$ ：$\overline{B'E'}$ 和 $\overline{AC}$ ：$\overline{A'C'}$ 是否相等？



解： ① 在$\triangle BCE$ 和$\triangle B'C'E'$中，

因為$\angle C = \angle C'$，$\angle BEC = \angle B'E'C' = 90°$

由 AA 相似性質，$\triangle BCE \sim \triangle B'C'E'$。

② $\triangle BCE \sim \triangle B'C'E'$，$\triangle BCE$ 與$\triangle B'C'E'$的對應邊成比例，

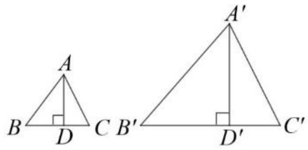
得 $\overline{BE}$ ：$\overline{B'E'} = \overline{BC}$ ：$\overline{B'C'}$

又$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$，$\overline{BC}$ ：$\overline{B'C'} = \overline{AC}$ ：$\overline{A'C'}$

得 $\overline{BE}$ ：$\overline{B'E'} = \overline{AC}$ ：$\overline{A'C'}$

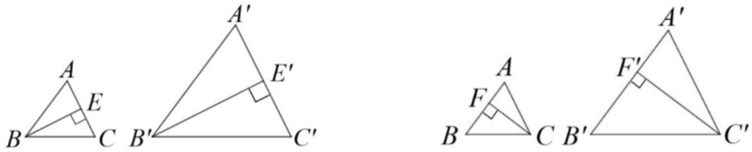
答：①是，②是

如圖，$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$，



其中 $\overline{AD}$ 是 $\overline{BC}$ 邊上的高，$\overline{A'D'}$ 是 $\overline{B'C'}$ 邊上的高，

得 $\overline{AB} : \overline{A'B'} = \overline{AC} : \overline{A'C'} = \overline{BC} : \overline{B'C'} = \overline{AD} : \overline{A'D'}$。



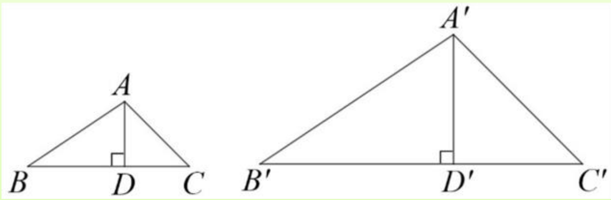
如果 $\overline{BE}$ 是 $\overline{AC}$ 邊上的高，$\overline{B'E'}$ 是 $\overline{A'C'}$ 邊上的高，

得$\triangle ABC$ 的對應邊長：$\triangle A'B'C'$的對應邊長$= \overline{BE} : \overline{B'E'}$。

如果 $\overline{CF}$ 是 $\overline{AB}$ 邊上的高，$\overline{C'F'}$ 是 $\overline{A'B'}$ 邊上的高，

得$\triangle ABC$ 的對應邊長：$\triangle A'B'C'$的對應邊長$= \overline{CF} : \overline{C'F'}$。

(4) 如圖，$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$，$A$、$B$、$C$ 的對應點分別是 A'、B'、C'，
其中 $\overline{AD}$ 是 $\overline{BC}$ 邊上的高，$\overline{A'D'}$ 是 $\overline{B'C'}$ 邊上的高，



如果 $\overline{BC}=12$，$\overline{B'C'}=18$，$\overline{AD}=4$，

請問：① $\overline{AD} : \overline{A'D'} = ?$ ② $\overline{A'D'} = ?$

解： ①因為$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$，兩個相似三角形對應邊長之比等於對應高之比，

得 $\overline{AD} : \overline{A'D'} = \overline{BC} : \overline{B'C'} = 12 : 18 = 2 : 3$。

② $\overline{AD} : \overline{A'D'} = \overline{BC} : \overline{B'C'}$

$4 : \overline{A'D'} = 2 : 3$

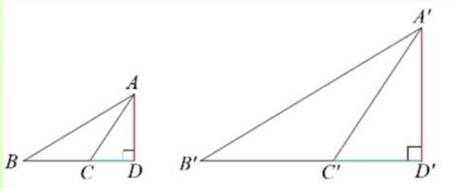
$2 \times \overline{A'D'} = 4 \times 3$

$\overline{A'D'} = 6$

答：6

(5) 如圖，已知$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$，$A$、$B$、$C$ 的對應點分別是 A'、B'、C'，

其中 $\overline{AD}$ 是 $\overline{BC}$ 邊上的高，$\overline{A'D'}$ 是 $\overline{B'C'}$ 邊上的高，



請問：① $\triangle ABD$ 與$\triangle A'B'D'$是否相似？

② $\overline{AD}$ ：$\overline{A'D'}$ 和 $\overline{BC}$ ：$\overline{B'C'}$ 是否相等？

解： ① 如圖，在$\triangle ABD$ 和$\triangle A'B'D'$中，

因為$\angle B = \angle B'$ ($\because \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$)

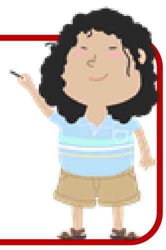
$\angle ADB = \angle A'D'B' = 90°$ ($\because \overline{AD} \perp \overline{BC}$ 且 $\overline{A'D'} \perp \overline{B'C'}$)

由 AA 相似性質，$\triangle ABD \sim \triangle A'B'D'$

② 因為$\triangle ABD \sim \triangle A'B'D'$，

$\overline{AD}$ ：$\overline{A'D'} = \overline{AB}$ ：$\overline{A'B'}$ ，又$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$，

得 $\overline{AD}$ ：$\overline{A'D'} = \overline{BC}$ ：$\overline{B'C'}$

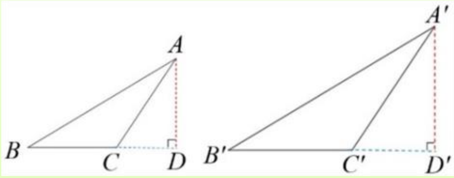


兩個相似三角形，不管高在三角形內部或外部，

對應邊之比等於對應高之比。

(6) 如圖，已知△ABC～△$A'B'C'$，A、B、C 的對應點分別是 A'、B'、C'，

其中 $\overline{AD}$ 是 $\overline{BC}$ 邊上的高，$\overline{A'D'}$ 是 $\overline{B'C'}$ 邊上的高，



如果 $\overline{BC}=16$，$\overline{B'C'}=24$，$\overline{AD}=12$，

請問：① $\overline{AD}:\overline{A'D'}=$？ ② $\overline{A'D'}=$？

解： ①因為△ABC～△$A'B'C'$，兩個相似三角形對應邊長之比等於對應高之比，

得 $\overline{AD}:\overline{A'D'}=\overline{BC}:\overline{B'C'}=16:24=2:3$。

② $\overline{AD}:\overline{A'D'}=\overline{BC}:\overline{B'C'}$

$12:\overline{A'D'}=2:3$

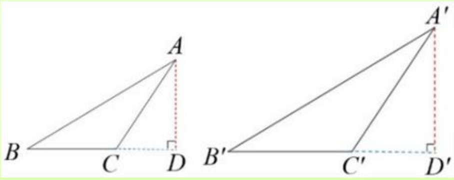
$2\times\overline{A'D'}=12\times3$

$\overline{A'D'}=18$

答：18

(7) 如圖，已知△ABC～△$A'B'C'$，A、B、C 的對應點分別是 A'、B'、C'，

其中 $\overline{AD}$ 是 $\overline{BC}$ 邊上的高，$\overline{A'D'}$ 是 $\overline{B'C'}$ 邊上的高，



如果 $\overline{AB}=8$，$\overline{A'B'}=10$，$\overline{AD}=20$，請問 $\overline{A'D'}=$？

解： 因為△ABC～△$A'B'C'$，兩個相似三角形對應邊長之比等於對應高之比，

得 $\overline{AD}:\overline{A'D'}=\overline{AB}:\overline{A'B'}$

$20:\overline{A'D'}=8:10$

$8\times\overline{A'D'}=20\times10$

$\overline{A'D'}=25$

答：25

(8) 已知△ABC～△$A'B'C'$，A、B、C 的對應點分別是 A'、B'、C'，
其中 $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ 於 D 點，$\overline{A'D'} \perp \overline{B'C'}$ 於 D'點，
如果 $\overline{B'C'}=10$，$\overline{AD}=3$，$\overline{A'D'}=5$
請問：① $\overline{BC}:\overline{B'C'}=$？ ② $\overline{BC}=$？

解： ①因為△ABC～△$A'B'C'$，兩個相似三角形對應邊長之比等於對應高之比，
得 $\overline{BC}:\overline{B'C'}=\overline{AD}:\overline{A'D'}=3:5$。

② $\overline{BC}:\overline{B'C'}=\overline{AD}:\overline{A'D'}$

$\overline{BC}:10=3:5$

$5\times\overline{BC}=10\times3$

$\overline{BC}=6$

答：6

(9) 已知△ABC～△$A'B'C'$，A、B、C 的對應點分別是 A'、B'、C'，
其中 $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ 於 D 點，$\overline{A'D'} \perp \overline{B'C'}$ 於 D'點，
如果 $\overline{AB}=56$，$\overline{AD}=35$，$\overline{A'D'}=15$
請問：① $\overline{AB}:\overline{A'B'}=$？ ② $\overline{A'B'}=$？

解： ①因為△ABC～△$A'B'C'$，兩個相似三角形對應邊長之比等於對應高之比，
得 $\overline{AB}:\overline{A'B'}=\overline{AD}:\overline{A'D'}=35:15=7:3$。

② $\overline{AB}:\overline{A'B'}=\overline{AD}:\overline{A'D'}$

$56:\overline{A'B'}=7:3$

$7\times\overline{BC}=56\times3$

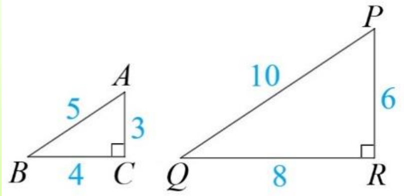
$\overline{BC}=24$

答：24

(10) 如圖，$\triangle ABC$ 和 $\triangle PQR$ 是相似三角形。

請問：① $\overline{BC}$ ： $\overline{QR}$ ＝？

②$\triangle ABC$ 面積：$\triangle PQR$ 面積＝？

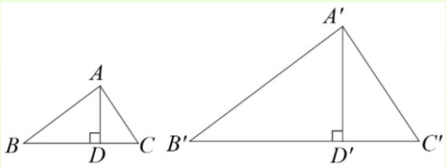


解： ① $\overline{BC}$ ： $\overline{QR}$ ＝4：8＝1：2

② $\triangle ABC$ 面積：$\triangle PQR$ 面積＝$\dfrac{3\times4}{2}$：$\dfrac{6\times8}{2}$＝6：24＝1：4

答：①1：2，②1：4

(11) 如圖，$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$，$A$、$B$、$C$ 的對應點分別是 A'、B'、C'，



已知 $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ 於 D 點，$\overline{A'D'} \perp \overline{B'C'}$ 於 D'點，

如果 $\overline{A'B'}=2\overline{AB}$，請問 $\triangle A'B'C'$ 面積是 $\triangle ABC$ 面積的多少倍？

解： 因為 $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$，$\overline{A'B'}=2\overline{AB}$，

可得 $\overline{B'C'}=2\overline{BC}$，$\overline{A'D'}=2\overline{AD}$，

$$\triangle ABC=\frac{\overline{BC}\times\overline{AD}}{2}$$

$$\triangle A'B'C'=\frac{\overline{B'C'}\times\overline{A'D'}}{2}=\frac{2\overline{BC}\times2\overline{AD}}{2}=2\times2\times\frac{\overline{BC}\times\overline{AD}}{2}$$

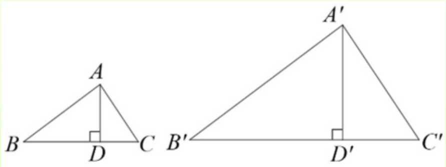
得 $\triangle A'B'C'=2^2\times\triangle ABC$

當 $\triangle A'B'C'$ 的邊長是 $\triangle ABC$ 的邊長的 2 倍時，

$\triangle A'B'C'$ 的面積是 $\triangle ABC$ 的面積的 2^2 倍。

答：2^2 倍

(12) 如圖，$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$，$A$、$B$、$C$ 的對應點分別是 A'、B'、C'，



已知 $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ 於 D 點，$\overline{A'D'} \perp \overline{B'C'}$ 於 D'點，

如果 $\overline{A'B'} = k\overline{AB}$，請問$\triangle A'B'C'$面積是$\triangle ABC$ 面積的多少倍？

解： 因為$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$，$\overline{A'B'} = k\overline{AB}$，

可得 $\overline{B'C'} = k\overline{BC}$，$\overline{A'D'} = k\overline{AD}$，

$$\triangle ABC = \frac{\overline{BC} \times \overline{AD}}{2}$$

$$\triangle A'B'C' = \frac{\overline{B'C'} \times \overline{A'D'}}{2} = \frac{k\overline{BC} \times k\overline{AD}}{2} = k \times k \times \frac{\overline{BC} \times \overline{AD}}{2}$$

得$\triangle A'B'C' = k^2 \times \triangle ABC$

當$\triangle A'B'C'$的邊長是$\triangle ABC$ 的邊長的 k 倍時，

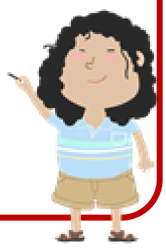
$\triangle A'B'C'$的面積是$\triangle ABC$ 的面積的 k^2 倍。

答：k^2 倍

已知$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$，

當$\triangle ABC$ 的邊長是$\triangle A'B'C'$的邊長的 k 倍時，

則$\triangle ABC$ 的面積是$\triangle A'B'C'$的面積的 k^2 倍。

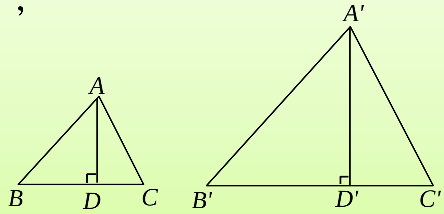


(13) 已知△ABC～△$A'B'C'$，A、B、C 的對應點分別是 A'、B'、C'，
如果 $\overline{B'C'}=2\overline{BC}$，△$ABC$ 的面積＝10，請問△$A'B'C'$的面積＝？

解： 因為 $\overline{B'C'}=2\overline{BC}$，代表△$A'B'C'$的邊長是△$ABC$ 的邊長的 2 倍，
所以△$A'B'C'$的面積是△ABC 的面積的 2^2 倍，也就是 4 倍，
△$A'B'C'$的面積＝△ABC 的面積×4＝10×4＝40。

答：40

(14) 如圖，△ABC～△$A'B'C'$，A、B、C 的對應點分別是 A'、B'、C'，
已知 $\overline{AD}\perp\overline{BC}$ 於 D 點，$\overline{A'D'}\perp\overline{B'C'}$ 於 D'點，
如果 $\overline{BC}=8$，$\overline{B'C'}=12$，請問：
① $\overline{AD}:\overline{A'D'}=$？
② △ABC 的面積：△$A'B'C'$的面積＝？



解： ① 因為△ABC～△$A'B'C'$，
兩個相似三角形對應邊長的比為其對應高的比，
$\overline{AD}:\overline{A'D'}=\overline{BC}:\overline{B'C'}=8:12=2:3$

② 假設 $\overline{AD}=2r$，$\overline{A'D'}=3r$，其中 $r\neq0$，

△ABC 的面積＝$8\times2r\times\frac{1}{2}=8r$

△$A'B'C'$的面積＝$12\times3r\times\frac{1}{2}=18r$

△ABC 的面積：△$A'B'C'$的面積＝$8r:18r=4:9$

答：①2：3，②4：9

(15) 已知 $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$，$A$、$B$、$C$ 的對應點分別是 A'、B'、C'，

其中 $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ 於 D 點，$\overline{A'D'} \perp \overline{B'C'}$ 於 D'點，

如果 $\overline{BC}$ ：$\overline{B'C'}$ ＝3：4，請問：

① $\overline{AD}$ ：$\overline{A'D'}$ ＝？

② $\triangle ABC$ 的面積：$\triangle A'B'C'$的面積＝？

解： ① 因為$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$，

兩個相似三角形對應邊長的比為其對應高的比，

$\overline{AD}$ ：$\overline{A'D'}$ ＝ $\overline{BC}$ ：$\overline{B'C'}$ ＝3：4

② 假設 $\overline{BC} = 3r$，$\overline{B'C'} = 4r$，$\overline{AD} = 3k$，$\overline{A'D'} = 4k$，其中 $r \neq 0$，$k \neq 0$，

$\triangle ABC$ 的面積：$\triangle A'B'C'$的面積

$$= \frac{\overline{BC} \times \overline{AD}}{2} : \frac{\overline{B'C'} \times \overline{A'D'}}{2}$$

$$= \frac{3r \times 3k}{2} : \frac{4r \times 4k}{2}$$

$$= 3^2 : 4^2$$

答：① 3：4，② 3^2：4^2

由上題知，兩個相似三角形的邊長比為 3：4，

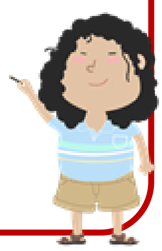
其面積比為 3^2：4^2，也就是邊長的平方比。

已知$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$，

若 $\overline{AB}$ ：$\overline{A'B'}$ ＝m：n，

則$\triangle ABC$ 的面積：$\triangle A'B'C'$的面積＝m^2：n^2。

即**兩個相似三角形面積之比等於對應邊長平方之比**。



(16) 已知$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$，$A$、$B$、$C$ 的對應點分別是 A'、B'、C'，

如果 $\overline{BC}=3$，$\overline{B'C'}=2$，$\triangle ABC$ 的面積為 36，

請問$\triangle A'B'C'$的面積＝？

解：【方法一】

因為 $\overline{BC}:\overline{B'C'}=3:2$

得 $\triangle ABC$ 的面積：$\triangle A'B'C'$的面積$=3^2:2^2$

36：$\triangle A'B'C'$的面積$=9:4$

$9\times\triangle A'B'C'$的面積$=36\times 4$

$\triangle A'B'C'$的面積$=16$。

【方法二】

因為 $\overline{BC}:\overline{B'C'}=3:2=1:\frac{2}{3}$，$\overline{B'C'}=\overline{BC}\times\frac{2}{3}$，

也就是$\triangle A'B'C'$是$\triangle ABC$ 的$\frac{2}{3}$倍縮小圖，

得$\triangle A'B'C'$的面積是$\triangle ABC$ 的面積的$(\frac{2}{3})^2$倍，

$\triangle A'B'C'$的面積$=\triangle ABC$ 的面積$\times(\frac{2}{3})^2=36\times\frac{4}{9}=16$。

答：16

隨堂練習

已知$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$，$A$、$B$、$C$ 的對應點分別是 A'、B'、C'，

如果 $\overline{BC}=2$，$\overline{B'C'}=6$，$\triangle ABC$ 的面積為 12，

請問$\triangle A'B'C'$的面積＝？

(17) 已知$\triangle ABC \sim \triangle DEF$，$A$、$B$、$C$ 的對應點分別是 D、E、F，
如果$\triangle ABC$ 面積為 15，$\triangle DEF$ 面積為 60，$\overline{AB}=6$，$\overline{BC}=5$，
請問$\overline{EF}=$？

解：【方法一】

因為$\triangle ABC$ 面積：$\triangle DEF$ 面積$=15:60=1:4$，
代表$\triangle DEF$ 面積是$\triangle ABC$ 面積的 4 倍，也就是 2^2 倍，
得$\triangle DEF$ 邊長是$\triangle ABC$ 邊長的 2 倍，
又 $\overline{EF}$ 的對應邊為 $\overline{BC}$，
得 $\overline{EF}=2\overline{BC}=10$。

【方法二】

因為$\triangle ABC$ 面積：$\triangle DEF$ 面積$=15:60=1:4$，也就是 $1:2^2$，
得$\triangle ABC$ 邊長：$\triangle DEF$ 邊長$=15:60=1:2$，
$\overline{EF}$ 的對應邊為 $\overline{BC}$，
得 $\overline{BC}:\overline{EF}=1:2$
$5:\overline{EF}=1:2$
$\overline{EF}=5\times2=10$。

答：10

隨堂練習

已知$\triangle ABC \sim \triangle DEF$，$A$、$B$、$C$ 的對應點分別是 D、E、F，
如果$\triangle ABC$ 面積為 90，$\triangle DEF$ 面積為 10，$\overline{AB}=45$，$\overline{BC}=30$，
請問$\overline{DE}=$？

小試身手

1. 已知$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$，$A$、$B$、$C$ 的對應點分別是 A'、B'、C'，
   其中 $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ 於 D 點，$\overline{A'D'} \perp \overline{B'C'}$ 於 D'點，
   如果 $\overline{BC}=10$，$\overline{B'C'}=5$，$\overline{A'D'}=30$，
   請問：① $\overline{AD}:\overline{A'D'}=$？ ② $\overline{AD}=$？

2. 已知$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$，$A$、$B$、$C$ 的對應點分別是 A'、B'、C'，
   如果 $\overline{BC}=2$，$\overline{B'C'}=4$，$\triangle A'B'C'$的面積為 12，
   請問：①$\triangle ABC$ 的面積：$\triangle A'B'C'$的面積＝？
   ②$\triangle ABC$ 的面積＝？

3. 已知$\triangle ABC \sim \triangle PQR$，$A$、$B$、$C$ 的對應點分別是 P、Q、R，
   如果 $\overline{BC}=4$，$\overline{QR}=6$，$\triangle ABC$ 的面積為 20，
   請問$\triangle PQR$ 的面積＝？

教育部國民及學前教育署 編

國民中學
學生學習扶助教材 9 年級數學