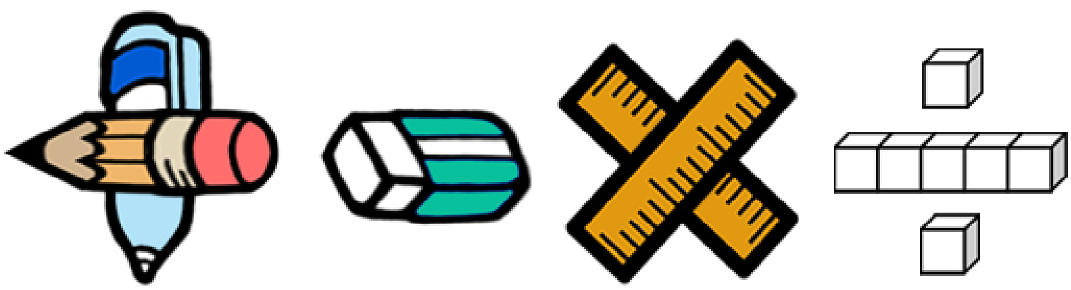
基本學習內容：SC-9-6-2

圓周角的度數等於所對弧度數的一半

班級：________________

姓名：________________



教育部國民及學前教育署 編
中華民國 112 年 8 月

「弧」、「扇形」、「圓心角」、「圓內角」、「圓外角」和「圓周角」的意義

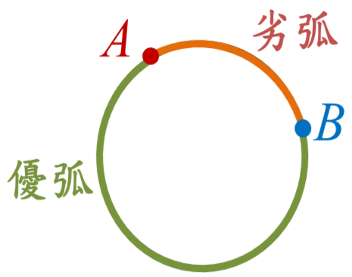
「弧」

在圓 O 上任意取兩個點 A、B，把圓分成兩個部份，這兩個部份都稱為弧。

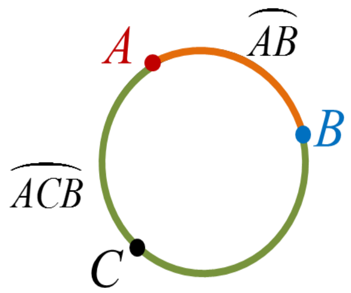
如圖一，如果兩個弧大小不一樣，較大的弧稱為優弧、較小的弧稱為劣弧。

如圖二，我們稱弧 AB 時指的是劣弧，記為 $\overset{\frown}{AB}$ 或 $\overset{\frown}{BA}$，

要表示優弧時，會在優弧上再取一點 C，將優弧記為 $\overset{\frown}{ACB}$ 或 $\overset{\frown}{BCA}$。



圖一



圖二

「扇形」

由圓心 O 和兩條半徑以及所對的弧所形成的圖形稱為扇形，

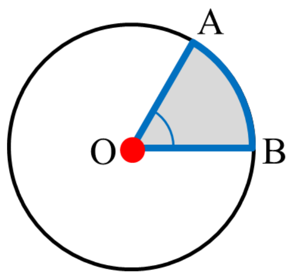
如圖三～圖五的灰色區域，都稱為扇形。

「圓心角」

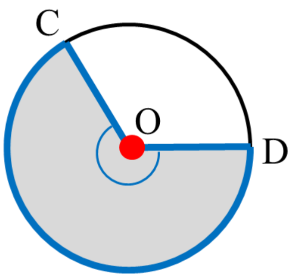
在扇形中，兩條半徑所夾的角稱為圓心角，

如圖三的 $\angle AOB$、圖四的 $\angle COD$ 和圖五的 $\angle EOF$ 都是圓心角。

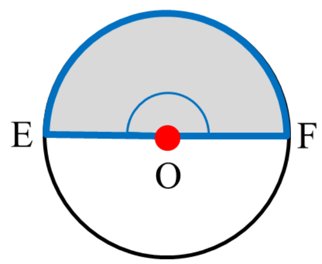
因為周角＝360°，二分之一圓的圓心角為 180°，所以 $\angle EOF = 180°$。



圖三



圖四



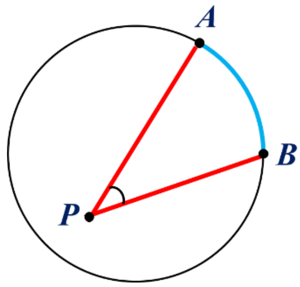
圖五

「圓內角」

給定任意一弧，以及圓內一點，將此點與弧的兩端點連線，

所得的角稱為該弧所對的圓內角。

如圖六，$\angle APB$ 就是 $\overset{\frown}{AB}$ 所對的圓內角。



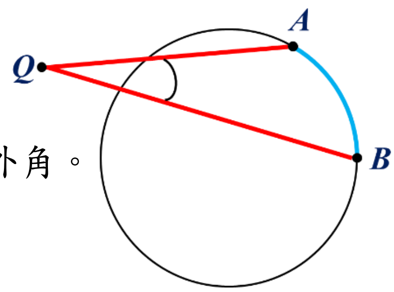
圖六

「圓外角」

給定任意一弧，以及圓外一點，與弧的兩端點連線，

所得的角兩邊與圓均有兩個交點，稱為該弧所對的圓外角。

如圖七，$\angle AQB$ 就是 $\overset{\frown}{AB}$ 所對的圓外角。



圖七

「圓周角」

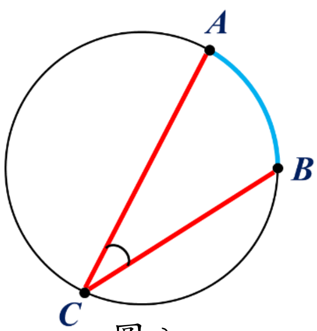
給定任意一弧，以及在圓周上而且不在 $\overset{\frown}{AB}$ 上的任意一點與弧的兩端點連線，

所得的角稱為該弧所對的圓周角。

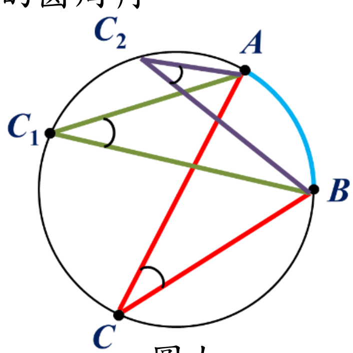
如圖八，C 點在圓周上，$\angle ACB$ 就是 $\overset{\frown}{AB}$ 所對的圓周角。

如圖九，如果 C 點在圓周上移動，得到 C_1、C_2，連接 C_1、C_2 與的兩端點，

所形成的 $\angle AC_1B$、$\angle AC_2B$，也是 $\overset{\frown}{AB}$ 所對的圓周角。



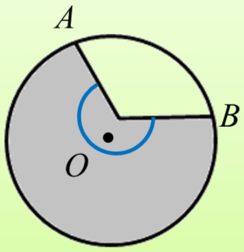
圖八



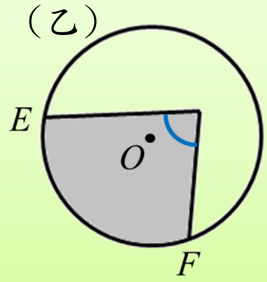
圖九

(1) 說說看，哪一個是圓 O 的圓心角？

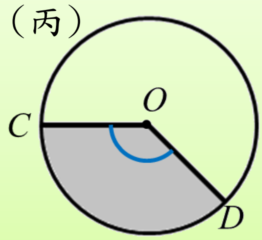
（甲）



（乙）



（丙）



解：

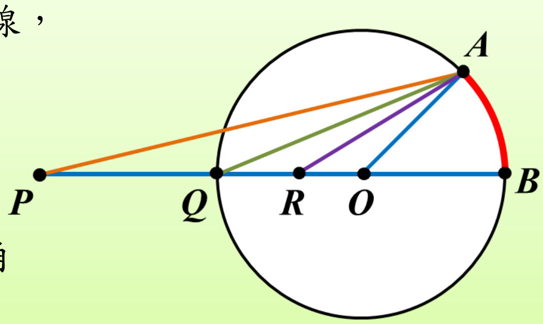
小盛說：圖形(甲)和圖形(乙)的灰色區域不是扇形，所以夾角不是圓心角。

圖形(丙)的灰色區域是扇形，所以∠COD 是圓心角，故選(丙)。

(2) 如右圖，已知圓心 *O* 和 *P*、*Q*、*R*、*B* 點共線，且 *P* 點在圓外、*Q* 點在圓上、*R* 點在圓內。

① 說說看，*AB* 所對的圓心角、圓內角、圓外角與圓周角分別是哪一個角？

② 請將 *AB* 所對的圓心角、圓內角、圓外角與圓周角由大到小排列。



解：

① 沂穎說：我知道，

因為 O 點是圓心，所以∠AOB 就是 *AB* 所對的圓心角；

因為 P 點在圓外，所以∠APB 就是 *AB* 所對的圓外角；

因為 Q 點在圓上，所以∠AQB 就是 *AB* 所對的圓周角；

② 品芸說：如右圖，從外角定理可以知道，

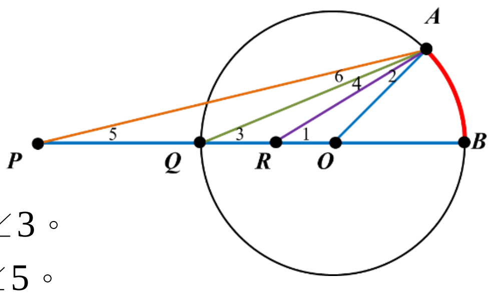
∠AOB 是△ARO 的外角，

所以∠AOB>∠ARB＝∠1。

∠1 是△ARQ 的外角，所以∠1>∠3。

∠3 是△APB 的外角，所以∠3>∠5。

所以∠AOB>∠ARB>∠AQB>∠APB。



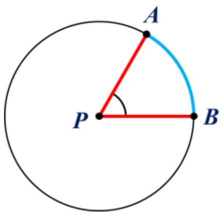
1. 給定任意一弧，

(1) 如圖一，P 點在圓心，$\angle APB$ 是圓心角。

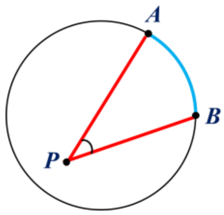
(2) 如圖二，P 點在圓內，$\angle APB$ 是圓內角。

(3) 如圖三，P 點在圓外，$\angle APB$ 是圓外角。

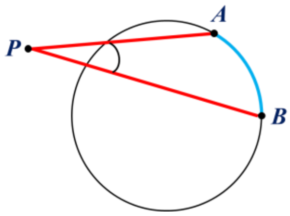
(4) 如圖四，P 點在圓上，$\angle APB$ 是圓周角。



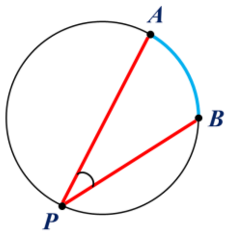
圖一



圖二



圖三



圖四

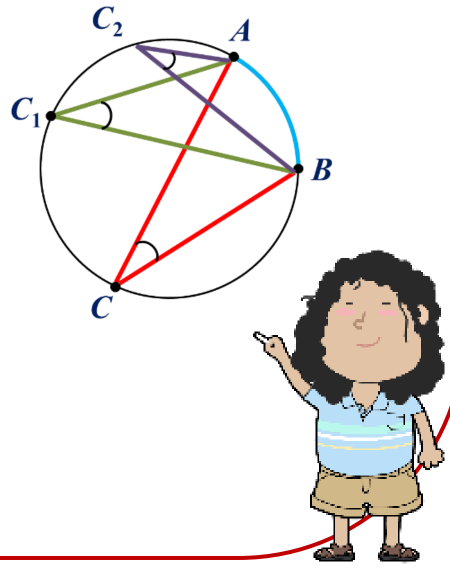
2. 同一弧所對的圓心角只有一個，

但是同一弧所對的圓周角可以有很多個。

如右圖，

$\angle ACB$、$\angle AC_1B$、$\angle AC_2B$

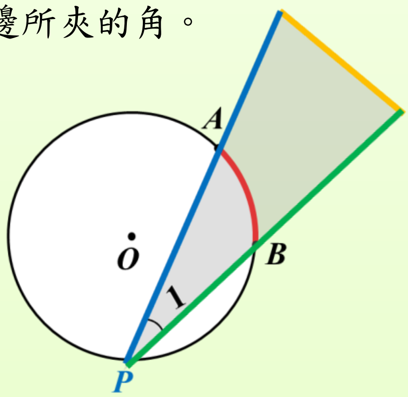
都是$\overset{\frown}{AB}$所對的圓周角。



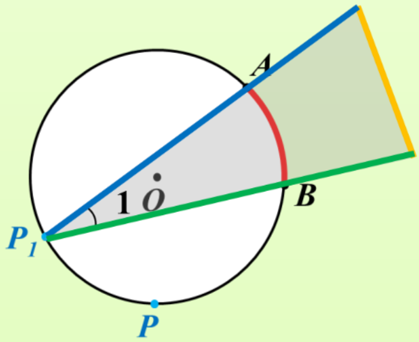
(3) 如圖，圓 O 上有一個 AB。

拿出附件一的三角形紙片，∠1 是藍色邊與綠色邊所夾的角。

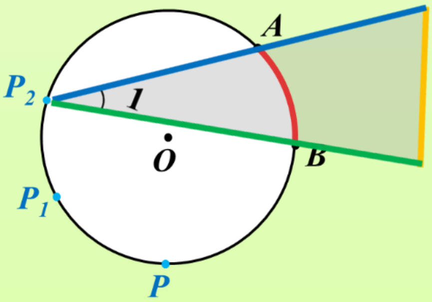
①如右圖，將三角形的頂點放在圓周上的 P 點，移動三角形紙片，使得圓弧一端的 A 點落在三角形的藍色邊上，此時發現圓弧的另一端 B 點會落在三角形的綠色邊上，所以 AB 所對的圓周角 ∠APB＝∠1。



②如右圖，沿著圓周移動三角形，重覆步驟①，使得三角形頂點落在圓周上的 P_1 位置，並保持圓弧的 A 點落在三角形的藍色邊上，B 點落在三角形的綠色邊上，所以 AB 所對的圓周角 ∠AP_1B＝∠1。



③給定 AB 對的圓周角 ∠AP_2B，重覆步驟②，所以 AB 所對的圓周角 ∠AP_2B＝∠1。

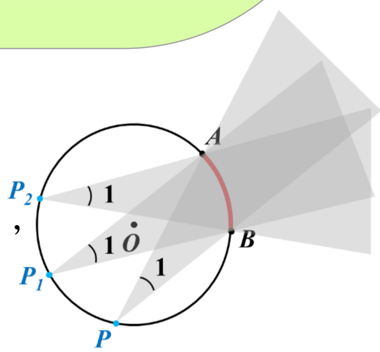


說說看，

AB 所對的圓周角有很多個，它們的角度都相等嗎?

解：

因為∠AP_1B、∠AP_2B、∠AP_3B都等於∠1，如果移動三角形紙片，將三角形的頂點沿著圓周移動，可以發現 AB 所對的圓周角都等於∠1，所以它們的角度都相等。



隨堂練習

如下圖，圓 O 上有一個 *CD*。

拿出附件二的三角形紙片，∠1 是紫色邊與黃色邊所夾的角，∠1 是鈍角。

①將三角形的頂點放在圓周上的 P 點，移動三角形紙片，

使得圓弧一端的 C 點落在三角形的紫色邊上，

另一端的 B 點落在三角形的黃色邊上，

所以 *CD* 所對的圓周角∠APB＝∠1。

②沿著圓周移動三角形，重覆步驟①，

使得三角形頂點落在圓周上的 P_1 位置，

並保持圓弧的 C 點落在三角形的藍色邊上，

D 點落在三角形的綠色邊上，所以∠AP_1B＝∠1。

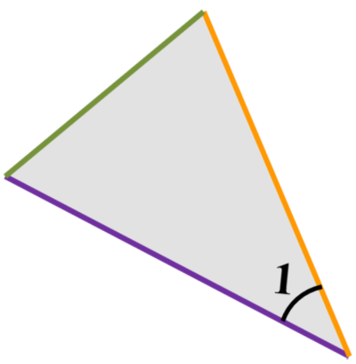
③給定 *CD* 對的圓周角∠AP_2B，重覆步驟②，

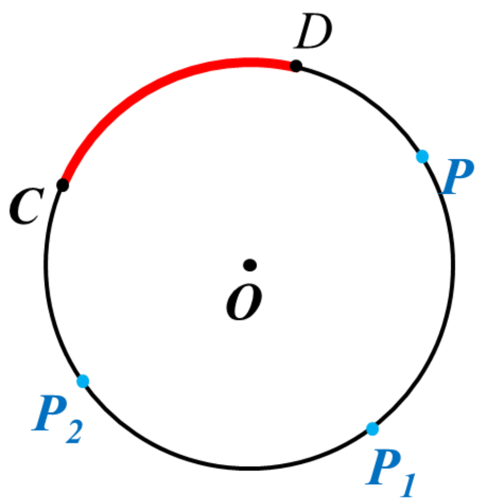
可以發現∠AP_2B＝∠AP_1B。

說說看，

CD 所對的圓周角有很多個，它們的角度都相等嗎?

附件二



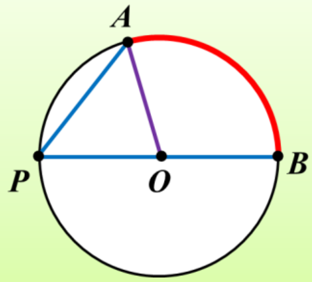


★圓心在圓周角的邊上

(4) 如右圖，∠APB 是 AB 所對的圓周角，

∠AOB 是 AB 所對的圓心角，

說說看，∠APB 和∠AOB 的角度有什麼關係?



解：

小璇說：∠1 是△AOP 的外角，

利用外角定理，

三角形的任意外角會等於不相鄰的兩個內角和，

所以我知道∠1＝∠2＋∠3　…(1)

還有，因為 $\overline{OA}=\overline{OP}$ ＝半徑，

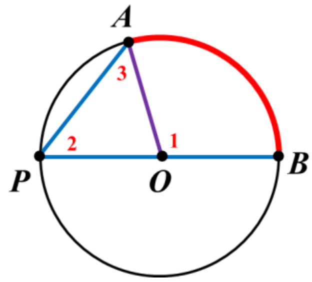
所以△AOP 是等腰三角形，可以推得∠2＝∠3 …(2)

我把第(2)式代入第(1)式，

結果發現∠1＝∠2＋∠2＝2∠2

所以可以推得∠2＝$\frac{1}{2}$∠1，

也就是∠APB＝$\frac{1}{2}$∠AOB。



從這個例子來看，

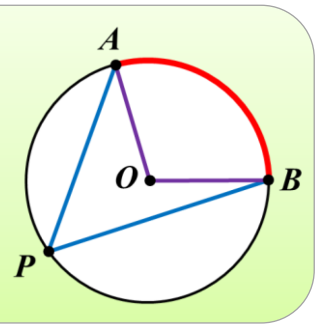
我們可以說圓周角∠APB 是所對圓心角∠AOB 的一半。

★圓心在圓周角的內部

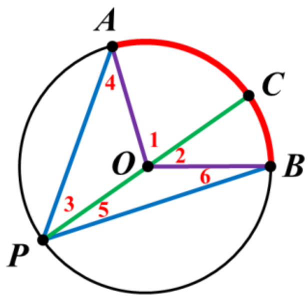
(5) 如右圖，∠APB 是 AB 所對的圓周角，

∠AOB 是 AB 所對的圓心角，

說說看，∠APB 和∠AOB 的角度有什麼關係?



解：



<u>大華</u>說：我先連接過 P 點的直徑，

在圓周上交於 C 點。

接著，

在圖上標示∠1、∠2、∠3、∠4、∠5、∠6。

我利用第(4)題的結論，

從 AC 來看，

圓周角∠3 是圓心角∠1 的一半，寫成 $\angle 3=\frac{1}{2}\angle 1$…(1)

從 BC 來看，

圓周角∠5 是圓心角∠2 的一半，寫成 $\angle 5=\frac{1}{2}\angle 2$…(2)

接著把第(1)式＋第(2)式

得到 $\angle 3+\angle 5=\frac{1}{2}(\angle 1+\angle 2)$

也就是 $\angle APB=\frac{1}{2}\angle AOB$。

從這個例子來看，

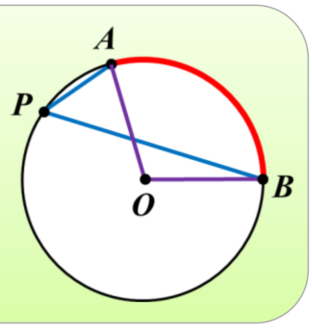
我們也可以說圓周角∠APB 是所對圓心角∠AOB 的一半。

★圓心在圓周角的外部

(6) 如右圖，∠APB 是 AB 所對的圓周角，

∠AOB 是 AB 所對的圓心角，

說說看，∠APB 和∠AOB 的角度有什麼關係?



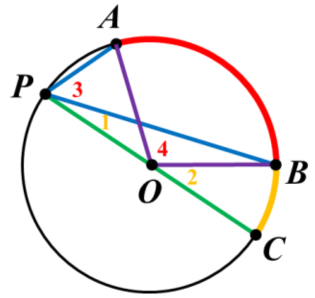
解：

<u>大華說</u>：我先連接過 P 點的直徑，

在圓周上交於 C 點。

接著，

在圖上標示∠1、∠2、∠3、∠4。



我先利用第(4)題的結論，

從 BC 來看，

圓周角∠1 是圓心角∠2 的一半，寫成$\angle 1=\frac{1}{2}\angle 2\cdots(1)$

再利用第(5)題的結論，

從 AB 來看，

圓周角∠3 是圓心角∠4 的一半，寫成$\angle 3=\frac{1}{2}\angle 4\cdots(2)$

接著把第(1)式＋第(2)式

得到$\angle 1+\angle 3=\frac{1}{2}(\angle 2+\angle 4)$

也就是$\angle APB=\frac{1}{2}\angle AOB$。

從這個例子來看，

我們也可以說圓周角∠APB 是所對圓心角∠AOB 的一半。

如圖一～三，

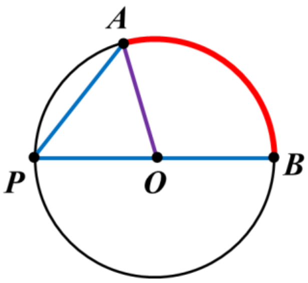
$\angle APB$ 是 $\overset{\frown}{AB}$ 的圓周角，$\angle AOB$ 是 $\overset{\frown}{AB}$ 的圓心角，如果：

(1)圓心在 $\angle APB$ 的其中一邊

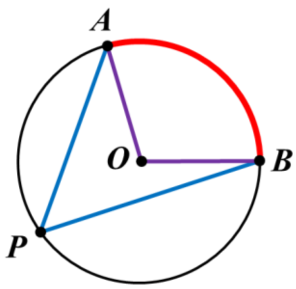
(2)圓心在 $\angle APB$ 的內部

(3)圓心在 $\angle APB$ 的外部

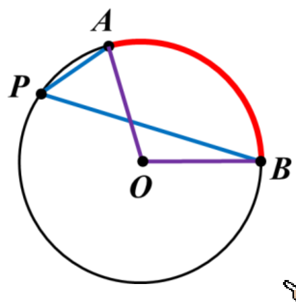
則 $\angle APB=\dfrac{1}{2}\angle AOB$。



圖一



圖二



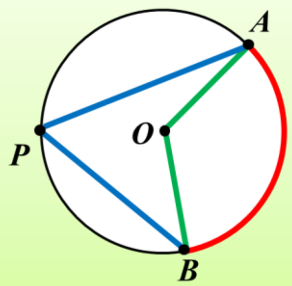
圖三

也就是「同一弧所對的圓周角都是其圓心角的一半」。

(7) 如右圖，∠APB 是 AB 所對的圓周角，

已知圓心角 ∠AOB＝120°，

則圓周角 ∠APB＝？度。



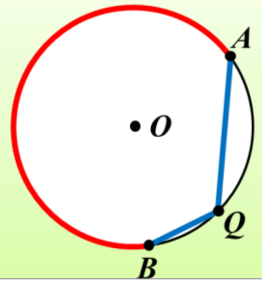
解：

<u>尚廷</u>說：我知道，

因為同一弧所對的圓周角是所對圓心角的一半，

所以 $\angle APB=\dfrac{1}{2}\angle AOB=\dfrac{1}{2}\times 120°=60°$。

(8) 如右圖，鈍角∠AQB 是優弧 AB 所對的圓周角，
說說看，鈍角∠AQB 和優弧 AB 的度數有什麼關係？



解：

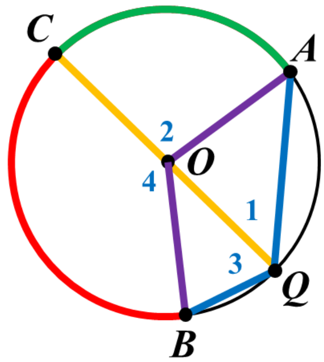
小凱說：我知道，

利用例題(5)的方法，先連接過 Q 點的直徑，

在圓周上交於 C 點。

接著，在圖上標示∠1、∠2、∠3、∠4。

利用第(4)題的結論，



從 AC 來看，

圓周角∠1 是圓心角∠2 的一半，寫成 $\angle 1=\frac{1}{2}\angle 2$…(1)

從 BC 來看，

圓周角∠3 是圓心角∠4 的一半，寫成 $\angle 3=\frac{1}{2}\angle 4$…(2)

接著把第(1)式＋第(2)式

得到 $\angle 1+\angle 3=\frac{1}{2}(\angle 2+\angle 4)$

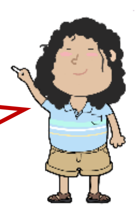
也就是 $\angle AQB=\frac{1}{2}(\angle 2+\angle 4)=\frac{1}{2}ACB$ 。

所以 $\angle AQB==\frac{1}{2}ACB$ 。

從這個例子來看，

圓周角的度數就是所對弧度數的一半。

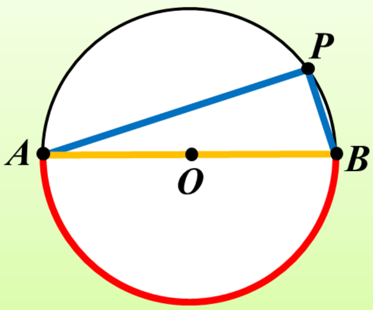
任意圓周角的度數就是所對弧度數的一半。



(9) 如右圖，已知 $\overline{AB}$ 為直徑，

若∠APB 是 AB 所對的圓周角，

則∠APB＝？度。



解：

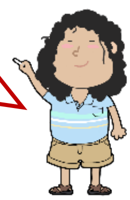
婷婷說：

因為 $\overline{AB}$ 為直徑，所以 AB＝180 度，

又「**圓周角的度數就是所對弧度數的一半**」，

所以 $\angle APB = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \times 180 = 90$ 度。

半圓所對的圓周角是直角。

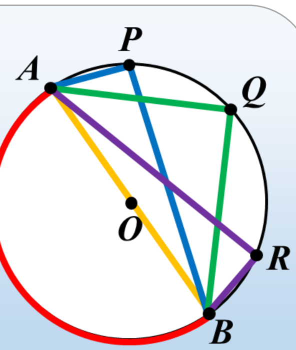


隨堂練習

如右圖，已知 $\overline{AB}$ 為直徑，

若∠APB、∠AQB、∠ARB 都是 AB 所對的圓周角，

請求出∠APB、∠AQB、∠ARB 的角度。



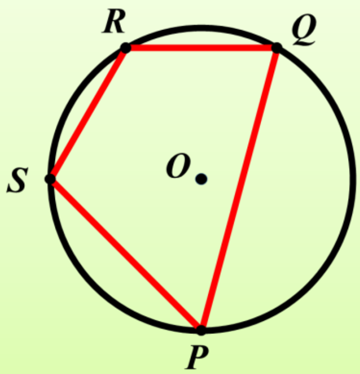
(10) 如右圖，圓 O 上有 P、Q、R、S 四點，

已知∠P＝60 度、∠S＝105 度，則：

(1) ∠R＝？度

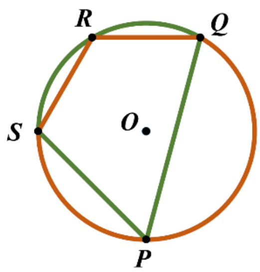
(2) ∠Q＝？度

(3)說說看，∠P＋∠R＝∠Q＋∠S 成立嗎？



解：

(1) <u>阿文</u>說：如右圖，因為 P、R 點在圓上，



所以∠P 是 SRQ 所對的圓周角、∠R 是 SPQ 所對的圓周角。

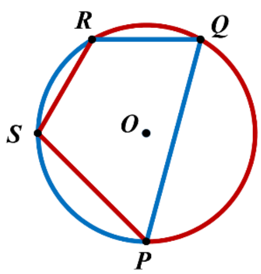
利用「**圓周角的度數就是所對弧度數的一半**」推論得到

$\angle P = \frac{1}{2} SRQ \rightarrow SRQ = 2\angle P = 2\times 60 = 120$ 度，

因為一整個圓弧為 360 度，所以 $SPQ = 360 - 120 = 240$ 度，

$\angle R = \frac{1}{2} SPQ = \frac{1}{2}\times 240 = 120$ 度。

(2) <u>巧青</u>說：如右圖，因為 Q、S 點也在圓上，



所以∠Q 是 RSP 所對的圓周角、∠S 是 RQP 所對的圓周角。

利用「**圓周角的度數就是所對弧度數的一半**」推論得到

$\angle S = \frac{1}{2} RQP \rightarrow RQP = 2\angle S = 2\times 105 = 210$ 度，

因為一整個圓弧為 360 度，所以 $RSP = 360 - 210 = 150$ 度，

$\angle Q = \frac{1}{2} RSP = \frac{1}{2}\times 150 = 75$ 度。

(3) ∠P＋∠R＝60＋120＝180 度，∠Q＋∠S＝105＋75＝180 度，

所以成立。

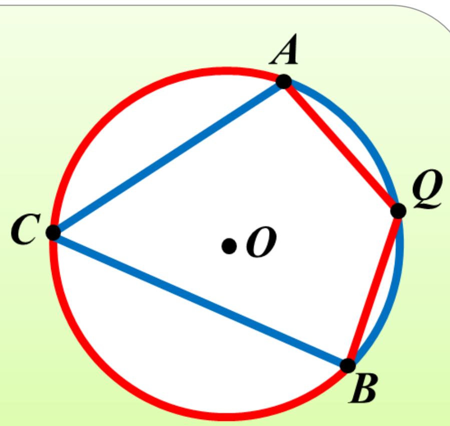
(11) 如右圖，圓 O 上 A、B 兩點，

將圓周分為 AQB 及 ACB 。

若∠ACB 是 AQB 所對的圓周角、

∠AQB 是 ACB 所對的圓周角，

說說看，∠ACB＋∠AQB＝？度



解：

仲恩說：

我知道「**圓周角的度數就是所對弧度數的一半**」，

所以 $\angle \mathrm{ACB}=\dfrac{1}{2}AQB\ldots$①

$\angle \mathrm{AQB}=\dfrac{1}{2}ACB\ldots$②

把第①式＋第②式，得到

$$\angle \mathrm{ACB}+\angle \mathrm{AQB}=\frac{1}{2}AQB+\frac{1}{2}ACB$$

$$=\frac{1}{2}(AQB+ACB)$$

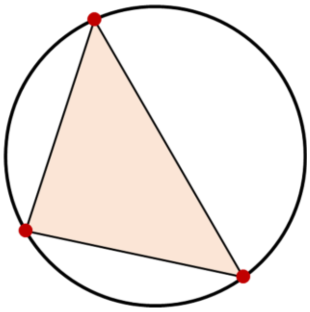
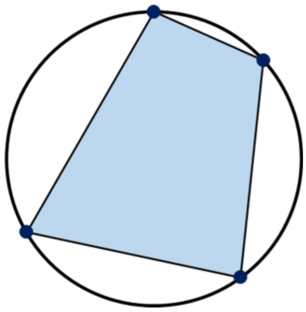
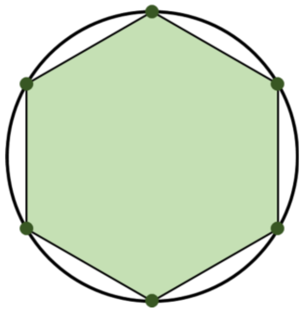
$$=\frac{1}{2}\times 360=180\text{ 度}$$

所以∠ACB＋∠AQB＝180 度。

名詞釋義

一個多邊形的頂點都在圓上，則這個多邊形稱為此圓的內接多邊形。

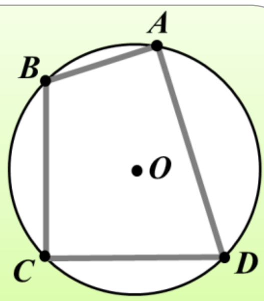
例如：

		
圓內接三角形	圓內接四邊形	圓內接六邊形

(12) 說說看，

圓內接四邊形 ABCD 的對角∠A＋∠C＝？度，

另一組對角∠B＋∠D＝？度。



解：

<u>宥騰</u>說：

我用第(10)題的結論推得

因為∠A 是 *BCD* 所對的圓周角、∠C 是 *BAD* 所對的圓周角，

所以∠A＋∠C＝180 度。

因為∠B 是 ADC 所對的圓周角、∠D 是 *ABC* 所對的圓周角，

所以∠B＋∠D＝180 度。

圓內接四邊形的對角互補。

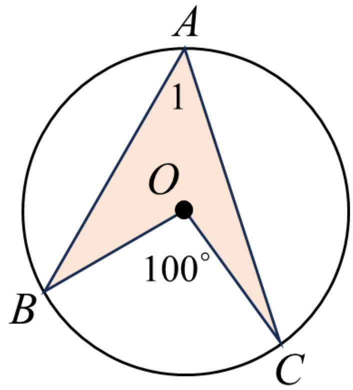
小試身手

(1) 如右圖，已知A、B、C三點在圓周上。

請根據右圖回答下列問題：

① BC＝＿＿＿＿＿度。

② $\angle 1$＝＿＿＿＿＿度。

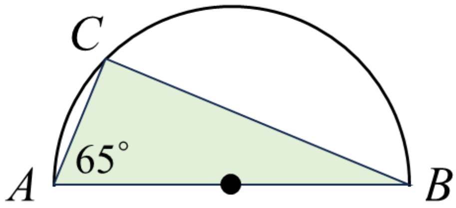


(2) 右圖是一個半圓，O為圓心，$\overline{AB}$為直徑，C為圓上一點。

請回答下列問題：

① $\angle C$＝＿＿＿＿＿度。

② ∠B＝＿＿＿＿＿度。



(3) 如右圖，四邊形$ABCD$為圓內接四邊形，

E點為$\overline{AB}$、$\overline{DC}$延長線的交點，

F點為$\overline{AD}$、$\overline{BC}$延長線的交點。

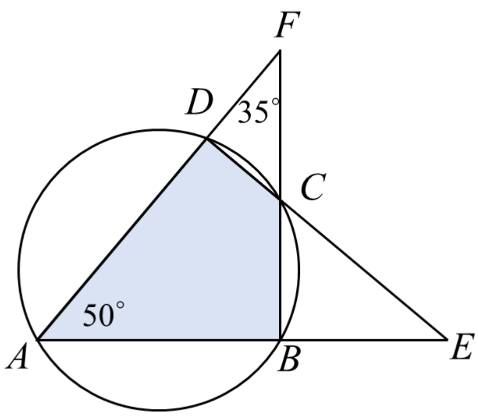
若$\angle A=50°$、$\angle F=35°$，請回答下列問題：

① $\angle DCB$＝＿＿＿＿＿度。

②觀察△ABF，求出$\angle ABC$＝＿＿＿＿＿度。

③ $\angle CBE$＝＿＿＿＿＿度。

④利用外角定理，$\angle DCB=\angle CBE+\angle CEB$，所以$\angle E$＝＿＿＿＿＿度。



教育部國民及學前教育署 編

國民中學 學生學習扶助教材 9 年級數學