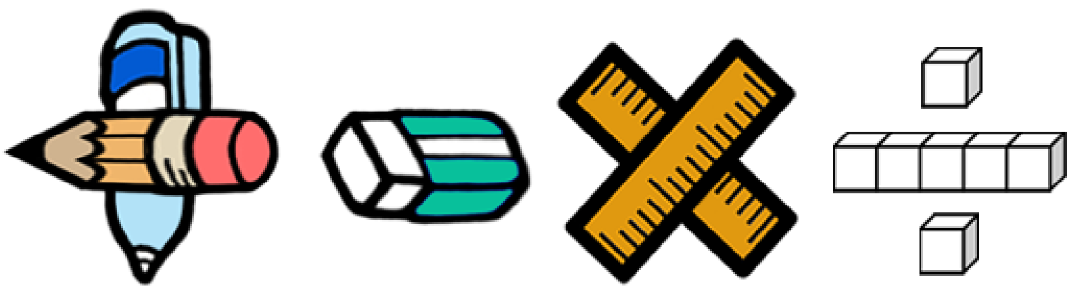
# 基本學習內容：SC-9-6-3

# 切線段等長

班級：________________

姓名：________________



教育部國民及學前教育署 編

中華民國 113 年 8 月

## ◎切線的意義

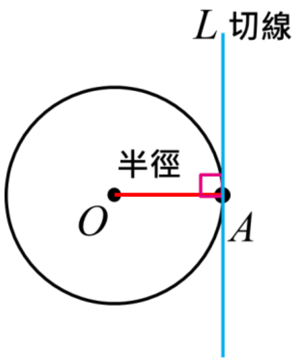
**「切線性質」**

若直線 $L$ 與圓 $O$ 只交於一點 $A$ ，

則 $L$ 稱為圓 $O$ 的**切線**，$A$ 點稱為**切點**。

此時，(1) 圓 $O$ 到 $L$ 的距離**等於圓的半徑長**。

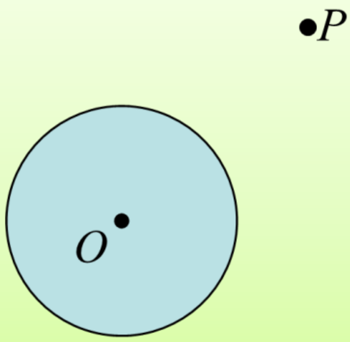
(2) $L \perp \overline{OA}$



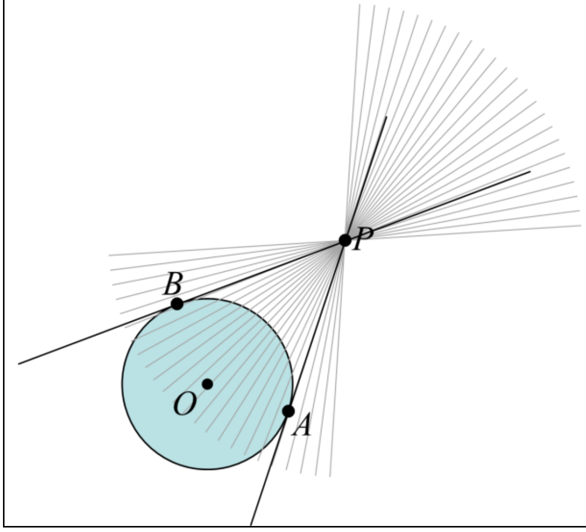
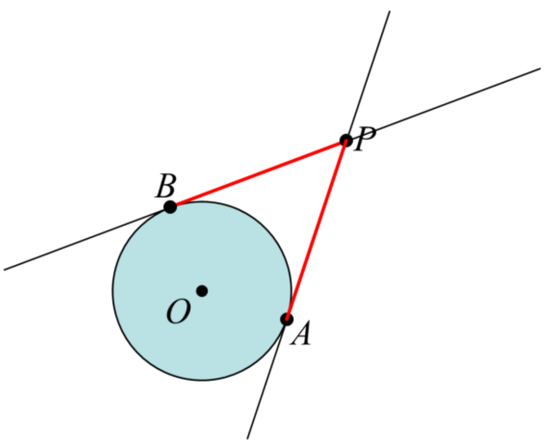

## ◎切線段性質

(1) 說說看，$P$ 為圓 $O$ 外一點，

過 P 點的直線中，有幾條是圓 $O$ 的切線？

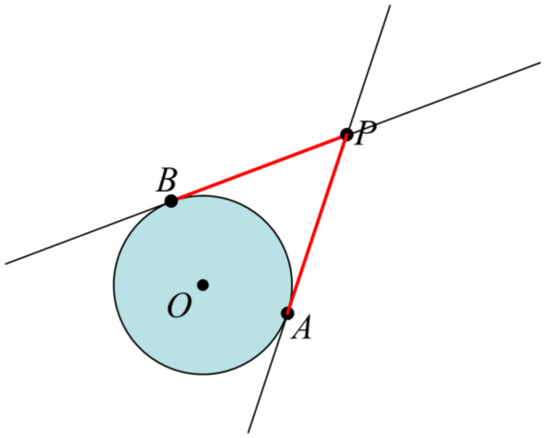



**解：**

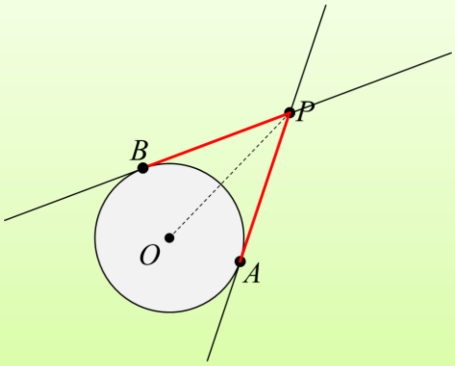
| | |
|---|---|
| 畫出過 $P$ 點且與圓相交的線，如右圖發現和圓 $O$ 相切的線只有兩條， | 且 $A$、$B$ 為切點，有 $\overleftrightarrow{PA}$ 與 $\overleftrightarrow{PB}$ 兩條切線。 |

答：有 $\overleftrightarrow{PA}$ 與 $\overleftrightarrow{PB}$ 兩條切線

$P$ 為圓 $O$ 外一點，$\overleftrightarrow{PA}$ 與 $\overleftrightarrow{PB}$ 都是過 $P$ 點與圓 $O$ 相切的切線，$A$、$B$ 是切點，$\overline{PA}$和$\overline{PB}$ 都稱為 P 點對圓 $O$ 的**切線段**。



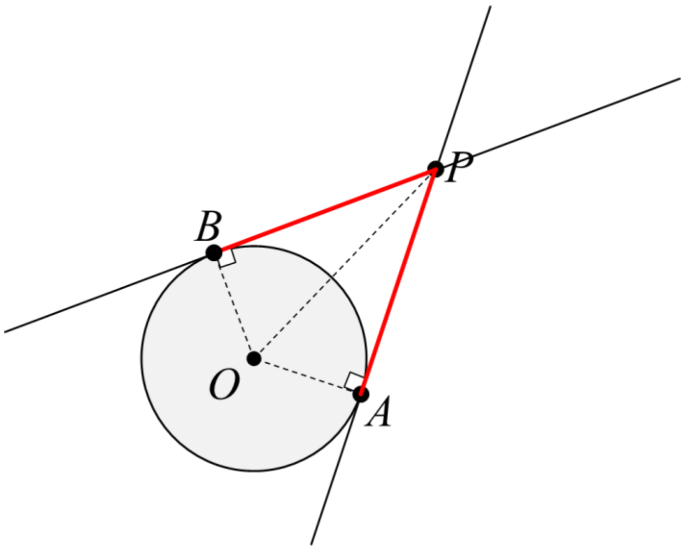

(2) 如圖，直線 $PA$、$PB$ 為圓 $O$ 的切線，$A$、$B$ 為切點，若圓 $O$ 半徑為 5、$\overline{OP}=13$，求兩條切線段 $\overline{PA}$ 和 $\overline{PB}$ 的長？




**解：**

$P$ 為圓 $O$ 外一點，$\overleftrightarrow{PA}$ 與 $\overleftrightarrow{PB}$ 為圓 $O$ 的兩條切線，$A$、$B$ 為切點。
連接$\overline{OA}$、$\overline{OB}$ 和$\overline{OP}$，$\overline{AP}\perp\overline{OA}$，$\overline{BP}\perp\overline{OB}$，
$\overline{OA}=\overline{OB}=$ 半徑

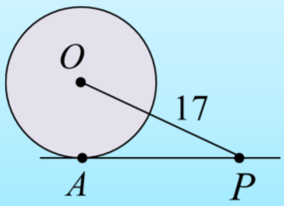
在直角$\triangle OAP$ 中，
$\overline{PA}=\sqrt{\overline{OP}^2-\overline{OA}^2}=\sqrt{13^2-5^2}=\sqrt{144}=12$
在直角$\triangle OBP$ 中，
$\overline{PB}=\sqrt{\overline{OP}^2-\overline{OB}^2}$
$=\sqrt{13^2-5^2}$
$=\sqrt{144}$
$=12$



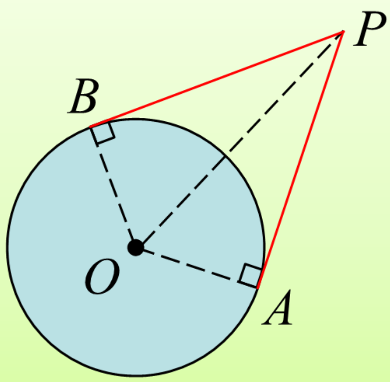

答：$\overline{PA}=\overline{PB}=12$

## 隨堂練習

如圖，直線 $PA$ 為圓 $O$ 的切線，$A$ 為切點，
若圓 $O$ 半徑為 8、$\overline{OP}=17$，求 $\overline{PA}=$？




(3) 如圖，直線 $PA$、$PB$ 為圓 $O$ 的切線，
$A$、$B$ 為切點，若圓 $O$ 半徑為 r，
請問兩條切線段 $\overline{PA}$ 和 $\overline{PB}$ 等長嗎？

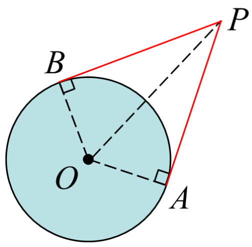



**解：**

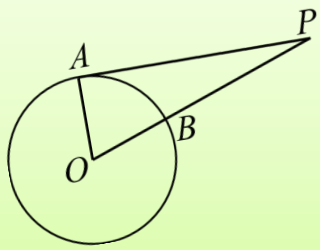
如圖，$P$ 為圓 $O$ 外一點，$\overleftrightarrow{PA}$ 與 $\overleftrightarrow{PB}$ 為圓 $O$ 的兩條切線，$A$、$B$ 為切點。
連接$\overline{OA}$、$\overline{OB}$ 和$\overline{OP}$，$\overline{AP}\perp\overline{OA}$，$\overline{BP}\perp\overline{OB}$，$\overline{OA}=\overline{OB}=$ r
在直角△$OAP$ 中，
$\overline{PA}^2=\overline{PO}^2-\overline{OA}^2=\overline{PO}^2-r^2=\overline{PO}^2-\overline{OB}^2=\overline{PB}^2$
得 $\overline{PA}=\overline{PB}$。

答：$\overline{PA}$和$\overline{PB}$ 會等長

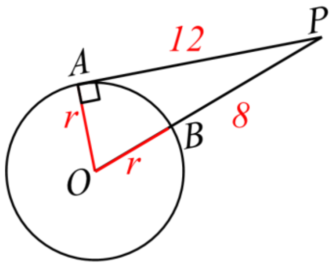
$P$ 為圓 $O$ 外一點，過 $P$ 點與圓 $O$ 相切的切線有兩條，
若 $A$、$B$ 為切點，
則 P 點到圓 O 的兩條**切線段** $\overline{PA}$、$\overline{PB}$ 會等長。
即 $\overline{PA}=\overline{PB}$，
簡稱為「切線段等長」。




(4) 如圖，$\overleftrightarrow{AP}$ 為圓 $O$ 的切線，$A$ 為切點，$\overline{OP}$ 交圓 $O$ 於 $B$ 點，若 $\overline{AP}=12$，$\overline{BP}=8$，則圓 $O$ 的半徑為何？




**解：**




$\because A$ 為切點， $\therefore \angle OAP=90^\circ$

設半徑$=r$，$\overline{PO}=\overline{BP}+r=8+r$

圓 $O$ 的半徑 $r^2=\overline{PO}^2-\overline{PA}^2=(8+r)^2-12^2$

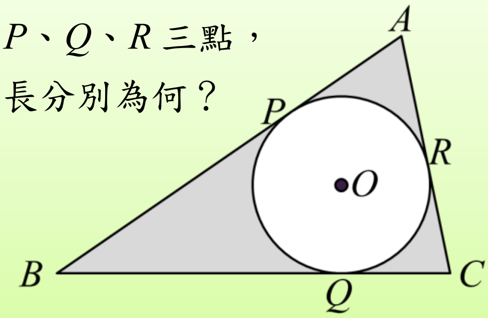
$r^2=64+16r+r^2-144$

$16r=80$

$r=5$

答: 5

(5) 如圖，$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{AC}$三邊分別與圓 $O$ 相切於 $P$、$Q$、$R$ 三點，$\overline{AP}=6$，$\overline{BQ}=10$，$\overline{CR}=5$，則△ABC 的三邊長分別為何？




**解：**

$\because$ $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{AC}$三邊分別與圓 $O$ 相切於 $P$、$Q$、$R$ 三點

$\therefore$ $\overline{AP}=\overline{AR}=6$，$\overline{BQ}=\overline{BP}=10$，$\overline{CR}=\overline{CQ}=5$

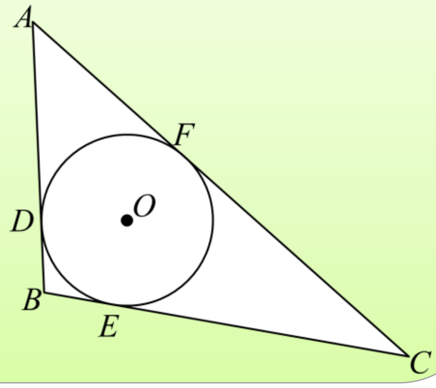
$\overline{AB}=\overline{AP}+\overline{BP}=6+10=16$、

$\overline{BC}=\overline{BQ}+\overline{CQ}=10+5=15$、

$\overline{AC}=\overline{AR}+\overline{CR}=5+6=11$

答： $\overline{AB}=16$，$\overline{BC}=15$、$\overline{AC}=11$

(5) 如圖，$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{AC}$三邊分別與圓 $O$ 相切於 $D$、$E$、$F$ 三點，
$\overline{AB}=10$，$\overline{BC}=12$，$\overline{AC}=18$，則$\overline{AC}$ =？




**解：**

方法一

∵ $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{AC}$三邊分別與圓 $O$ 相切於 $D$、$E$、$F$ 三點，

∵圓外一點到此圓的兩切線段長相等，

∴可令 $\overline{AD}=\overline{AF}=a$，$\overline{BD}=\overline{BE}=b$，$\overline{CE}=\overline{CF}=c$

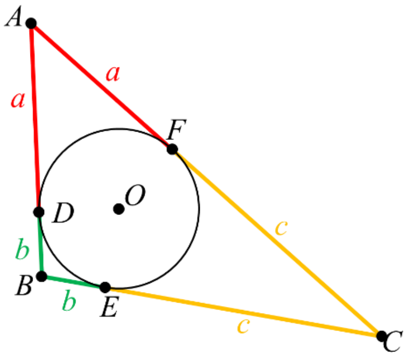
∵ $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AC}=10+12+18=40$

$(a+b)+(b+c)+(a+c)=40$

∴ $a+b+c=20$

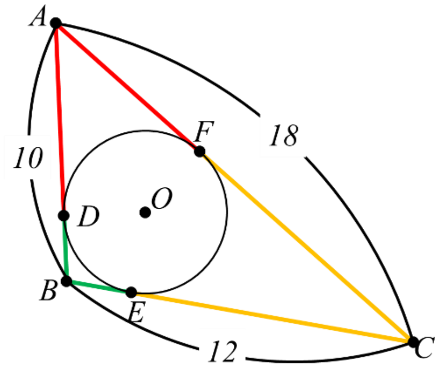
∵ $b+c=12$

∴ $a=8$



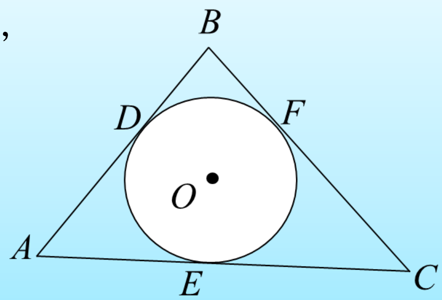

方法二:

$\overline{AD}=\frac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{AC}-\overline{BC})=\frac{1}{2}(10+18-12)=8$

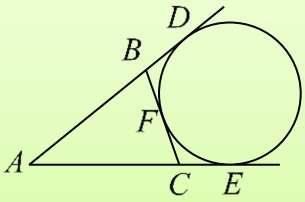



隨堂練習

如圖，$\triangle ABC$ 三邊分別為圓 $O$ 相切於 $D$、$E$、$F$ 三點，
若 $\overline{AB}=9$，$\overline{BC}=10$，$\overline{AC}=11$，求 $\overline{BF}$ 。



(6) 如圖，$\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{AE}$、$\overline{BC}$ 分別與圓切於 $D$、$E$、$F$ 三點，
若切線段 $\overline{AD}$、$\overline{AE}$ 皆為 12，則 $\triangle ABC$ 的周長為？




**解：**

$\because$ $\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{AE}$、$\overline{BC}$ 分別與圓切於 $D$、$E$、$F$ 三點

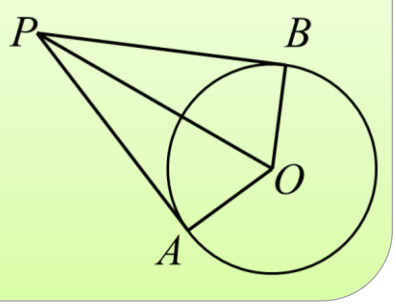
$\therefore$ $\overline{AD}=\overline{AE}$，$\overline{BD}=\overline{BF}$，$\overline{CE}=\overline{CF}$，

$\overline{BC}=\overline{BF}+\overline{CF}$

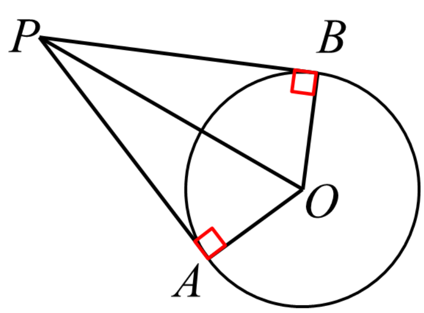
$\triangle ABC$ 的周長$=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AC}=\overline{AB}+\overline{BF}+\overline{CF}+\overline{AC}=\overline{AD}+\overline{AE}=2\times12=24$

答: 24

(7) $P$ 是圓 $O$ 外一點，$\overline{PA}$、$\overline{PB}$ 為過 $P$ 點至圓 $O$ 的兩條切線，
$A$ 與 $B$ 是切點，若 $\angle AOB=150°$，則 $\angle APB=$？




**解：**




$\because$ $\overline{PA}$、$\overline{PB}$ 為過 $P$ 點至圓 $O$ 的兩條切線

$\therefore$ $\overline{PA}\perp\overline{OA}$，$\overline{PB}\perp\overline{OB}$，$\angle PBO=90°$，$\angle PAO=90°$

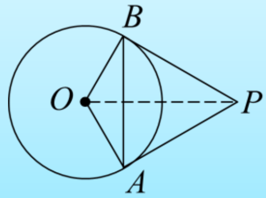
四邊形 $OAPB$ 的內角和$=360°$

$\because \angle AOB=150°$ $\therefore \angle APB=30°$

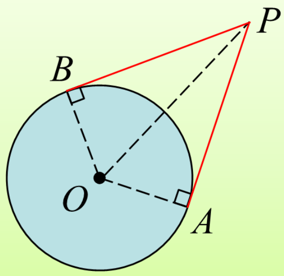
答: $\angle APB=30°$

## 隨堂練習

$P$ 是圓 $O$ 外一點，$\overline{PA}$、$\overline{PB}$ 為過 $P$ 點至圓 $O$ 的兩條切線，$A$ 與 $B$ 是切點，若 $\angle AOB = 130°$，則 $\angle APB =$ ？




(8) 如圖，直線 $PA$、$PB$ 為圓 $O$ 的切線，$A$、$B$ 為切點，請問四邊形 PBOA 是何種四邊形？




**解：**

因為 $A$、$B$ 是圓上的點，所以$\overline{OA} = \overline{OB}$ 為圓 $O$ 的半徑，

又 $\overline{PA}$、$\overline{PB}$ 都是 $P$ 對圓 $O$ 的切線段，所以$\overline{PA} = \overline{PB}$。

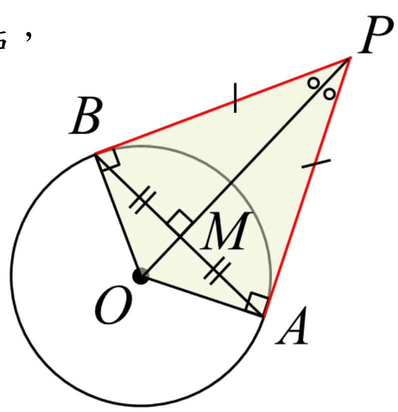
因$\overline{OA} = \overline{OB}$ 且 $\overline{PA} = \overline{PB}$，故 $PBOA$ 為箏形。

$P$ 為圓 $O$ 外一點，$A$、$B$ 為圓 O 的切點，
則 $PBOA$ 為箏形，因此

(1) $\overline{PO}$ 垂直平分 $\overline{AB}$。

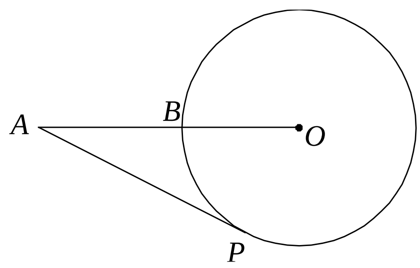
(2) $\overline{PO}$ 為 $\angle APB$ 的角平分線，

$\overline{OP}$也是 $\angle AOB$ 的角平分線。

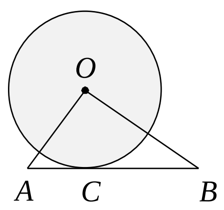



## 小試身手

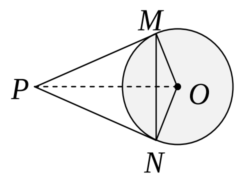
1. $\overline{AP}$ 切圓 $O$ 於 $P$ 點，$\overline{OA}=25$，$\overline{OB}=7$，則 $\overline{AP}=$______




2. 如右圖，直線 $AB$ 為圓 $O$ 的切線，切點為 $C$，若 $\overline{OA}=5$，$\overline{AC}=3$，$\overline{BC}=6$，則 $\overline{OB}=$______。




3. 如右圖，$P$ 為圓 $O$ 外一點，$\overleftrightarrow{PM}$、$\overleftrightarrow{PN}$ 為圓 $O$ 的切線，$M$、$N$ 為切點，已知圓 $O$ 半徑為 5，$\overline{OP}=13$，則：




(1) 四邊形 $OMPN$ 的周長＝______。

(2) 四邊形 $OMPN$ 的面積＝______。

(3) $\angle MON+\angle MPN=$______度。

(4) $\overline{MN}=$______。

教育部國民及學前教育署 編

# 國民中學 學生學習扶助教材 9 年級數學