

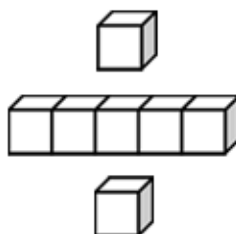


基本學習內容：SC-9-7-3

弦心距

班級：_____

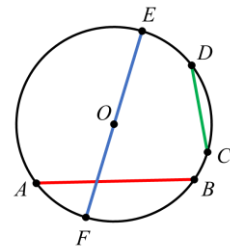
姓名：_____



◎複習活動

連接圓周上相異兩點的線段稱為**弦**。

如右圖， \overline{AB} 、 \overline{CD} 、 \overline{EF} 都是圓 O 的弦。

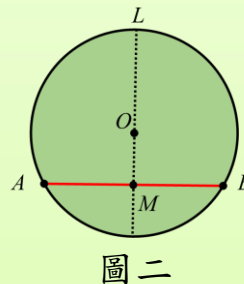
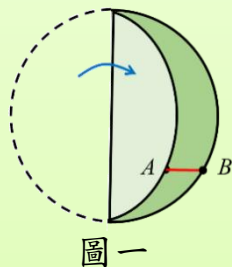


(1) 請剪下附件，已知 \overline{AB} 是圓 O 的一條弦，依照下列步驟觀察圓心與弦的關係：

步驟一：將圓對摺，使得 A 、 B 兩點疊合在一起，如圖一。

步驟二：打開圓 O ，摺線 L 為圓 O 的對稱軸， L 與 \overline{AB} 的交點為 M 。

如圖二。



請回答下列問題：

- ① \overline{AM} 和 \overline{BM} 是否一樣長？
- ② 摺線 L 是否會垂直 \overline{AB} ？
- ③ 摺線 L 是否會通過圓心 O ？

解：

- ① 因為 A 、 B 為對稱點，所以 $\overline{AM} = \overline{BM}$ 。
- ② 將 \overline{AB} 對摺後得到摺線 L ，所以摺線 L 是 \overline{AB} 的對稱軸。
對稱軸一定會垂直對稱點的連線，所以摺線 L 會垂直 \overline{AB} 。
所以摺線 L 是 \overline{AB} 的垂直平分線。
- ③ 因為 O 是圓心， $\overline{OA} = \overline{OB}$ = 半徑，所以 $\triangle OAB$ 是等腰三角形。
則過 $\triangle OAB$ 底邊的垂直平分線 L 會通過頂點 O 。

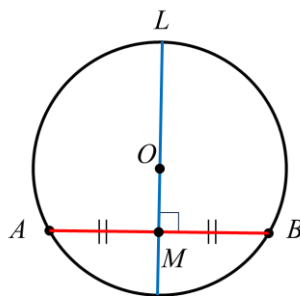


如右圖，直線 L 是 \overline{AB} 的中垂線， M 點為 L 與 \overline{AB} 的交點，則：

1. 弦的中垂線一定會通過圓心，

也就是 \overline{OM} 垂直平分 \overline{AB} 。

2. \overline{OM} 的長稱為弦 \overline{AB} 的弦心距。

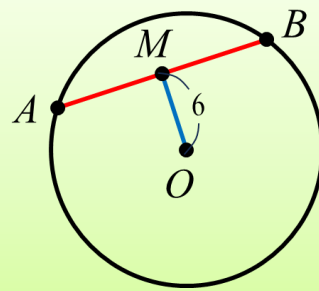


(2) 如右圖， \overline{AB} 是圓 O 上一弦， \overline{OM} 是弦心距。

已知圓 O 的半徑為 10 公分， $\overline{OM}=6$ 公分，則：

① $\overline{AM} = ?$

② $\overline{AB} = ?$



解：

因為 \overline{OM} 是弦心距，所以 \overline{OM} 垂直平分 \overline{AB} 。

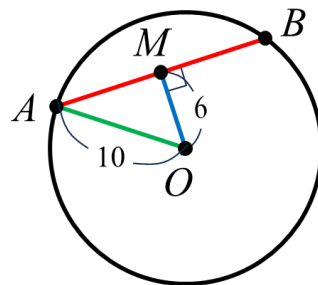
① 我先連接 \overline{OA} ， \overline{OA} 是半徑，所以 $\overline{OA}=10$ 。

因為 $\triangle OAM$ 是直角三角形，

利用畢氏定理得到 $\overline{OM}^2 + \overline{AM}^2 = \overline{OA}^2$ ，

將 $\overline{OA}=10$ 、 $\overline{OM}=6$ 代入計算：

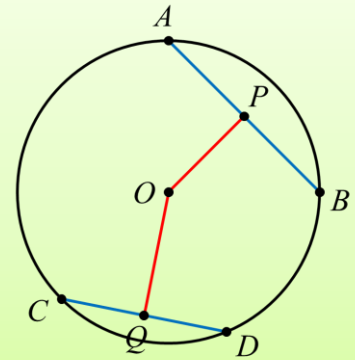
$$6^2 + \overline{AM}^2 = 10^2 \quad \rightarrow \quad \overline{AM}^2 = 10^2 - 6^2 = 64 \quad \rightarrow \quad \overline{AM} = 8$$



② 因為 \overline{OM} 垂直平分 \overline{AB} ，所以 $\overline{AM} = \overline{BM} = 8$ 。

$$\overline{AB} = 8 + 8 = 16。$$

- (3) 如右圖， \overline{AB} 、 \overline{CD} 是圓 O 上的兩弦，
 \overline{OP} 、 \overline{OQ} 分別是 \overline{AB} 、 \overline{CD} 的弦心距。
 已知圓 O 的半徑為 10 公分，
 $\overline{AB} = 16$ 公分、 $\overline{CD} = 12$ 公分，則：
 ① $\overline{OP} = ?$
 ② $\overline{OQ} = ?$



解：

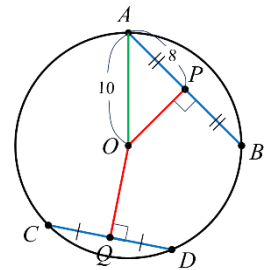
因為 \overline{OP} 、 \overline{OQ} 是 \overline{AB} 、 \overline{CD} 的弦心距，所以 \overline{OP} 垂直平分 \overline{AB} 、 \overline{OQ} 垂直平分 \overline{CD} 。

① 先連接 \overline{OA} ， \overline{OA} 是半徑，所以 $\overline{OA} = 10$ 。

因為 $\triangle OAP$ 是直角三角形，利用畢氏定理得到 $\overline{OP}^2 + \overline{PA}^2 = \overline{OA}^2$ ，

將 $\overline{OA} = 10$ 、 $\overline{PA} = \frac{1}{2}\overline{AB} = \frac{1}{2} \times 16 = 8$ 代入計算：

$$\overline{OP}^2 + 8^2 = 10^2 \rightarrow \overline{OP}^2 = 10^2 - 8^2 = 36 \rightarrow \overline{OP} = 6 \text{ (負不合)}$$

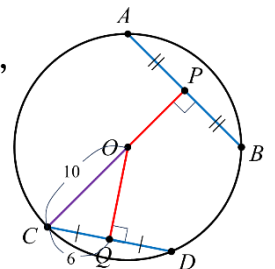


② 再連接 \overline{OC} ， \overline{OC} 也是半徑，所以 $\overline{OC} = 10$ 。

因為 $\triangle OCQ$ 是直角三角形，利用畢氏定理得到 $\overline{OQ}^2 + \overline{QC}^2 = \overline{OC}^2$ ，

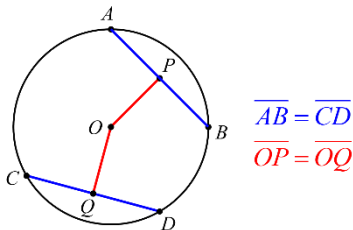
將 $\overline{OC} = 10$ 、 $\overline{QC} = \frac{1}{2}\overline{CD} = \frac{1}{2} \times 12 = 6$ 代入計算：

$$\overline{OQ}^2 + 6^2 = 10^2 \rightarrow \overline{OQ}^2 = 10^2 - 6^2 = 64 \rightarrow \overline{OQ} = 8 \text{ (負不合)}$$

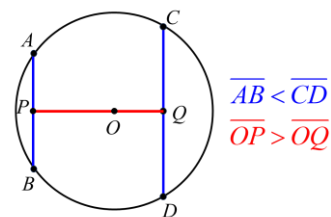


同一圓中，

(1) 弦等長，弦心距等長。



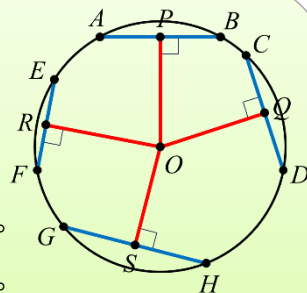
(2) 弦愈長，弦心距愈短。





(4) 如右圖， \overline{AB} 、 \overline{CD} 、 \overline{EF} 、 \overline{GH} 分別是圓 O 的四條弦，
已知 $\overline{AB}=8$ 、 \overline{AB} 的弦心距長為 3，則：

- ① 圓 O 的半徑＝？
- ② 已知 \overline{CD} 的弦心距長為 3，請比較 \overline{AB} 、 \overline{CD} 的大小關係。
- ③ 已知 \overline{EF} 的弦心距長為 4，請比較 \overline{AB} 、 \overline{EF} 的大小關係。
- ④ 已知 \overline{GH} 的弦心距長為 2，請比較 \overline{AB} 、 \overline{GH} 的大小關係。



解：

① 連接 \overline{OA} ， \overline{OA} 是半徑， $\triangle OAP$ 為直角三角形。

利用畢氏定理得到 $\overline{OP}^2 + \overline{PA}^2 = \overline{OA}^2$ ，

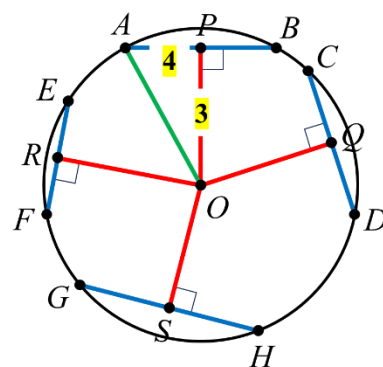
因為 \overline{AB} 的弦心距長為 3，所以 $\overline{OP}=3$ ，

且 $\overline{PA} = \frac{1}{2} \overline{AB} = \frac{1}{2} \times 8 = 4$ ，

代入畢氏定理計算：

$$3^2 + 4^2 = \overline{OA}^2 \rightarrow \overline{OA}^2 = 9 + 16 = 25 \rightarrow \overline{OA} = 5 \text{ (負不合)}$$

所以圓 O 的半徑＝5。



② 連接 \overline{OD} ， \overline{OD} 是半徑， $\triangle ODQ$ 為直角三角形。

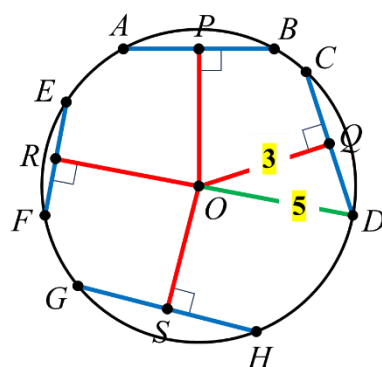
利用畢氏定理得到 $\overline{OQ}^2 + \overline{QD}^2 = \overline{OD}^2$ ，

因為 \overline{CD} 的弦心距長為 3，所以 $\overline{OQ}=3$ ，

將 $\overline{OQ}=3$ 、 $\overline{OD}=5$ 代入畢氏定理計算：

$$3^2 + \overline{QD}^2 = 5^2 \rightarrow \overline{QD}^2 = 25 - 9 = 16 \rightarrow \overline{QD} = 4 \text{ (負不合)},$$

得到 $\overline{CD} = 2\overline{QD} = 8 \rightarrow$ 所以 $\overline{AB} = \overline{CD}$ 。





基本學習內容：SC-9-7-3

③連接 \overline{OE} ， \overline{OE} 是半徑， $\triangle OER$ 為直角三角形。

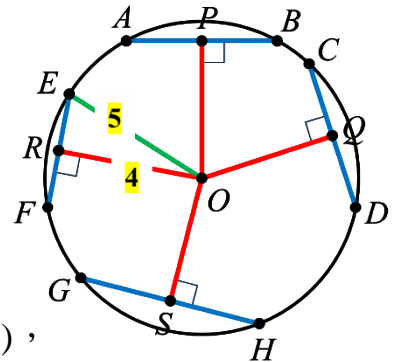
利用畢氏定理得到 $\overline{OR}^2 + \overline{RE}^2 = \overline{OE}^2$ ，

因為 \overline{EF} 的弦心距長為4，所以 $\overline{OR} = 4$ ，

將 $\overline{OR} = 4$ 、 $\overline{OE} = 5$ 代入畢氏定理計算：

$$4^2 + \overline{RE}^2 = 5^2 \rightarrow \overline{RE}^2 = 25 - 16 = 9 \rightarrow \overline{RE} = 3 (\text{負不合}),$$

得到 $\overline{EF} = 2\overline{RE} = 6 \rightarrow$ 所以 $\overline{AB} > \overline{EF}$ 。



④連接 \overline{OH} ， \overline{OH} 是半徑， $\triangle OHS$ 為直角三角形。

利用畢氏定理得到 $\overline{OS}^2 + \overline{SH}^2 = \overline{OH}^2$ ，

因為 \overline{GH} 的弦心距長為2，所以 $\overline{OS} = 2$ ，

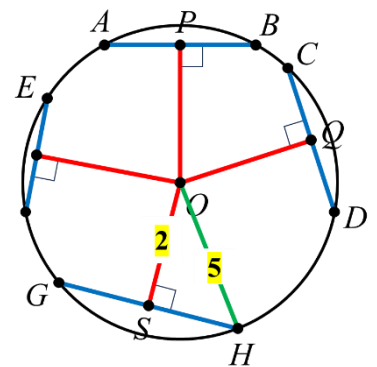
將 $\overline{OS} = 2$ 、 $\overline{OH} = 5$ 代入畢氏定理計算：

$$2^2 + \overline{SH}^2 = 5^2 \rightarrow \overline{SH}^2 = 25 - 4 = 21 \rightarrow \overline{SH} = \sqrt{21} (\text{負不合}),$$

得到 $\overline{GH} = 2\overline{SH} = 2\sqrt{21}$

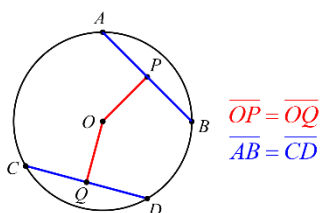
因為 $\overline{AB}^2 = 64$ 、 $\overline{GH}^2 = (2\sqrt{21})^2 = 4 \times 21 = 84$ ，

所以 $\overline{AB}^2 < \overline{GH}^2$ ，得到 $\overline{AB} < \overline{GH}$ 。



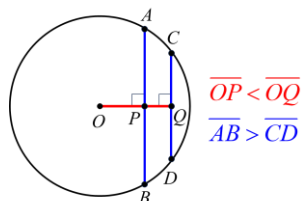
同一圓中，

(1)弦心距等長，弦等長。



$$\begin{aligned} \overline{OP} &= \overline{OQ} \\ \overline{AB} &= \overline{CD} \end{aligned}$$

(2)弦心距愈長，其弦愈短。



$$\begin{aligned} \overline{OP} &< \overline{OQ} \\ \overline{AB} &> \overline{CD} \end{aligned}$$





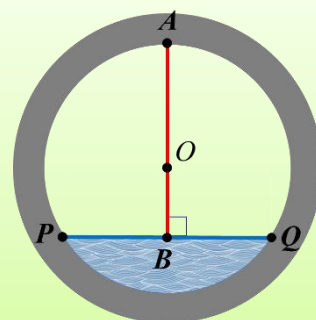
- (5) 已知在圓 O 中， \overline{OP} 、 \overline{OQ} 、 \overline{OR} 分別為 \overline{AB} 、 \overline{CD} 、 \overline{EF} 的弦心距。
如果 $\overline{OP} < \overline{OQ} < \overline{OR}$ ，請比較 \overline{AB} 、 \overline{CD} 、 \overline{EF} 的大小關係。

解：

我知道，在同一圓中，弦心距愈長，其弦愈短。

因為 $\overline{OP} < \overline{OQ} < \overline{OR}$ ，所以 $\overline{AB} > \overline{CD} > \overline{EF}$ 。

- (6) 如右圖，圓 O 為一個水管的橫切面。
水管裡裝有一些水，已知水面寬 $\overline{PQ} = 16$ 公分，
水面到水管頂端的高度 $\overline{AB} = 16$ 公分。
請問此水管的半徑 \overline{OP} 為多少公分？



解：

先假設水管的半徑為 x 公分，

如右圖，連接 \overline{OP} ，

\overline{OA} 、 \overline{OP} 都是半徑，所以 $\overline{OA} = \overline{OP} = x$ ，

得到 $\overline{OB} = 16 - x$ 。

觀察 $\triangle OPB$ ， $\triangle OPB$ 是直角三角形，

利用畢氏定理得到 $\overline{OB}^2 + \overline{PB}^2 = \overline{OP}^2$ ，

將 $\overline{OB} = 16 - x$ 、 $\overline{PB} = \frac{1}{2} \overline{PQ} = \frac{1}{2} \times 16 = 8$ 、 $\overline{OP} = x$ 代入計算：

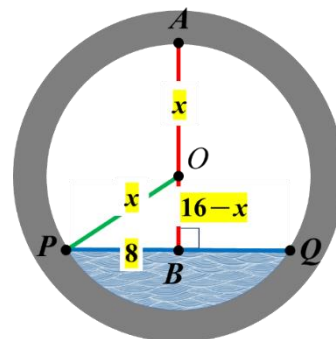
$$(16 - x)^2 + 8^2 = x^2$$

$$\rightarrow (16^2 - 2 \times 16 \times x + \cancel{x^2}) + 8^2 = \cancel{x^2}$$

$$\rightarrow -32x = -320$$

$$\rightarrow x = 10$$

所以水管的半徑 $\overline{OP} = 10$ 公分。





小試身手

1. 下列關於弦心距的敘述，哪些是正確的？答：_____。

甲：弦心距是圓心到弦的距離

乙：弦是弦心距的垂直平分線

丙：同一圓中，弦愈長，弦心距愈短

丁：同一圓中，弦心距愈短，弦愈短

戊：若兩條弦等長，則兩弦心距也一定等長。

(A) 甲乙丙丁戊 (B) 甲乙丙丁 (C) 甲乙丙 (D) 甲丙

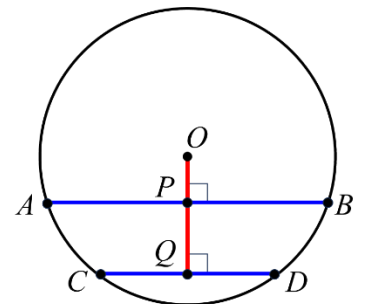
2. 如右圖， \overline{OP} 、 \overline{OQ} 分別為 \overline{AB} 、 \overline{CD} 兩弦的弦心距，且 O 、 P 、 Q 三點共線。

已知 $\overline{OP} = 7$ 、 $\overline{AB} = 48$ 、 $\overline{CD} = 40$ ，則：

(1) 圓 O 的半徑 = ?

(2) $\overline{OQ} = ?$

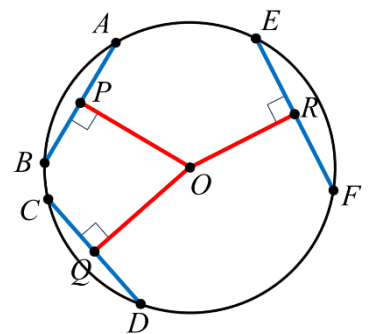
(3) $\overline{PQ} = ?$



3. 如右圖，已知 \overline{OP} 、 \overline{OQ} 、 \overline{OR} 分別為 \overline{AB} 、 \overline{CD} 、 \overline{EF}

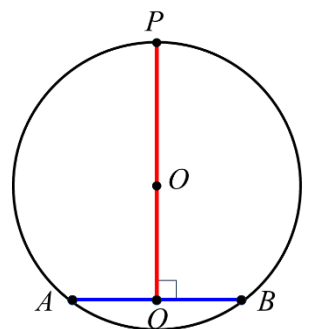
三弦的弦心距。如果 $\overline{AB} < \overline{CD} < \overline{EF}$ ，

則 \overline{OP} 、 \overline{OQ} 、 \overline{OR} 的大小關係為何？答：_____。



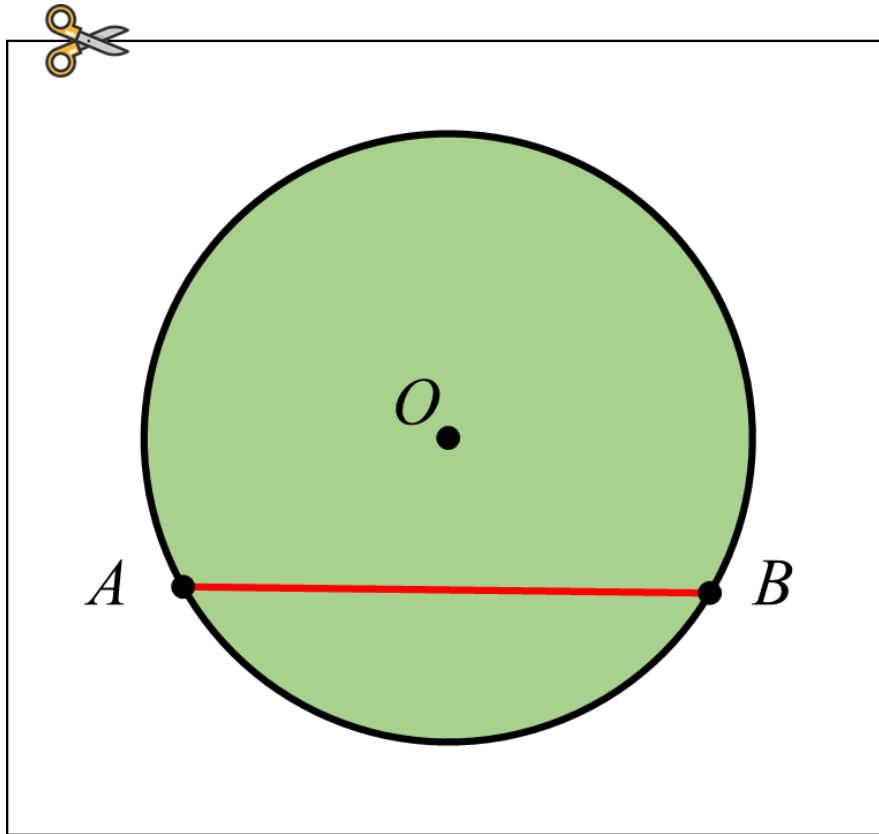
4. 如右圖， \overline{AB} 為圓 O 的一弦，過 O 點作 $\overline{PQ} \perp \overline{AB}$ ，分別交圓 O 於 P 點、交

\overline{AB} 於 Q 點。已知 $\overline{AB} = 16$ 、 $\overline{PQ} = 32$ ，求圓 O 的半徑為多少？





附件





教育部國民及學前教育署 編

國民中學

學生學習扶助教材

9 年級數學

