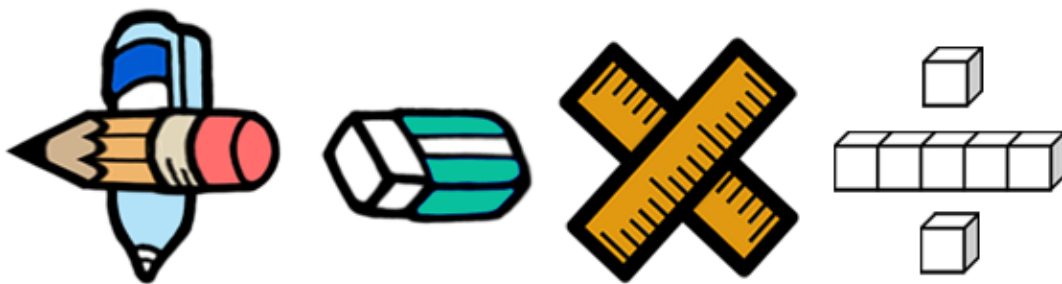


基本學習內容：NC-7-2-1

質因數分解

【教師版】





基本學習內容：NC-7-2-1

學習內容：

N-7-2 質因數分解的標準分解式：質因數分解的標準分解式，並能用於求因數及倍數的問題。

基本學習內容：

NC-7-2-1 質因數分解。

基本學習表現：

NCP-7-2-1-1 理解因數、倍數、公因數、公倍數、最大公因數、最小公倍數、質因數、質因數分解等。

NCP-7-2-1-2 熟練不大於 100 的質因數分解的計算。

NCP-7-2-1-3 理解標準分解式表示某整數的質因數分解。



概要說明：

- 本基本學習內容 NC-7-2-1 為 NC-6-1-1 之後續學習概念，故學生已能利用短除法做質因數分解。

本基本學習內容幫助學生將質因數分解後寫成標準分解式。

- 質因數分解：將一正整數完全分解為若干個質因數連乘積的過程。
- 教師可利用乘法或除法，幫助學生複習「因數的意義」，說明如下：多數學生已經掌握整數情境的乘除互逆，因此教師可以透過乘法算式「 $5 \times 8 = 40$ ，5、8 以及 40 都是整數」，幫助學生認識 5 是 40 的因數，也可以透過除法算式「 $40 \div 5 = 8 \dots 0$ ，40、5 以及 8 都是整數」，幫助學生認識 5 是 40 的因數。
- 當數字變大時，無法直接利用乘法算式找出因數，以「23 是否為 12581 的因數」為例，學生不易透過乘法算式「 $23 \times (\quad) = 12581$ 」來判斷，必須應用乘除互逆透過除法算式「 $12581 \div 23$ 」來判斷。
- 教師可利用乘法或除法，幫助學生複習「倍數的意義」，說明如下：透過列舉使學生可以理解「 $7 \times 1 = 7$ 、 $7 \times 2 = 14$ 、 $7 \times 3 = 21$ 、...都是 7 的倍數」。但是當數字變大時，無法直接利用乘法算式判斷是否為倍數，以「12581 是否為 23 的倍數」為例，學生不易透過乘法算式「 $23 \times (\quad) = 12581$ 」來判斷「12581 是否為 23 的倍數」，仍必須應用乘除互逆，透過除法算式「 $12581 \div 23$ 」來判斷。
- 當學生都了解「因數和倍數的意義」時、教師可幫助學生建立「因數和倍數的關係」，即「甲是乙的因數，則乙是甲的倍數」。以「23 和 12581」為例，學生透過算式「 $12581 \div 23 = 547$ 」可觀察到「23 是 12581 的因數」，再由乘除互逆透可得到 算式「 $23 \times 547 = 12581$ 」而觀察到「12581 是 23 的倍數」。因此，學生均可從乘法算式或除法算式，判斷兩數的因數和倍數關係，即
 - (一) 從乘法算式 $12 = 2 \times 6$ 可以理解「2 和 6 都是 12 的因數」、「12 是 2 的倍數」、「12 是 6 的倍數」。
 - (二) 從除法算式 $12 \div 2 = 6$ 可以理解「2 和 6 都是 12 的因數」、「12 是 2 的倍數」、「12 是 6 的倍數」。
 必要時，也可以進行下列活動：
 - (三) 從除法算式 $82 \div 6 = 13 \dots 4$ 可以理解「82 不是 6 的倍數」、「82 也不是 13 的倍數」、「6 不是 82 的因數」、「13 不是 82 的因數」。
- 以 $a_1 \times a_2 \times a_3$ 的質因數分解為例，本基本學習內容限制 a_1, a_2, a_3 均不超過 100。

◎2、3、5的倍數判別法

國小已學過2、3、5的倍數的判別法如下：

**【2的倍數】**

如果一個整數的個位數字是0、2、4、6、8，那麼這個數一定是2的倍數；否則就不是2的倍數。

例如：

- (1) 10、22、34、46、58 都是2的倍數。
- (2) 51、63、75、87、99 都不是2的倍數。

【3的倍數】

如果一個整數的各位數字和是3的倍數，那麼這個數一定是3的倍數。

例如：

- (1) 123 的各位數字和為 $1+2+3=6$ ，因為6是3的倍數，所以123是3的倍數。
- (2) 1234 的各位數字和為 $1+2+3+4=10$ ，因為10不是3的倍數，所以1234不是3的倍數。

**【5的倍數】**

如果一個整數的個位數字是0、5，那麼這個數一定是5的倍數；否則就不是5的倍數。

例如：60、75 都是5的倍數。





教材內容說明：

1. 本教材第 1~2 頁的教學重點是複習 2、3、5 的倍數判別法。



基本學習內容：NC-7-2-1 質因數分解

(1) 已知 $3415\square$ 是五位數，請回答下列問題：

- ① 若 $3415\square$ 是 2 的倍數，則 \square 中可填入哪些數？
- ② 若 $3415\square$ 是 5 的倍數，則 \square 中可填入哪些數？
- ③ 若 $3415\square$ 是 3 的倍數，則 \square 中可填入哪些數？

答：

- ① 若 $3415\square$ 是 2 的倍數，則整數的個位數字是 0、2、4、6、8，

$\square = 0、2、4、6、8$

- ② 若 $3415\square$ 是 5 的倍數，則整數的個位數字是 0、5，

$\square = 0、5$

- ③ 若 $3415\square$ 是 3 的倍數，整數的各位數字和是 3 的倍數，

$$3+4+1+5=13$$

若 $\square = 0$ ， $13+0=13$ ，非 3 的倍數，不合；

若 $\square = 1$ ， $13+1=14$ ，非 3 的倍數，不合；

若 $\square = 2$ ， $13+2=15$ ，為 3 的倍數，合；

若 $\square = 3$ ， $13+3=16$ ，非 3 的倍數，不合；

若 $\square = 4$ ， $13+4=17$ ，非 3 的倍數，不合；

若 $\square = 5$ ， $13+5=18$ ，為 3 的倍數，合；

若 $\square = 6$ ， $13+6=19$ ，非 3 的倍數，不合；

若 $\square = 7$ ， $13+7=20$ ，非 3 的倍數，不合；

若 $\square = 8$ ， $13+8=21$ ，為 3 的倍數，合；

若 $\square = 9$ ， $13+9=22$ ，非 3 的倍數，不合；

所以 $\square = 2、5、8$ 。



隨堂練習

(1) 有一個三位數 $34\square$ ，是 2 的倍數，但不是 5 的倍數，則 $\square = \underline{2,4,6,8}$ 。

(2) 有一個三位數 $45\square$ ，是 3 的倍數，則 $\square = \underline{0,3,6,9}$ 。



教材內容說明：

1. 本教材第 1~2 頁的教學重點是複習 2、3、5 的倍數判別法。
2. 本頁教學重點從題目給的條件，寫出 3415□中，分別為 2、3、5 的倍數時，□所代表的數。
3. 本頁隨堂練習為檢查學生對 2、3、5 倍數的限制下，□所代表的數。

基本學習內容：NC-7-2-1 質因數分解

◎11 的倍數判別法

(1) 已知 100 除 11 餘 1，1000 除 11 餘 10，問：

① $100+1000$ 除以 11 餘多少？

② $100 \times 4 + 1000 \times 6$ 除以 11 餘多少？

答：

① $\because 100 = 11 \times 9 + 1$

$1000 = 11 \times 90 + 10$

得 $100+1000 = 11 \times 9 + 1 + 11 \times 90 + 10 = 11 \times (9+90) + 1+10 = 11 \times (9+90) + 11$ ，
所以餘 0。

② $\because 100 \times 4 + 1000 \times 6 = (11 \times 9 + 1) \times 4 + (11 \times 90 + 10) \times 6$

$= 11 \times 9 \times 4 + 1 \times 4 + 11 \times 90 \times 6 + 10 \times 6$

$= 11 \times (9 \times 4 + 90 \times 6) + 64$

$= 11 \times (9 \times 4 + 90 \times 6) + 11 \times 5 + 9$

所以餘 9。

我們可以用計算機找尋最接近 10、100、1000、10000、100000 之 11 的倍數：

例如： $1000 \div 11 = 90.9090 \dots$ (較接近整數 91)，

故最接近 1000 之 11 的倍數為 $11 \times 91 = 1,001$

位值	10	100	1,000	10,000	100,000
最接近之 11 的倍數	11 = 11×1	99 = 11×9	1,001 = 11×91	9,999 = 11×909	100,001 = $11 \times 9,091$

要判別 56419 是不是 11 的倍數，我們可以將 56419 改寫如下：

56419

$= 5 \times 10000 + 6 \times 1000 + 4 \times 100 + 1 \times 10 + 9 \times 1$

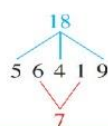
$= 5 \times (9999 + 1) + 6 \times (1001 - 1) + 4 \times (99 + 1) + 1 \times (11 - 1) + 9 \times 1$

$= 5 \times 9999 + 5 + 6 \times 1001 - 6 + 4 \times 99 + 4 + 1 \times 11 - 1 + 9$

$= 5 \times 909 \times 11 + 5 + 6 \times 91 \times 11 - 6 + 4 \times 9 \times 11 + 4 + 1 \times 11 - 1 + 9$

$= (5 \times 909 + 6 \times 91 + 4 \times 9 + 1) \times 11 + 5 - 6 + 4 - 1 + 9$

~~~~~為 11 的倍數~~~~~ ~~~和為 11~~~~



從首位算過來，第 1、3、5 位的數字和等於  $5+4+9=18$ ，

第 2、4 位的數字和等於  $6+1=7$ ，因為  $18-7=11$ ，

其為 11 的倍數，所以 56419 是 11 的倍數。

如果一個整數從首位算過來，其「奇位數字和」與「偶位數字和」的差是 11 的倍數（包含 0），則這個整數就是 11 的倍數。







**教材內容說明：**

1. 本教材第 3～5 頁的教學重點是 11 的倍數判別法。
2. 第(1)題先從除法與餘數理解，除 11 後的餘數，跟 11 判別髮的原因相關。
3. 本頁教學重點整理 11 倍數的判別法：如果一個整數從首位算過來，其「奇位數字和」與「偶位數字和」的差是 11 的倍數（包含 0），則這個整數就是 11 的倍數。



## 基本學習內容：NC-7-2-1

## 基本學習內容：NC-7-2-1 質因數分解

- (2) ① 判別 1991 是不是 11 的倍數？  
 ② 判別 68886 是不是 11 的倍數？

答：

- ①  $\because$  1991 的奇位數字和  $= 9 + 1 = 10$   
 1991 的偶位數字和  $= 1 + 9 = 10$   
 「奇位數字和」與「偶位數字和」的差  $= 10 - 10 = 0$   
 0 是 11 的倍數，所以 1991 是 11 的倍數。

偶位數字的和  
 $1 + 9 = 10$   
 1991  
 $9 + 1 = 10$   
 奇位數字的和

- ②  $\because$  68886 的奇位數字和  $= 6 + 8 + 6 = 20$   
 68886 的偶位數字和  $= 8 + 8 = 16$   
 「奇位數字和」與「偶位數字和」的差  $= 20 - 16 = 4$   
 4 不是 11 的倍數，所以 68886 不是 11 的倍數。

奇位數字的和  
 $6 + 8 + 6 = 20$   
 68886  
 $8 + 8 = 16$   
 偶位數字的和

- (3) 若四位數  $20\square 7$  是 11 的倍數，則  $\square$  中可以填入哪些數？

答：

- $\because$   $20\square 7$  的奇位數字和  $= 0 + 7 = 7$   
 $20\square 7$  的偶位數字和  $= 2 + \square$   
 「奇位數字和」與「偶位數字和」的差  $= 11$  的倍數  
 $\square$  最小是 0，最大是 9，所以  $(2 + \square)$  最小是 2， $(2 + \square)$  最大是 11，  
 所以  $(2 + \square) - 7$  中，要是 11 的倍數，  
 只能  $(2 + \square) - 7 = 0$  所以  $\square = 5$ 。

偶位數字的和  
 $2 + \square$   
 $20\square 7$   
 $0 + 7 = 7$   
 奇位數字的和



## 隨堂練習

- (1) 判別 13579、123321 是為 11 的倍數？ 13579 不是，123321 是。  
 (2) 若  $3\square 156$  是 11 的倍數，則  $\square$  中可以填入哪些數？ 4。



**教材內容說明：**

1. 本教材第 3～4 頁的教學重點是 11 的倍數判別法。
2. 第(2)題教學重點請學生利用「奇位數字和」與「偶位數字和」的差檢查是否為 11 的倍數。
3. 第(3)題的教學重點式應用 11 倍數判別法，求出□內所代表的數。
4. 本頁隨堂練習檢查學生能否活用 11 的倍數判別法解題。

基本學習內容：NC-7-2-1 質因數分解

### ◎質因數分解

國小時學過以短除法做質因數分解，我們先來複習因數、倍數及質因數的觀念。



#### 【因數和倍數】

如果  $a$ 、 $b$ 、 $c$  為任意三個正整數，而且  $a \div b = c$ ，  
即  $a = b \times c$ ，則稱

(1)  $b$ 、 $c$  是  $a$  的因數。(2)  $a$  是  $b$ 、 $c$  的倍數。



#### 【質因數】

如果一個整數的因數也是質數，我們稱此因數為這個整數的質因數。

例如：18 的因數有 1、2、3、6、9、18。其中 2、3 是質數，  
所以 2、3 就是 18 的質因數。

(1) 請找出下列各數的質因數

①78 ②91

解：

①  $78 = 2 \times 39 = 2 \times 3 \times 13$

所以 78 的質因數為 2、3、13

② 91

我們先由小到大列出一些質數 2、3、5、7，再檢查是否為 91 的因數。

因為 91 是奇數，所以不是 2 的倍數。

因為  $9+1=10$ ，各個位數和相加不是 3 的倍數，所以也不是 3 的倍數。

因為 91 的個位數字是 1，也不是 5 的倍數。

因為  $91 \div 7 = 13$ ，是 7 的倍數。

因為 13 是質數，所以  $91 = 7 \times 13$ ，91 的因數有 1、7、13、91，

所有 91 的質因數有 7、13。

答：①78 的質因數有 2、3、13。②91 的質因數為 7、13。

如果這個數比較容易分解成質因數連乘積，就從質因數連乘積中找質因數。  
如果這個數不容易分解成質因數連乘積時，就會從 2、3、5、7、11 等質數  
去判斷是否為它的因數，再找出質因數。





**教材內容說明：**

1. 本教材第 5～8 頁的教學重點是學習質因數分解法的標準分解式。
2. 本頁教學重點是複習因數、倍數與質因數的概念。
3. 第(1)題請學生利用質因數連乘積，從中找出質因數。

基本學習內容：NC-7-2-1 質因數分解



隨堂練習

(1) 請找出下列各數的質因數

①51 ②76

答案：① 3, 17

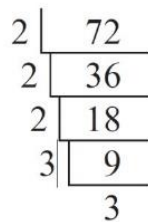
② 2, 19

(2) ①請將 72 寫成質因數的連乘積。

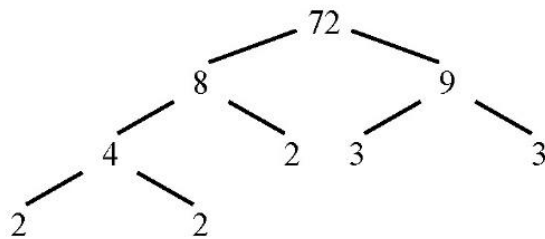
②請將 72 的質因數的連乘積改寫成指數記法。

解：

①在國小曾經學過，利用短除法或是樹狀圖將一個合數分解，並寫成它的質因數連乘積。如下所示： $72=2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$ 。



【利用質因數的短除法】



【樹狀圖質因數分解】

答： $72=2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$

② 因為  $2 \times 2 \times 2$  可以記成  $=2^3$

$3 \times 3$  可以記成  $=3^2$

所以  $72=2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3=2^3 \times 3^2$

重點整理

(1) 像這樣將一個合數分解成質因數的連乘積的過程，我們稱之為質因數分解。

(2) 將質因數分解寫成指數的形式，並將相異質因數由小排到大，這樣的表示法就稱為標準分解式。

例如： $72=2^3 \times 3^2$ ，我們說  $2^3 \times 3^2$  是 72 的標準分解式。



**教材內容說明：**

1. 本教材第 5～8 頁的教學重點是學習質因數分解法的標準分解式。
2. 本頁隨堂練習是檢驗學生能否找出某數的質因數。
3. 本頁教學重點是複習利用短除法與樹狀圖的方式，寫出質因數的連乘積。
4. 第(2)題請學生寫出 72 的連乘積，並改寫成指數記法，並歸納出將質因數分解寫成指數的形式，並將相異質因數由小排到大，這樣的表示法就稱為**標準分解式**。
5. 本頁重點整理告訴學生標準分解式的寫法。





基本學習內容：NC-7-2-1

基本學習內容：NC-7-2-1 質因數分解

(3) 判斷下列哪些是標準分解式？

- ①  $2 \times 3 \times 5$     ②  $5^3 \times 3 \times 2$     ③  $2 \times 2 \times 3^2$     ④  $2 \times 6 \times 49$     ⑤  $7 \times 17^2 \times 23$

解：

|                             | 相異質因數         | 寫成指數形式 | 由小排到大 | 是否為標準分解式 |
|-----------------------------|---------------|--------|-------|----------|
| ① $2 \times 3 \times 5$     | 2、3、5 均為質因數   | 有      | 有     | 是        |
| ② $5^3 \times 3 \times 2$   | 2、3、5 均為質因數   | 有      | 否     | 否        |
| ③ $2 \times 2 \times 3^2$   | 2、3 均為質因數     | 否      | 有     | 否        |
| ④ $2 \times 6 \times 49$    | 6、49 非質數      | 否      | 有     | 否        |
| ⑤ $7 \times 17^2 \times 23$ | 7、17、23 均為質因數 | 有      | 有     | 是        |

答：①⑤

(4) 請列出 180 的質因數，並寫出 180 的標準分解式。

解：

| 短除法                                                                                                                             | 質因數   | 質因數分解                                         | 標準分解式                           |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|-----------------------------------------------|---------------------------------|
| $  \begin{array}{r}  2 \overline{) 180} \\  2 \overline{) 90} \\  3 \overline{) 45} \\  3 \overline{) 15} \\  5  \end{array}  $ | 2、3、5 | $180 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5$ | $180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$ |



**教材內容說明：**

1. 本教材第 6～8 頁的教學重點是學習質因數分解法的標準分解式。
2. 本頁教學重點是幫助學生寫出正確的標準分解式。
3. 第(3)題提供不同的指數記法連乘積，幫助學生判斷標準分解式的表示原則如下：  
質因數分解的標準分解式：
  - (1)因數從小至大、從左至右排列；
  - (2)質因數相同連乘時，以指數方式表示。
4. 第(4)題請學生列出 180 的質因數並記錄 180 的標準分解式。



基本學習內容：NC-7-2-1

基本學習內容：NC-7-2-1 質因數分解

(5) 下列何者可以表示成兩個質數的乘積？

- ①81    ②82    ③83    ④84

解：

$$\textcircled{1} 81 = 3^4$$

$$\textcircled{2} 82 = 2 \times 41$$

③83 為質數

$$\textcircled{4} 84 = 2^2 \times 3 \times 7$$

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 82} \\ 41 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 84} \\ 2 \overline{) 42} \\ 3 \overline{) 21} \\ 7 \end{array}$$

答：②84



隨堂練習

寫出下列各數的標準分解式並列出其質因數：

- (1) 105    (2) 660

答案：(1)  $105 = 3 \times 5 \times 7$ ，質因數=3, 5, 7

(2)  $660 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 11$ ，質因數=2, 3, 5, 11



**教材內容說明：**

1. 本教材第 6～9 頁的教學重點是學習質因數分解法的標準分解式。
2. 本頁第(5)題教學重點是檢驗學生是否理解題意，找出兩個質數相乘的乘積，此題為 109 年教育會考試題。
3. 本頁隨堂練習檢測學生是否理解標準分解式寫法與找出質因數。



基本學習內容：NC-7-2-1 質因數分解



小試身手

1. 若四位數  $395\square$  是 2 的倍數，但不是 5 的倍數，則  $\square$  可以填入哪些數？

答： 1, 2, 4, 6, 8 。

2. 若四位數  $20\square 8$  是 11 的倍數，則  $\square$  中可以填入哪些數？

答： 6 。

3. 將下列各數做質因數分解並寫出它的標準分解式。

(1)  $60 = \underline{2^2 \times 3 \times 5}$  。

(2)  $91 = \underline{7 \times 13}$  。

(3)  $110 = \underline{2 \times 5 \times 11}$  。

(4)  $180 = \underline{180 = 2^2 \times 3^2 \times 5}$  。

(5)  $240 = \underline{2^4 \times 3 \times 5}$  。



**教材內容說明：**

1. 本頁為小試身手。



教育部國民及學前教育署 編

# 國民中學

# 7 年級數學

學生學習扶助教材

