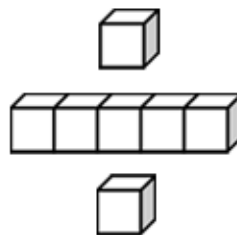


基本學習內容：NC-7-2-2

能用質因數分解法及短除法

求最大公因數及最小公倍數

【教師版】





基本學習內容：NC-7-2-2

學習內容：

N-7-2 質因數分解的標準分解式：質因數分解的標準分解式，並能用於求因數及倍數的問題。

基本學習內容：

NC-7-2-2 能用質因數分解法及短除法求最大公因數及最小公倍數。

基本學習表現：

NCP-7-2-2-1 理解質因數分解法，求出該兩數的最大公因數及最小公倍數。

NCP-7-2-2-2 熟練短除法求出兩整數的最大公因數及最小公倍數。

NCP-7-2-2-3 能將公因數與公倍數的觀念應用到生活上的相關問題。

概要說明：

- 基本學習內容 NC-7-2-2 為 NC-7-2-1 及 NC-6-2-1 之後續學習概念，故學生應該已經熟悉質因數分解法和短除法。本基本學習內容幫助學生運用短除法作質因數標準分解，及計算兩數的最大公因數及最小公倍數。
- 本基本學習內容建議「當學生都理解上述最大公因數和最小公倍數的求法後，再介紹最大公因數和最小公倍數的關係式： $(a, b) \cdot [a, b] = ab$ 」，其中 (a, b) 和 $[a, b]$ 分別代表 a, b 的最大公因數和最小公倍數。不要只教授最大公因數求法，而以公式 $[a, b] = ab(a, b)$ 處理 a, b 的最小公倍數的求法。理由為該公式只適合求兩數的最小公倍數，當求三數的最小公倍數時，並無變通的對應公式，學生容易產生迷思概念。
- 本基本學習內容不要求學生計算某整數的因數個數及「因數和」。
- 本基本學習內容不介紹「輾轉相除法」求最大公因數。
- 學生利用短除法直接計算三個(含三個)以上整數的最大公因數和最小公倍數，常會計算錯誤。究其原因，短除法計算三數的最大公因數時，短除法最後中止於「三數的最大公因數為 1」。相對地，短除法計算三數的最小公倍數時，短除法最後中止於「任兩數的最大公因數為 1」(三數兩兩互質)。因此，學生常混淆其短除法的計算規則。本基本學習內容建議解三數以上最大公因數時，學生可將三個數的因數均列出求解；亦可引導學生先找出兩數之公因數後，再檢驗這些公因數是否也為第三數的因數，找出三數的公因數。三數以上之最小公倍數亦然。



基本學習內容：NC-7-2-2 能用質因數分解法及短除法求最大公因數及最小公倍數

◎複習活動

- (1) ① 2×3 是否為 $2 \times 3 \times 7$ 的因數？
 ② 2×5 是否為 $2 \times 3 \times 7$ 的因數？
 ③ 2×2 是否為 $2 \times 3 \times 7$ 的因數？

解：

- ① (2×3) 為 $(2 \times 3) \times 7$ 的因數。
 ② 因為 $2 \times 3 \times 7$ 沒有質因數 5，無法寫成 $(2 \times 5) \times \square$ ，所以 2×5 不是它的因數。
 ③ 因為 $2 \times 3 \times 7$ 的質因數 2 只有一個，無法寫成 $(2 \times 2) \times \square$ ，所以 2×2 不是它的因數。

答：① 是 ② 是 ③ 不是

由上例可以發現，將甲數寫成質因數的連乘積，乙數是此質因數連乘積中部分算式的乘積，則乙數是甲的因數。

例如： 2×3 、 2×7 、 3×7 都是 $2 \times 3 \times 7$ 的因數。

如果丙數是合數，且不是甲數的質因數連乘積中部分算式的乘積所得，則丙數不是甲數的因數。

例如： 2×2 、 2×5 都不是 $2 \times 3 \times 7$ 的因數。



- (2) 已知 $42 = 2 \times 3 \times 7$ ，求 42 的所有因數。

解：

方法一： $42 = 1 \times 42$
 $= 2 \times 21$
 $= 3 \times 14$
 $= 6 \times 7$

所以 42 的因數有 1、2、3、6、7、14、21、42

方法二：先列出 1，再列出 42 的質因數，得 2、3、7

再列出是合數也是 42 的因數，得

兩個質因數相乘： 2×3 、 2×7 、 3×7

三個質因數相乘： $2 \times 3 \times 7$

所以 42 的因數有 1、2、3、7、 2×3 、 2×7 、 3×7 、 $2 \times 3 \times 7$

答：1、2、3、7、 2×3 、 2×7 、 3×7 、 $2 \times 3 \times 7$



隨堂練習

- (1) 已知 $30 = 2 \times 3 \times 5$ ，求 30 的所有因數。答：1、2、3、5、 2×3 、 2×5 、 3×5 、 $2 \times 3 \times 5$



教材內容說明：

1. 本教材第 1~2 頁為複習活動，複習因數並能從質因數連乘積找出所有因數。
2. 第(1)題能從質因數連乘積判斷出因數
3. 第(2)題從已知質因數連乘積找出所有因數。

本教材提供兩個方法

方法一：從倆倆的因數乘積找到所有因數。

方法二：從質因數連乘積，找出 1 與質因數，再兩個質因數相乘，

再三個質因數相乘，直到找到所有質因數為止。

4. 本頁隨堂練習檢驗學生能否利用質因數連乘積找出所有因數。



基本學習內容：NC-7-2-2 能用質因數分解法及短除法求最大公因數及最小公倍數

◎以標準分解式判別因數與倍數

- (1) ①判別 5^3 是否為 5^2 的倍數？
 ②判別 $2 \times 3^3 \times 5^2$ 是否為 2×3 的倍數？
 ③判別 2×3^3 是否為 $2^2 \times 3^2$ 的倍數？

解：若有兩數以標準分解式表示如下：

①方法一：我直接將兩數除除看，

$$5^3 \text{ 及 } 5^2: \text{ 因為 } 5^3 \div 5^2 = \frac{5^3}{5^2} = \frac{5 \times \cancel{5} \times \cancel{5}}{\cancel{5} \times \cancel{5}} = 5 \text{ 所以 } 5^3 \text{ 是 } 5^2 \text{ 的倍數。}$$

方法二：我用指數律來判斷，因為 $5^3 = 5^2 \times 5$ ，所以 5^3 是 5^2 的倍數。

②方法一：我直接將兩數除除看，

$$2 \times 3^3 \times 5 \text{ 及 } 2 \times 3^2: \text{ 因為 } (2 \times 3^3 \times 5) \div (2 \times 3^2) = \frac{2 \times 3^3 \times 5}{2 \times 3^2} = \frac{\cancel{2} \times \cancel{3} \times \cancel{3} \times 3 \times 5}{\cancel{2} \times \cancel{3} \times \cancel{3}} = 15,$$

所以 $2 \times 3^3 \times 5$ 是 2×3^2 的倍數。

方法二：我用指數律來判斷，

$$\text{因為 } 2 \times 3^3 \times 5 = (2 \times 3) \times 3^2 \times 5,$$

所以 $2 \times 3^3 \times 5$ 是 2×3 的倍數。

③方法一：我直接將兩數除除看，

$$2 \times 3^3 \text{ 及 } 2^2 \times 3^2: \text{ 因為 } (2 \times 3^3) \div (2^2 \times 3^2) = \frac{2 \times 3^3}{2^2 \times 3^2} = \frac{\cancel{2} \times \cancel{3} \times \cancel{3} \times 3}{2 \times \cancel{2} \times \cancel{3} \times \cancel{3}} = \frac{3}{2} (\text{非整數}),$$

所以 2×3^3 不是 $2^2 \times 3^2$ 的倍數。

方法二：我用指數律來判斷

因為 2×3^3 的質因數 2 只有 1 個，無法寫成 $(2^2 \times 3^2) \times \square$ ，所以 2×3^3 不是它的倍數。

答：① 是 ② 是 ③ 不是



隨堂練習

(1) 以下各數中，哪些是 2×5 的倍數？ 答: $2 \times 3 \times 5$ 、 $2^3 \times 5$ 、 $2^3 \times 5^2$

5^2 、 2×3^2 、 $2 \times 3 \times 5$ 、 $2^3 \times 5$ 、 $2^3 \times 5^2$



教材內容說明：

1. 本教材第 2~5 頁的教學重點是以標準分解式判別因數與倍數。
2. 第(1)題給定標準分解式來判斷是否為倍數關係。

提供兩個解題方法：

方法一：直接將兩數相除，發現能夠整除即為倍數關係。

方法二：直接用指數律來判斷，為後續運用觀察次方來判斷因倍數關係墊步。

3. 本頁隨堂練習檢查學生能否利用標準分解式來檢查倍數關係。



基本學習內容：NC-7-2-2 能用質因數分解法及短除法求最大公因數及最小公倍數

(2) ①判別 5^2 是否為 5^3 的因數？

②判別 2×3^2 是否為 $2 \times 3^3 \times 5$ 的因數？

解：

①方法一：我用指數律來判斷，因為 $5^3 = 5^2 \times 5$ ，所以 5^3 是 5^2 的倍數， 5^2 是 5^3 的因數。

方法二：我先改寫成質因數連乘積再判斷。

因為 $5^3 = 5 \times 5 \times 5$ ， $5^2 = 5 \times 5$ ，表示 $5^3 = (5 \times 5) \times 5$ ，所以 5^2 是 5^3 的因數。

②方法一：我用指數律來判斷，

因為 $2 \times 3^3 \times 5 = (2 \times 3^2) \times 3 \times 5$ ，

所以 $2 \times 3^3 \times 5$ 是 2×3^2 的倍數， 2×3^2 是 $2 \times 3^3 \times 5$ 的因數。

方法二：我先改寫成質因數連乘積再判斷

因為 $2 \times 3^3 \times 5 = 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5$ ， $2 \times 3^2 = 2 \times 3 \times 3$

因為 $2 \times 3^3 \times 5 = 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 = (2 \times 3 \times 3) \times 3 \times 5 = (2 \times 3^2) \times 3 \times 5$ ，

所以 $2 \times 3^3 \times 5$ 是 2×3^2 的倍數， 2×3^2 是 $2 \times 3^3 \times 5$ 的因數。

答：① 是 ②是

(3) 判別 2×3^3 是否為 $2^2 \times 3^2$ 的因數？

解：

方法一：我用指數律來判斷，設 a 是整數

$2 \times 3^3 \times a$ ，只會讓 3 的次方變大，也就是 3 的次方必須大於等於 3，

所以 $2 \times 3^3 \times a$ 不會等於 $2^2 \times 3^2$ ，因此 2×3^3 不是 $2^2 \times 3^2$ 的因數。

方法二：我先改寫成質因數連乘積，再判斷

$$2 \times 3^3 = 2 \times 3 \times 3 \times 3$$

$$2^2 \times 3^2 = 2 \times 2 \times 3 \times 3$$

因為 $2 \times 3^3 = 2 \times 3 \times 3 \times 3$ 不是 $2^2 \times 3^2 = 2 \times 2 \times 3 \times 3$ 部分算式的連乘積，

所以 2×3^3 不是 $2^2 \times 3^2$ 的因數。

答：不是



隨堂練習

(1) 以下各數中，哪些是 $2^3 \times 5^2$ 的因數？ 答： 5^2 、 2×5 、 $2^3 \times 5$

5^2 、 2×5 、 2×3^2 、 $2^3 \times 5$



教材內容說明：

1. 本教材第 2~5 頁的教學重點是以標準分解式判別因數與倍數。
2. 本頁教學重點為學習利用標準分解式就能直觀判斷出因倍數關係。
3. 第(2)題給定標準分解式來判斷是否為因數關係。

提供兩個解題方法：

方法一：直接用指數律來判斷，為後續運用觀察次方來判斷因倍數關係鋪路。

方法二：將指數律改寫成質因數連乘積再判斷。

4. 第(3)題給定標準分解式來判斷是否為因數關係。

提供兩個解題方法：

方法一：直接用指數律來判斷，為後續運用觀察次方來判斷因倍數關係鋪路。

方法二：將指數律改寫成質因數連乘積再判斷。



基本學習內容：NC-7-2-2 能用質因數分解法及短除法求最大公因數及最小公倍數

將 a 、 b 兩數寫成標準分解式時，

(1) 當 a 為 b 的倍數，則 b 的質因數都是 a 的質因數，

且 a 的每個質因數的次方大於或等於 b 相同質因數的次方。

例如： $2 \times 3^3 \times 5$ 是 2×3^2 的倍數。

(2) 當 a 為 b 的因數，則 a 的質因數都是 b 的質因數，

且 a 的每個質因數的次方小於或等於 b 相同質因數的次方。

例如： 2×3^2 是 $2 \times 3^3 \times 5$ 的因數。



(4) 判別 $2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7$ 是否為 $2^2 \times 3^3 \times 7$ 的倍數？

解：

因為 $2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7$ 質因數 3 的次方小於 $2^2 \times 3^3 \times 7$ 質因數 3 的次方，

故 $2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7$ 不是 $2^2 \times 3^3 \times 7$ 的倍數。

答：不是

(5) 判別 2×3^2 是否為 $2 \times 3^2 \times 5$ 的因數？

解：

因為 2×3^2 的質因數 2 和 3 的次方都小於 $2 \times 3^2 \times 5$ 質因數 2 和 3 的次方，

因此 $2 \times 3^2 \times 5 = (2 \times 3^2) \times (2 \times 5)$ ，故 2×3^2 是 $2 \times 3^2 \times 5$ 的因數。

答：是



隨堂練習

下列各數中，那些 $3^3 \times 5$ 的倍數？答： $3^3 \times 5 \times 7$

3^4 、 $3^2 \times 5^2$ 、 $3^3 \times 5 \times 7$ 、 $2^2 \times 3^2 \times 5$

**教材內容說明：**

1. 本教材第 2~5 頁的教學重點是以標準分解式判別因數與倍數。
2. 本頁重點整理提醒學生，將兩數寫成標準分解式時，我們可以直觀地從指數的次方大小去判斷因數與倍數關係。
3. 第(4)題給定標準分解式來判斷是否為倍數關係。練習直接使用觀察次方大小，其中如果為倍數關係，當 a 為 b 的**倍數**，則 b 的質因數都是 a 的質因數，且 a 的每個質因數的次方大於或等於 b 相同質因數的次方。
4. 第(5)題給定標準分解式來判斷是否為因數關係。練習直接使用觀察次方大小，其中如果為因數關係，當 a 為 b 的**因數**，則 a 的質因數都是 b 的質因數，且 a 的每個質因數的次方小於或等於 b 相同質因數的次方。
5. 本頁隨堂練習讓學生練習直觀判斷因倍數關係。



基本學習內容：NC-7-2-2 能用質因數分解法及短除法求最大公因數及最小公倍數

(6) 已知 $a = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 11$ ，下列哪些數是 a 的倍數？哪些數是 a 的因數？

- ① 2×3^2 ② $2^4 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 11$ ③ 2×3^3 ④ $2^2 \times 3^2$ ⑤ $7^2 \times 13$

解：

① 因為 2×3^2 質因數 2 和 3 的次方都小於 a 的質因數 2 和 3 的次方。

可以寫成 $a = (2 \times 3^2) \times 2^2 \times 5 \times 11$ ，所以 2×3^2 是 a 的因數。

② 因為 $2^4 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 11 = (2^3 \times 3^2 \times 5 \times 11) \times 2 \times 7 = a \times 2 \times 7$ 是 a 的倍數。

③ 因為 2×3^3 質因數 3 的次方大於 a 的質因數 3 的次方，所以 2×3^3 不是 a 的因數。

④ 因為 $2^2 \times 3^2$ 質因數 2 和 3 的次方都小於或等於 a 的質因數 2 和 3 的次方。

可以寫成 $a = (2^2 \times 3^2) \times 2 \times 5 \times 11$ ，所以 $2^2 \times 3^2$ 是 a 的因數。

⑤ 因為 a 的質因數沒有 7 和 13，所以 $7^2 \times 13$ 不是 a 的因數。

答： a 的因數：①④ a 的倍數：②

(7) 已知 $36 = 2^2 \times 3^2$ ，請寫出 36 的所有因數？

解：

方法一

先列出 1，

再寫出 36 的質因數得 2、3

再列出是合數也是 36 的因數，得

兩個質因數相乘： 2×2 、 3×3 、 2×3

三個質因數相乘： $2 \times 2 \times 3$ 、 $2 \times 3 \times 3$

四個質因數相乘： $2 \times 2 \times 3 \times 3$

方法二

先列出 1

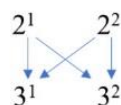
先列出形式是 2^m 的因數，得 2^1 、 2^2

再列出形式是 3^n 的因數，得 3^1 、 3^2

最後列出形式是 $2^m \times 3^n$ 的因數，

得 $2^1 \times 3^1$ 、 $2^1 \times 3^2$ 、 $2^2 \times 3^1$ 、 $2^2 \times 3^2$

可以用樹狀圖來分析



因此 36 的所有因數有 1、2、3、 2^2 、 3^2 、 2×3 、 2×3^2 、 $2^2 \times 3$ 、 $2^2 \times 3^2$



隨堂練習

有多少個正整數是 18 的倍數，同時也是 216 的因數？ 答：6



教材內容說明：

1. 本教材第 2~5 頁的教學重點是以標準分解式判別因數與倍數。
2. 第(6)題給定 a 的標準分解式，找出 a 的倍數與因數。
3. 第(7)題給定 36 與 36 的標準分解式，找出 36 的所有因數。

本教材提供兩個方法解題

方法一：利用質因數連乘積，分別列一個、兩個、三個、四個質因數相乘所構成的因數，

讓學生學習如何從分解的數的概念學習因倍數關係。

方法二：利用指數型式，讓學生學習從指數 1 次到最高次，找出所有包含的因數。

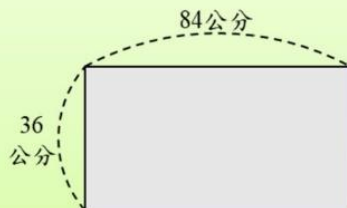
4. 本頁隨堂練習為 112 年數學會考試題第 9 題，檢測學生能否理解兩數的因倍數關係。



基本學習內容：NC-7-2-2 能用質因數分解法及短除法求最大公因數及最小公倍數

◎複習活動-應用問題的分析活動

有一張長36公分、84公分的長方形紙卡，要分割成一樣大的正方形紙片，正方形紙片的邊長是整數公分，且剛好分完。可以分割成邊長幾公分的正方形？



解：

我們從長方形的長邊與短邊分析發現

長邊分割成幾個正方形 \times 正方形邊長 = 84 ----- 正方形邊長是84的因數

短邊分割成幾個正方形 \times 正方形邊長 = 36 ----- 正方形邊長是36的因數

正方形邊長 ----- 是 84和 36 的公因數

我們利用短除法找到 36、84 的最大公因數 $(36, 84) = 2^2 \times 3$ (或 12)

2	36	84	← 36、84有公因數2
2	18	42	← 18、42有公因數2
3	9	21	← 9、21有公因數3
↓	3	7	← 3、7沒有共同質因數

所以36、84的最大公因數 $(36, 84) = 2^2 \times 3$ (或 12)

答：邊長 12 公分的正方形

**教材內容說明：**

1. 本教材第 6 頁的教學重點是複習國小的因倍數應用問題分析。
2. 本題給定一張長方形的紙，要分割成一樣的正方形，需要分析邊長與正方形邊長為因數關係，再利用短除法找出兩邊長的公因數得出答案。
3. 本教材先幫助學生分別從長邊與寬邊觀察，並引導用兩個算式填充題做「問題紀錄」，而得到：

$$\begin{cases} \text{長邊分割成幾個正方形} \times (\text{正方形邊長}) = 84 \\ \text{短邊分割成幾個正方形} \times (\text{正方形邊長}) = 36 \end{cases}$$

由此知正方形邊長是 84 和 36 的公因數。



基本學習內容：NC-7-2-2 能用質因數分解法及短除法求最大公因數及最小公倍數

◎標準分解式與最大公因數

(1) 已知 $24=2^3 \times 3$ ， $36=2^2 \times 3^2$ ，求 24 和 36 的最大公因數。

解：

方法一：我先改寫成質因數連乘積，再找最大公因數。

$$24 = 2^3 \times 3 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$$

$$36 = 2^2 \times 3^2 = 2 \times 2 \times 3 \times 3$$

方法二：我先列出 24 的所有因數，也列出 36 的所有因數，再找最大的公因數。

透過觀察上面的分解式

24 的因數有 1、2、3、 2^2 、 2×3 、 2^3 、 $2^2 \times 3$ 、 $2^3 \times 3$
 36 的因數有 1、2、3、 2^2 、 2×3 、 3^2 、 $2^2 \times 3$ 、 $2^2 \times 3^2$

我們可以發現：

24 和 36 的最大的共同因數是 $2^2 \times 3$ ，也就是所有共同質因數的乘積。

我們以符號 $(24, 36)$ 來表示 24 和 36 的最大公因數，也就是 $(24, 36) = 2^2 \times 3 = 12$ 。

若我們從 24 和 36 的標準分解式來看 24 和 36 的最大公因數，其質因數 2 的部份只有 2 次方，質因數 3 的部份只有 1 次方，也就是說當我們取兩數的最大公因數的時候，我們只要關注**共同質因數**，並取**共同質因數的最小指數(次方)**相乘，即為兩數的最大公因數。

標準分解式	質因數分解式	短除法																
$24 = 2^3 \times 3$ $36 = 2^2 \times 3^2$ <small>1是最小的次方，取2 1是最大的次方，取3</small>	$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$ $36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3$	<table border="1"> <tr> <td>2</td> <td>24</td> <td>36</td> <td>24、36有公因數2</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>12</td> <td>18</td> <td>12、18有公因數2</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>6</td> <td>9</td> <td>6、9有公因數3</td> </tr> <tr> <td></td> <td>2</td> <td>3</td> <td>2、3沒有共同質因數</td> </tr> </table>	2	24	36	24、36有公因數2	2	12	18	12、18有公因數2	3	6	9	6、9有公因數3		2	3	2、3沒有共同質因數
2	24	36	24、36有公因數2															
2	12	18	12、18有公因數2															
3	6	9	6、9有公因數3															
	2	3	2、3沒有共同質因數															

所以 24、36 的最大公因數 $(24, 36) = 2^2 \times 3$ (或 12)

所以 $(24, 36) = 2^2 \times 3$ (或 12)

求 a 、 b 兩數的最大公因數 (a, b) 時，可先求出 a 、 b 的標準分解式：

- (1) 如果可以找出兩者共同的質因數，則分別由**共同質因數**，取**指數(次方)最小者**相乘，即為 a 、 b 兩數的最大公因數。
- (2) 若找不到共同質因數，則 a 和 b 的最大公因數為 1，即 a 和 b 互質。





教材內容說明：

1. 本教材第 7~9 頁的教學重點是從兩數的標準分解式找出最大公因數。
2. 第(1)題給定兩數的標準分解式，求兩數的最大公因數。

本教材提供兩個方法解題：

方法一：先將兩數改寫成質因數連乘積，發現兩數共同的質因數乘積，找出最大公因數。

方法二：列出兩數所有的因數連乘積，再找出最大公因數。

歸納不同方法都能找出最大公因數。

3. 本頁重點整理：要找兩數的最大公因數時，可從兩數的標準分解式中，先找出共同的質因數，再分別由共同質因數中，取指數(次方)最小者相乘，即為兩數的最大公因數。



基本學習內容：NC-7-2-2 能用質因數分解法及短除法求最大公因數及最小公倍數

(2) 已知 $a=2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 11$ 、 $b=2^2 \times 3^3 \times 5 \times 7$ ，求 a 和 b 的最大公因數。

解：

方法一：我將標準分解式改寫成質因數連乘積

$$a = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11$$

$$b = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7$$

$$\text{因此}(a, b) = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7$$

方法二：

我直接找出標準分解式，選次方比較小的抓出來，剩下的都抓到後面去，結果發現比較小的就是公因數。

$$a = 2^2 \times 2 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 11 = (2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7) \times 2 \times 11$$

$$b = 2^2 \times 3^2 \times 3 \times 5 \times 7 = (2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7) \times 3$$

$$\text{因此}(a, b) = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7$$

已知幾個整數的標準分解式時，先列出他們的共同質因數，每一個共同質因數取次方最小者，然後再相乘，即為它們的最大公因數。



$a = 2^3$	$\times 3^2$	$\times 5^1$	$\times 7^1$	$\times 11^1$
$b = 2^2$	$\times 3^3$	$\times 5^1$	$\times 7^1$	
2是最小的 次方，取 2^2	2是最小的 次方，取 3^2	1是最小的 次方，取 5^1	1是最小的 次方，取 7^1	沒有共同 的質因數

$$\text{因此}(a, b) = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7$$



教材內容說明：

1. 本教材第 7~9 頁的教學重點是從兩數的標準分解式找出最大公因數。
2. 第(2)題給定兩數的標準分解數，找出兩數的最大公因數。

本題提供兩個解題方法：

方法一：先將標準分解式改寫成質因數連乘積，觀察並找出共同的質因數，
再寫成最大公因數。

方法二：從兩數的標準分解式中，先列出他們的共同質因數，每一個共同質因數取次
方最小者，然後再相乘，得到兩數的最大公因數。

3. 本題重點整理得出標準分解式觀察法，以利學生更有效率解題。
利用本例題練習老師重點整理的觀察法學習解題。



基本學習內容：NC-7-2-2 能用質因數分解法及短除法求最大公因數及最小公倍數

(3) 求下列各組數的最大公因數，並以標準分解式表示。

- ① $120, 2^2 \times 5 \times 7$ ② $2^2 \times 3^3 \times 7, 2^3 \times 3^2 \times 5$

解：

- (1) 先將 120 化為標準分解式為 $2^3 \times 3 \times 5$ ，再比較 $2^2 \times 5 \times 7$ 之後，得到共同質因數有 2 和 5，質因數 2 的最小指數(次方)為 2，質因數 5 的指數次方皆為 1，得到兩數的最大公因數為 $2^2 \times 5$

$$\begin{array}{cccc}
 120 = 2^3 & \times 3^1 & \times 5^1 & \\
 2^2 \times 5 \times 7 = 2^2 & & \times 5^1 & \times 7^1 \\
 \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\
 \text{2是最小的} & \text{沒有共同} & \text{1是最小的} & \text{沒有共同} \\
 \text{次方，取 } 2^2 & \text{的質因數} & \text{次方，取 } 5^1 & \text{的質因數}
 \end{array}$$

因此 $(120, 2^2 \times 5 \times 7) = 2^2 \times 5$

- (2) $2^2 \times 3^3 \times 7, 2^3 \times 3^2 \times 5$ 兩數的共同質因數有 2 和 3，質因數 2 的最小指數(次方)為 2，質因數 3 的最小指數次方為 2，得到兩數的最大公因數為 $2^2 \times 3^2$

$$\begin{array}{cccc}
 2^2 \times 3^3 \times 7 = 2^2 & \times 3^3 & & \times 7^1 \\
 2^3 \times 3^2 \times 5 = 2^3 & \times 3^2 & \times 5^1 & \\
 \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\
 \text{2是最小的} & \text{2是最小的} & \text{沒有共同} & \text{沒有共同} \\
 \text{次方，取 } 2^2 & \text{次方，取 } 3^2 & \text{的質因數} & \text{的質因數}
 \end{array}$$

因此 $(2^2 \times 3^3 \times 7, 2^3 \times 3^2 \times 5) = 2^2 \times 3^2$



隨堂練習

- (1) 求 $3^2 \times 5^3 \times 11, 2 \times 5^2 \times 11$ 的最大公因數，並以標準分解式表示。
 (2) 求 $108, 16 \times 9$ 的最大公因數，並以標準分解式表示。

答： (1) $5^2 \times 11$ (2) $2^2 \times 3^2$



教材內容說明：

1. 本教材第 7~9 頁的教學重點是從兩數的標準分解式找出最大公因數。

2. 第(3)題，提供兩組數，以標準分解式表示兩數的最大公因數。

第一小題提供兩數中，有一數需要先化成標準分解式，再利用觀察法解題。

第二小題提供兩數已是標準分解式，再一次熟悉透過觀察指數大小來找出最大公因數。

3. 本頁隨堂練習讓學生從兩數找出最大公因數並以標準分解式表示。



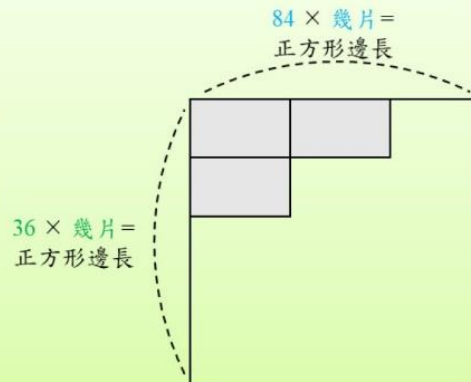
基本學習內容：NC-7-2-2 能用質因數分解法及短除法求最大公因數及最小公倍數

◎複習活動-應用問題的分析活動

教師慶祝大會，學生用長84公分、

寬36公分的長方形卡片，排成一個正方形

圖案布置會場，這個正方形圖案最少是幾公分？



解：

$84 \times \text{幾片} = \text{正方形邊長}$ -----正方形邊長是84 的倍數

$36 \times \text{幾片} = \text{正方形邊長}$ -----正方形邊長是36 的倍數

正方形邊長 -----是 84和 36 的公倍數

我們利用短除法找到 36、84 的最小公倍數 $[36, 84] = 2^2 \times 3^2 \times 7$ (或 252)

2	36	84	← 36、84有公因數 2
2	18	42	← 18、42有公因數 2
3	9	21	← 9、21有公因數 3
	3	7	← 3、7沒有共同質因數

所以36、84的最小公倍數 $[36, 84]$ 是這兩數的公因數與最下面一層3、7的連乘積 $= 2^2 \times 3^2 \times 7$ (或 252)

答：邊長 252 公分的正方形

**教材內容說明：**

1. 本教材第 10 頁的教學重點是複習國小的因倍數應用問題分析。
2. 本題給定學生利用長 84 公分、寬 36 公分的長方形卡片排成一個大正方形圖案布置會場，要求學生找出正方形邊長。
3. 教師可先幫助學生分別從長邊與寬邊觀察，並引導用兩個乘法算式填充題做「問題紀錄」，而得到：

$$\begin{cases} 84 \times \text{長的片數} = (\text{正方形邊長}) \\ 36 \times \text{寬的片數} = (\text{正方形邊長}) \end{cases}$$

「積是被乘數的倍數」，因此正方形邊長是 84 和 36 的公倍數。



基本學習內容：NC-7-2-2 能用質因數分解法及短除法求最大公因數及最小公倍數

◎標準分解式與最小公倍數

(1) 已知 $24=2^3 \times 3$, $36=2^2 \times 3^2$, 求 24 和 36 的最小公倍數。

解：

我先改寫成質因數連乘積，再找最小公倍數。

$$24 = 2^3 \times 3 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$$

$$36 = 2^2 \times 3^2 = 2 \times 2 \times 3 \times 3$$

$$\text{最小公倍數} = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 2^3 \times 3^2$$

我們可以發現：

24 和 36 的最小公倍數就是「共同的質因數分解 $2 \times 2 \times 3$ ，再乘上剩下的質因數 2×3 」，即為 $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$ 。若我們以符號 $[24, 36]$ 來表示 24 和 36 的最小公倍數， $[24, 36] = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$ 。此時最小公倍數 $[24, 36]$ 的標準分解式為 $2^3 \times 3^2$ ，最小公倍數中質因數 2 的指數次方剛好是 24 的標準分解式中 2 的指數次方(24 和 36 的標準分解式中，質因數 2 的指數次方之最大者)，最小公倍數中質因數 3 的指數次方剛好是 36 的標準分解式中 3 的指數次方(24 和 36 的標準分解式中，質因數 3 的指數次方之最大者)，如下圖：

標準分解式	質因數分解式	短除法																
$24 = 2^3 \times 3$ $18 = 2 \times 3^2$ <small>3 是最大的次方，取 2^3</small> <small>2 是最大的次方，取 3^2</small>	$24 = 2^3 \times 3 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$ $18 = 2 \times 3^2 = 2 \times 3 \times 3$ $[24, 18] = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$	<table border="1"> <tr><td>2</td><td>36</td><td>84</td><td>← 36、84 有公因數 2</td></tr> <tr><td>2</td><td>18</td><td>42</td><td>← 18、42 有公因數 2</td></tr> <tr><td>3</td><td>9</td><td>21</td><td>← 9、21 有公因數 3</td></tr> <tr><td>3</td><td>3</td><td>7</td><td>← 3、7 沒有共同質因數</td></tr> </table>	2	36	84	← 36、84 有公因數 2	2	18	42	← 18、42 有公因數 2	3	9	21	← 9、21 有公因數 3	3	3	7	← 3、7 沒有共同質因數
2	36	84	← 36、84 有公因數 2															
2	18	42	← 18、42 有公因數 2															
3	9	21	← 9、21 有公因數 3															
3	3	7	← 3、7 沒有共同質因數															
因此 $[24, 18] = 2^3 \times 3^2$		$[36, 84] = 2^2 \times 3^2 \times 7$ (或 252)																

求 a 、 b 兩數的最小公倍數 $[a, b]$ 時，可先求出 a 、 b 的標準分解式：

針對 a 、 b 的每一個質因數，取指數(次方)最大者，若質因數只出現在其中一數，則直接取該質因數的指數，最後將這些質因數與其對應的指數相乘，即為 a 、 b 兩數的最小公倍數。

例如： $a = 2 \times 3^2 \times 5$ 、 $b = 2^3 \times 3 \times 7^2$ ，則 $[a, b] = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7^2$





教材內容說明：

1. 本教材第 11~14 頁的教學重點是從兩數的標準分解式找最小公倍數。

2. 第(1)題給定兩數的標準分解式，求兩數的最小公倍數。

本教材先將兩數改寫成質因數連乘積，找出兩數共同的質因數乘積，再加上剩餘的質因數連乘積，找出最小公倍數。

透過標準分解式、質因數分解式與短除法歸納出找最小公倍數的方法。

3. 本頁重點整理，要找兩數的最小公倍數，可先求出兩數的標準分解式，再針對兩數的每一個質因數，取指數(次方)最大者相乘，即為兩數的最小公倍數。



基本學習內容：NC-7-2-2 能用質因數分解法及短除法求最大公因數及最小公倍數

(2) 已知 $a=2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 11$ 、 $b=2^2 \times 3^3 \times 5 \times 7$ ，求 a 和 b 的最小公倍數。

解：

方法一：我將標準分解式改寫成質因數分解式

$$a = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11$$

$$b = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7$$

$$\text{因此}[a, b] = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7 \times 2 \times 3 \times 11 = 2^3 \times 3^3 \times 5 \times 7 \times 11$$

方法二：

找到次方最大的，再把這個數寫成 $2^3 \times 3^3 \times 5 \times 7 \times 11 = a \times (?)$

$$2^3 \times 3^3 \times 5 \times 7 \times 11 = b \times (?)$$

$$\text{因此}[a, b] = 2^3 \times 3^3 \times 5 \times 7 \times 11$$

已知幾個整數的標準分解式時，先列出他們的所有質因數，每一個共同質因數取次方最大者，然後再相乘，即為它們的最小公倍數。



我直接找標準分解式，比較每一個質因數，取次方較大者相乘後，就是最小公倍數。

$a = 2^3$	$\times 3^2$	$\times 5^1$	$\times 7^1$	$\times 11^1$
$b = 2^2$	$\times 3^3$	$\times 5^1$	$\times 7^1$	
↑	↑	↑	↑	↑
3是最大的次方，取 2^3	3是最大的次方，取 3^3	1是最大的次方，取 5^1	1是最大的次方，取 7^1	1是最大的次方，取 11^1

$$\text{因此}[a, b] = 2^3 \times 3^3 \times 5 \times 7 \times 11$$



教材內容說明：

1. 本教材第 11~14 頁的教學重點是從兩數的標準分解式找最小公倍數。
2. 第(2)題給定兩數的標準分解數，找出兩數的最小公倍數。

本題提供兩個解題方法：

方法一：先將標準分解式改寫成質因數連乘積，觀察並找出共同的質因數，

再將乘上剩下的質因數，寫成兩數的最小公倍數。

方法二：從兩數的標準分解式中，先列出他們的所有質因數，每一個共同質因數取次方最大者，然後再相乘，得到兩數的最小公倍數。

3. 本題重點整理得出標準分解式觀察法，以利學生更有效率解題。利用本例題練習老師重點整理的觀察法學習解題。



基本學習內容：NC-7-2-2 能用質因數分解法及短除法求最大公因數及最小公倍數

(3) 求下列各組數的最小公倍數，並以標準分解式表示。

- ① 120 、 $2^2 \times 5 \times 7$ ② $2^2 \times 3^3 \times 7$ 、 $2^3 \times 3^2 \times 5$

解：

- (1) 先將 120 化為標準分解式為 $2^3 \times 3 \times 5$ ，再比較 $2^2 \times 5 \times 7$ 之後，得到共同質因數有 2 和 5 ，質因數 2 的最大指數(次方)為 3 ，質因數 5 的指數次方皆為 1 ，再納入剩下的質因數 3 和 7 相乘，得到兩數的最小公倍數為 $2^3 \times 3 \times 5 \times 7$ 。

$$\begin{array}{cccc}
 120 = 2^3 & & & \\
 2^2 \times 5 \times 7 = 2^2 & \times 3^1 & \times 5^1 & \\
 \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\
 3 \text{ 是最大的} & 1 \text{ 是最大的} & 1 \text{ 是最大的} & 1 \text{ 是最大的} \\
 \text{次方，取 } 2^3 & \text{次方，取 } 3^1 & \text{次方，取 } 5^1 & \text{次方，取 } 7^1
 \end{array}$$

因此 $[120, 2^2 \times 5 \times 7] = 2^3 \times 3 \times 5 \times 7$

- (2) $2^2 \times 3^3 \times 7$ 、 $2^3 \times 3^2 \times 5$ 兩數的共同質因數有 2 和 3 ，質因數 2 的最大指數(次方)為 3 ，質因數 3 的最小指數次方為 2 ，再納入剩下的質因數 5 和 7 相乘，得到兩數的最小公倍數為 $2^3 \times 3^3 \times 5 \times 7$ 。

$$\begin{array}{cccc}
 2^2 \times 3^3 \times 7 = 2^2 & & & \\
 2^3 \times 3^2 \times 5 = 2^3 & \times 3^3 & \times 5^1 & \times 7^1 \\
 \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\
 3 \text{ 是最大的} & 3 \text{ 是最大的} & 1 \text{ 是最大的} & 1 \text{ 是最大的} \\
 \text{次方，取 } 2^3 & \text{次方，取 } 3^3 & \text{次方，取 } 5^1 & \text{次方，取 } 7^1
 \end{array}$$

因此 $[2^2 \times 3^3 \times 7, 2^3 \times 3^2 \times 5] = 2^3 \times 3^3 \times 5 \times 7$



隨堂練習

- (1) 求 $3^2 \times 5^3 \times 11$ 、 $2 \times 5^2 \times 11$ 的最小公倍數，並以標準分解式表示。

- (2) 求 108 、 16×9 的最小公倍數，並以標準分解式表示。

答： (1) $2 \times 3^2 \times 5^3 \times 11$ (2) $2^4 \times 3^3$



教材內容說明：

1. 本教材第 11~14 頁的教學重點是從兩數的標準分解式找最小公倍數。

2. 第(3)題提供兩組數，以標準分解式表示兩數的最小公倍數。

第一小題提供兩數中，有一數需要先化成標準分解式，再利用觀察法解題。

第二小題提供兩數已是標準分解式，再一次熟悉透過觀察指數大小來找出最小公倍數。

3. 本頁隨堂練習讓學生從兩數找出最小公倍數並以標準分解式表示。



基本學習內容：NC-7-2-2 能用質因數分解法及短除法求最大公因數及最小公倍數



小試身手

1. 分別列出 12 和 15 在 150 以內的倍數，並寫出它們的公倍數及最小公倍數。

答：公倍數：60, 120

最小公倍數：60

2. 求 $[2^2 \times 3 \times 5, 2 \times 3^2 \times 7] = ?$

答： $2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7$

3. 求 $[13, 6] = ?$

答： $2 \times 3 \times 13$

4. 求 $[12, 45] = ?$

答： $2^2 \times 3^2 \times 5$

5. 下列各數中，哪些是 $2^2 \times 5^4 \times 7^3 \times 11$ 的因數？答：_____。

(A) $5^3 \times 11$ (B) $2 \times 5^3 \times 11^2$ (C) $2^2 \times 5^2 \times 7^2$

(D) $2 \times 5^2 \times 7 \times 11$ (E) $3^2 \times 5^4 \times 7^2 \times 11$

答：(A)、(C)、(D)

6. 下列各數中，哪些是 $3^2 \times 5 \times 7$ 的倍數？答：_____。

(A) $3^3 \times 5^2 \times 7$ (B) $2 \times 3^2 \times 5^3$ (C) $3^2 \times 5^2 \times 7^2$ (D) $3 \times 5^2 \times 7$ (E) $3^2 \times 5^4 \times 7^2$

答：(A)、(C)、(E)

7. 求 $(2^3 \times 3^2 \times 5 \times 11, 2^2 \times 3^2 \times 7) = ?$

答： $2^2 \times 3^2$

8. 求 $[2^2 \times 3^2 \times 7^2, 2^2 \times 3^2 \times 5^2 \times 7^2] = ?$

答： $2^2 \times 3^2 \times 5^2 \times 7^2$



基本學習內容：NC-7-2-2

教材內容說明：

1. 本頁為小試身手。



教育部國民及學前教育署 編

國民中學

學生學習扶助教材

7

年級數學

