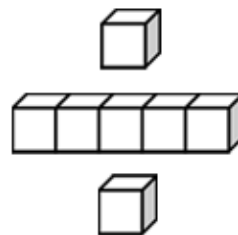


基本學習內容：NC-7-2-1

質因數分解

班級：_____

姓名：_____



基本學習內容：NC-7-2-1

◎2、3、5的倍數判別法

國小有學過2、3、5的倍數的判別法如下：



【2的倍數】

如果一個整數的個位數字是0、2、4、6、8，
那麼這個數一定是2的倍數；否則就不是2的倍數。

例如：

(1) 10、22、34、46、58都是2的倍數。

(2) 51、63、75、87、99都不是2的倍數。

【3的倍數】

如果一個整數的各位數字和是3的倍數，那麼這個數一定是3的倍數。

例如：

(1) 123的各位數字和為 $1+2+3=6$ ，因為6是3的倍數，
所以123是3的倍數。

(2) 1234的各位數字和為 $1+2+3+4=10$ ，因為10不是3
的倍數，所以1234不是3的倍數。



【5的倍數】

如果一個整數的個位數字是0、5，那麼這個數一定是5的倍數；
否則就不是5的倍數。

例如：60、75都是5的倍數。





(1) 已知 $3415\square$ 是五位數，請回答下列問題：

- ① 若 $3415\square$ 是 2 的倍數，則 \square 中可填入哪些數？
- ② 若 $3415\square$ 是 5 的倍數，則 \square 中可填入哪些數？
- ③ 若 $3415\square$ 是 3 的倍數，則 \square 中可填入哪些數？

答：

- ① 若 $3415\square$ 是 2 的倍數，則整數的個位數字是 0、2、4、6、8，

$\square=0、2、4、6、8$

- ② 若 $3415\square$ 是 5 的倍數，則整數的個位數字是 0、5，

$\square=0、5$

- ③ 若 $3415\square$ 是 3 的倍數，整數的各位數字和是 3 的倍數，

$$3+4+1+5=13$$

若 $\square=0$ ， $13+0=13$ ，非 3 的倍數，不合；

若 $\square=1$ ， $13+1=14$ ，非 3 的倍數，不合；

若 $\square=2$ ， $13+2=15$ ，為 3 的倍數，合；

若 $\square=3$ ， $13+3=16$ ，非 3 的倍數，不合；

若 $\square=4$ ， $13+4=17$ ，非 3 的倍數，不合；

若 $\square=5$ ， $13+5=18$ ，為 3 的倍數，合；

若 $\square=6$ ， $13+6=19$ ，非 3 的倍數，不合；

若 $\square=7$ ， $13+7=20$ ，非 3 的倍數，不合；

若 $\square=8$ ， $13+8=21$ ，為 3 的倍數，合；

若 $\square=9$ ， $13+9=22$ ，非 3 的倍數，不合；

所以 $\square=2、5、8$ 。



隨堂練習

(1) 有一個三位數 $34\square$ ，是 2 的倍數，但不是 5 的倍數，則 $\square=$ _____。

(2) 有一個三位數 $45\square$ ，是 3 的倍數，則 $\square=$ _____。



基本學習內容：NC-7-2-1

◎11 的倍數判別法

(1) 已知 100 除 11 餘 1，1000 除 11 餘 10，問：

① 100+1000 除以 11 餘多少？

② $100 \times 4 + 1000 \times 6$ 除以 11 餘多少？

答：

$$\textcircled{1} \quad \because 100 = 11 \times 9 + 1$$

$$1000 = 11 \times 90 + 10$$

得 $100 + 1000 = 11 \times 9 + 1 + 11 \times 90 + 10 = 11 \times (9 + 90) + 1 + 10 = 11 \times (9 + 90) + 11$ ，
所以餘 0。

$$\textcircled{2} \quad \because 100 \times 4 + 1000 \times 6 = (11 \times 9 + 1) \times 4 + (11 \times 90 + 10) \times 6$$

$$= 11 \times 9 \times 4 + 1 \times 4 + 11 \times 90 \times 6 + 10 \times 6$$

$$= 11 \times (9 \times 4 + 90 \times 6) + 64$$

$$= 11 \times (9 \times 4 + 90 \times 6) + 11 \times 5 + 9$$

所以餘 9。

我們可以用計算機找尋最接近 10、100、1000、10000、100000 之 11 的倍數：

例如： $1000 \div 11 = 90.9090 \dots$ (較接近整數 91)，

故最接近 1000 之 11 的倍數為 $11 \times 91 = 1,001$

位值	10	100	1,000	10,000	100,000
最接近之 11 的倍數	11 = 11×1	99 = 11×9	1,001 = 11×91	9,999 = 11×909	100,001 = $11 \times 9,091$

要判別 56419 是不是 11 的倍數，我們可以將 56419 改寫如下：

56419

$$= 5 \times 10000 + 6 \times 1000 + 4 \times 100 + 1 \times 10 + 9 \times 1$$

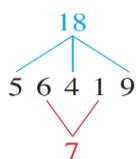
$$= 5 \times (9999 + 1) + 6 \times (1001 - 1) + 4 \times (99 + 1) + 1 \times (11 - 1) + 9 \times 1$$

$$= 5 \times 9999 + 5 + 6 \times 1001 - 6 + 4 \times 99 + 4 + 1 \times 11 - 1 + 9$$

$$= 5 \times 909 \times 11 + 5 + 6 \times 91 \times 11 - 6 + 4 \times 9 \times 11 + 4 + 1 \times 11 - 1 + 9$$

$$= (5 \times 909 + 6 \times 91 + 4 \times 9 + 1) \times 11 + 5 - 6 + 4 - 1 + 9$$

^^^^ 為 11 的倍數 ^^^^^ 和為 11 ^^^



從首位算過來，第 1、3、5 位的數字和等於 $5 + 4 + 9 = 18$ ，
第 2、4 位的數字和等於 $6 + 1 = 7$ ，因為 $18 - 7 = 11$ ，
其為 11 的倍數，所以 56419 是 11 的倍數。

如果一個整數從首位算過來，其「奇位數字和」與「偶位數字和」的差是 11 的倍數（包含 0），則這個整數就是 11 的倍數。





(2) ①判別 1991 是不是 11 的倍數？

②判別 68886 是不是 11 的倍數？

答：

① \because 1991 的奇位數字和 $= 9 + 1 = 10$

1991 的偶位數字和 $= 1 + 9 = 10$

「奇位數字和」與「偶位數字和」的差 $= 10 - 10 = 0$

0 是 11 的倍數，所以 1991 是 11 的倍數。

偶位數字的和

$$1 + 9 = 10$$

1991

$$9 + 1 = 10$$

奇位數字的和

② \because 68886 的奇位數字和 $= 6 + 8 + 6 = 20$

68886 的偶位數字和 $= 8 + 8 = 16$

「奇位數字和」與「偶位數字和」的差 $= 20 - 16 = 4$

4 不是 11 的倍數，所以 68886 不是 11 的倍數。

奇位數字的和

$$6 + 8 + 6 = 20$$

68886

$$8 + 8 = 16$$

偶位數字的和

(3) 若四位數 $20\square 7$ 是 11 的倍數，則 \square 中可以填入哪些數？

答：

\because $20\square 7$ 的奇位數字和 $= 0 + 7 = 7$

$20\square 7$ 的偶位數字和 $= 2 + \square$

「奇位數字和」與「偶位數字和」的差 $= 11$ 的倍數

\square 最小是 0，最大是 9，所以 $(2 + \square)$ 最小是 2， $(2 + \square)$ 最大是 11，

所以 $(2 + \square) - 7$ 中，要是 11 的倍數，

只能 $(2 + \square) - 7 = 0$ 所以 $\square = 5$ 。

偶位數字的和

$$2 + \square$$

20\square 7

$$0 + 7 = 7$$

奇位數字的和



隨堂練習

(1) 判別 13579、123321 是為 11 的倍數？

(2) 若 $3\square 156$ 是 11 的倍數，則 \square 中可以填入哪些數？

基本學習內容：NC-7-2-1

◎質因數分解

國小時學過以短除法做質因數分解，我們先來複習因數、倍數及質因數的觀念。



【因數和倍數】

如果 a 、 b 、 c 為任意三個正整數，而且 $a \div b = c$ ，
即 $a = b \times c$ ，則稱
(1) b 、 c 是 a 的因數。 (2) a 是 b 、 c 的倍數。



【質因數】

如果一個整數的因數也是質數，我們稱此因數為這個整數的質因數。
例如：18 的因數有 1、2、3、6、9、18。其中 2、3 是質數，
所以 2、3 就是 18 的質因數。

(1) 請找出下列各數的質因數

①78 ②91

解：

① $78 = 2 \times 39 = 2 \times 3 \times 13$

所以 78 的質因數為 2、3、13

② 91

我們先由小到大列出一些質數 2、3、5、7，再檢查是否為 91 的因數。

因為 91 是奇數，所以不是 2 的倍數。

因為 $9+1=10$ ，各個位數和相加不是 3 的倍數，所以也不是 3 的倍數。

因為 91 的個位數字是 1，也不是 5 的倍數。

因為 $91 \div 7 = 13$ ，是 7 的倍數。

因為 13 是質數，所以 $91 = 7 \times 13$ ，91 的因數有 1、7、13、91，

所有 91 的質因數有 7、13。

答：①78 的質因數有 2、3、13。②91 的質因數為 7、13。

如果這個數比較容易分解成質因數連乘積，就從質因數連乘積中找質因數。
如果這個數不容易分解成質因數連乘積時，就會從 2、3、5、7、11 等質數
去判斷是否為它的因數，再找出質因數。





隨堂練習

(1) 請找出下列各數的質因數

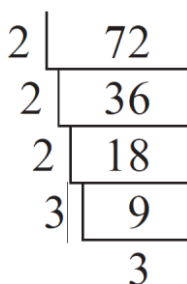
①51 ②76

(2) ①請將 72 寫成質因數的連乘積。

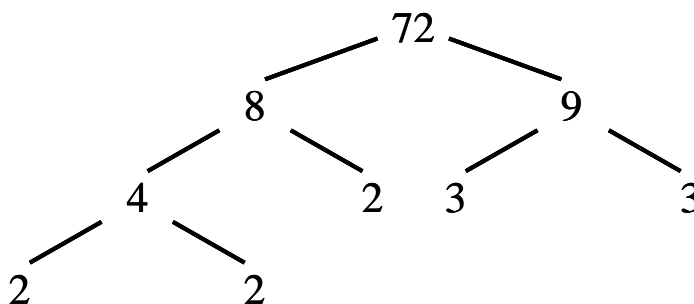
②請將 72 的質因數的連乘積改寫成指數記法。

解：

①在國小曾經學過，利用短除法或是樹狀圖將一個合數分解，並寫成它的質因數連乘積。如下所示： $72=2\times2\times2\times3\times3$ 。



【利用質因數的短除法】



【樹狀圖質因數分解】

答： $72=2\times2\times2\times3\times3$

② 因為 $2\times2\times2$ 可以記成 $=2^3$

3×3 可以記成 $=3^2$

所以 $72=2\times2\times2\times3\times3=2^3\times3^2$

重點整理

(1) 像這樣將一個合數分解成質因數的連乘積的過程，我們稱之為**質因數分解**。

(2) 將質因數分解寫成指數的形式，並將相異質因數由小排到大，這樣的表示法就稱為**標準分解式**。

例如： $72=2^3\times3^2$ ，我們說 $2^3\times3^2$ 是 72 的**標準分解式**。



(3) 判斷下列哪些是標準分解式？

- ① $2 \times 3 \times 5$ ② $5^3 \times 3 \times 2$ ③ $2 \times 2 \times 3^2$ ④ $2 \times 6 \times 49$ ⑤ $7 \times 17^2 \times 23$

解：

	相異質因數	寫成 指數形式	由小排到大	是否 為標準分解式
① $2 \times 3 \times 5$	2、3、5 均為質因數	有	有	是
② $5^3 \times 3 \times 2$	2、3、5 均為質因數	有	否	否
③ $2 \times 2 \times 3^2$	2、3 均為質因數	否	有	否
④ $2 \times 6 \times 49$	6、49 非質數	否	有	否
⑤ $7 \times 17^2 \times 23$	7、17、23 均為質因數	有	有	是

答： ① ⑤

(4) 請列出 180 的質因數，並寫出 180 的標準分解式。

解：

短除法	質因數	質因數分解	標準分解式
$ \begin{array}{r} 2 \overline{) 180} \\ \underline{2 } 90 \\ 3 \overline{) 45} \\ \underline{3 } 15 \\ 3 \overline{) 15} \\ \underline{3 } 5 \end{array} $	2、3、5	$180 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5$	$180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$



(5) 下列何者可以表示成兩個質數的乘積？

- ①81 ②82 ③83 ④84

解：

$$\textcircled{1} 81 = 3^4$$

$$\textcircled{2} 82 = 2 \times 41$$

③83 為質數

$$\textcircled{4} 84 = 2^2 \times 3 \times 7$$

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 82} \\ \underline{41} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 84} \\ \underline{42} \\ 3 \overline{) 21} \\ \underline{7} \end{array}$$

答：②84



隨堂練習

寫出下列各數的標準分解式並列出其質因數：

- (1) 105 (2) 660



小試身手

1. 若四位數 $395\square$ 是 2 的倍數，但不是 5 的倍數，則 \square 可以填入哪些數？

答：_____。

2. 若四位數 $20\square 8$ 是 11 的倍數，則 \square 中可以填入哪些數？

答：_____。

3. 將下列各數做質因數分解並寫出它的標準分解式。

(1) $60 =$ _____。

(2) $91 =$ _____。

(3) $110 =$ _____。

(4) $180 =$ _____。

(5) $240 =$ _____。



教育部國民及學前教育署 編

國民中學

7 年級數學

學生學習扶助教材

