

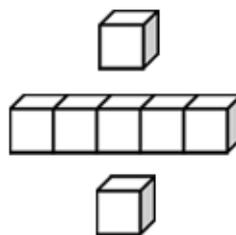
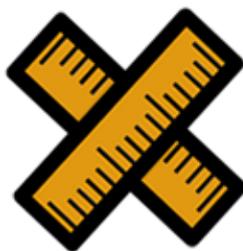


# 基本學習內容：NC-7-2-1

## 質因數分解

班級：\_\_\_\_\_

姓名：\_\_\_\_\_







基本學習內容：NC-7-2-1

## ◎2、3、5的倍數判別法

國小有學過2、3、5的倍數的判別法如下：



### 【2的倍數】

如果一個整數的個位數字是0、2、4、6、8，那麼這個數一定是2的倍數；否則就不是2的倍數。

例如：

(1) 10、22、34、46、58 都是2的倍數。

(2) 51、63、75、87、99 都不是2的倍數。

### 【3的倍數】

如果一個整數的各位數字和是3的倍數，那麼這個數一定是3的倍數。

例如：

(1) 123的各位數字和為 $1+2+3=6$ ，因為6是3的倍數，所以123是3的倍數。

(2) 1234的各位數字和為 $1+2+3+4=10$ ，因為10不是3的倍數，所以1234不是3的倍數。



### 【5的倍數】

如果一個整數的個位數字是0、5，那麼這個數一定是5的倍數；否則就不是5的倍數。

例如：60、75 都是5的倍數。





(1) 已知  $3415\square$  是五位數，請回答下列問題：

- ① 若  $3415\square$  是 2 的倍數，則  $\square$  中可填入哪些數？
- ② 若  $3415\square$  是 5 的倍數，則  $\square$  中可填入哪些數？
- ③ 若  $3415\square$  是 3 的倍數，則  $\square$  中可填入哪些數？

答：

① 若  $3415\square$  是 2 的倍數，則整數的個位數字是 0、2、4、6、8，

$\square=0、2、4、6、8$

② 若  $3415\square$  是 5 的倍數，則整數的個位數字是 0、5，

$\square=0、5$

③ 若  $3415\square$  是 3 的倍數，整數的各位數字和是 3 的倍數，

$$3+4+1+5=13$$

若  $\square=0$ ， $13+0=13$ ，非 3 的倍數，不合；

若  $\square=1$ ， $13+1=14$ ，非 3 的倍數，不合；

若  $\square=2$ ， $13+2=15$ ，為 3 的倍數，合；

若  $\square=3$ ， $13+3=16$ ，非 3 的倍數，不合；

若  $\square=4$ ， $13+4=17$ ，非 3 的倍數，不合；

若  $\square=5$ ， $13+5=18$ ，為 3 的倍數，合；

若  $\square=6$ ， $13+6=19$ ，非 3 的倍數，不合；

若  $\square=7$ ， $13+7=20$ ，非 3 的倍數，不合；

若  $\square=8$ ， $13+8=21$ ，為 3 的倍數，合；

若  $\square=9$ ， $13+9=22$ ，非 3 的倍數，不合；

所以  $\square=2、5、8$ 。



### 隨堂練習

(1) 有一個三位數  $34\square$ ，是 2 的倍數，但不是 5 的倍數，則  $\square=$ \_\_\_\_\_。

(2) 有一個三位數  $45\square$ ，是 3 的倍數，則  $\square=$ \_\_\_\_\_。



基本學習內容：NC-7-2-1

### ◎11 的倍數判別法

(1) 已知 100 除 11 餘 1，1000 除 11 餘 10，問：

- ① 100+1000 除以 11 餘多少？
- ② 100×4+1000×6 除以 11 餘多少？

答：

- ①  $\because 100=11 \times 9+1$   
 $1000=11 \times 90+10$   
 得  $100+1000=11 \times 9+1+11 \times 90+10=11 \times (9+90)+1+10=11 \times (9+90)+11$ ，  
 所以餘 0。
- ②  $\because 100 \times 4+1000 \times 6=(11 \times 9+1) \times 4+(11 \times 90+10) \times 6$   
 $=11 \times 9 \times 4+1 \times 4+11 \times 90 \times 6+10 \times 6$   
 $=11 \times (9 \times 4+90 \times 6)+64$   
 $=11 \times (9 \times 4+90 \times 6)+11 \times 5+9$  所以餘 9。

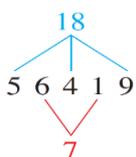
我們可以用計算機找尋最接近 10、100、1000、10000、100000 之 11 的倍數：  
 例如： $1000 \div 11=90.9090\dots$ (較接近整數 91)，

故最接近 1000 之 11 的倍數為  $11 \times 91=1,001$

位值	10	100	1,000	10,000	100,000
最接近之 11 的倍數	11 =11×1	99 =11×9	1,001 =11×91	9,999 =11×909	100,001 =11×9,091

要判別 56419 是不是 11 的倍數，我們可以將 56419 改寫如下：

$$\begin{aligned}
 &56419 \\
 &=5 \times 10000 + 6 \times 1000 + 4 \times 100 + 1 \times 10 + 9 \times 1 \\
 &=5 \times (9999 + 1) + 6 \times (1001 - 1) + 4 \times (99 + 1) + 1 \times (11 - 1) + 9 \times 1 \\
 &=5 \times 9999 + 5 + 6 \times 1001 - 6 + 4 \times 99 + 4 + 1 \times 11 - 1 + 9 \\
 &=5 \times 909 \times 11 + 5 + 6 \times 91 \times 11 - 6 + 4 \times 9 \times 11 + 4 + 1 \times 11 - 1 + 9 \\
 &=(5 \times 909 + 6 \times 91 + 4 \times 9 + 1) \times 11 + 5 - 6 + 4 - 1 + 9 \\
 &\text{^^^^ 為 11 的倍數} \quad \text{^^^^^^} \quad \text{^^^和為 11} \quad \text{^^^}
 \end{aligned}$$



從首位算過來，第 1、3、5 位的數字和等於  $5+4+9=18$ ，  
 第 2、4 位的數字和等於  $6+1=7$ ，因為  $18-7=11$ ，  
 其為 11 的倍數，所以 56419 是 11 的倍數。

如果一個整數從首位算過來，其「奇位數字和」與「偶位數字和」的差是 11 的倍數（包含 0），則這個整數就是 11 的倍數。





- (2) ① 判別 1991 是不是 11 的倍數？  
 ② 判別 68886 是不是 11 的倍數？

答：

- ①  $\because$  1991 的奇位數字和  $= 9 + 1 = 10$   
 1991 的偶位數字和  $= 1 + 9 = 10$   
 「奇位數字和」與「偶位數字和」的差  $= 10 - 10 = 0$   
 0 是 11 的倍數，所以 1991 是 11 的倍數。



- ②  $\because$  68886 的奇位數字和  $= 6 + 8 + 6 = 20$   
 68886 的偶位數字和  $= 8 + 8 = 16$   
 「奇位數字和」與「偶位數字和」的差  $= 20 - 16 = 4$   
 4 不是 11 的倍數，所以 68886 不是 11 的倍數。



- (3) 若四位數  $20\square 7$  是 11 的倍數，則  $\square$  中可以填入哪些數？

答：

- $\because$   $20\square 7$  的奇位數字和  $= 0 + 7 = 7$   
 $20\square 7$  的偶位數字和  $= 2 + \square$   
 「奇位數字和」與「偶位數字和」的差  $= 11$  的倍數  
 $\square$  最小是 0，最大是 9，所以  $(2 + \square)$  最小是 2， $(2 + \square)$  最大是 11，  
 所以  $(2 + \square) - 7$  中，要是 11 的倍數，  
 只能  $(2 + \square) - 7 = 0$  所以  $\square = 5$ 。



隨堂練習

- (1) 判別 13579、123321 是為 11 的倍數？  
 (2) 若  $3\square 156$  是 11 的倍數，則  $\square$  中可以填入哪些數？



基本學習內容：NC-7-2-1

## ◎質因數分解

國小時學過以短除法做質因數分解，我們先來複習因數、倍數及質因數的觀念。



### 【因數和倍數】

如果  $a$ 、 $b$ 、 $c$  為任意三個正整數，而且  $a \div b = c$ ，  
即  $a = b \times c$ ，則稱  
(1)  $b$ 、 $c$  是  $a$  的因數。 (2)  $a$  是  $b$ 、 $c$  的倍數。



### 【質因數】

如果一個整數的因數也是質數，我們稱此因數為這個整數的質因數。  
例如：18 的因數有 1、2、3、6、9、18。其中 2、3 是質數，  
所以 2、3 就是 18 的質因數。

(1) 請找出下列各數的質因數

①78 ②91

解：

$$\textcircled{1} 78 = 2 \times 39 = 2 \times 3 \times 13$$

所以 78 的質因數為 2、3、13

② 91

我們先由小到大列出一些質數 2、3、5、7，再檢查是否為 91 的因數。

因為 91 是奇數，所以不是 2 的倍數。

因為  $9+1=10$ ，各個位數和相加不是 3 的倍數，所以也不是 3 的倍數。

因為 91 的個位數字是 1，也不是 5 的倍數。

因為  $91 \div 7 = 13$ ，是 7 的倍數。

因為 13 是質數，所以  $91 = 7 \times 13$ ，91 的因數有 1、7、13、91，

所有 91 的質因數有 7、13。

答：①78 的質因數有 2、3、13。②91 的質因數為 7、13。

如果這個數比較容易分解成質因數連乘積，就從質因數連乘積中找質因數。  
如果這個數不容易分解成質因數連乘積時，就會從 2、3、5、7、11 等質數  
去判斷是否為它的因數，再找出質因數。





隨堂練習

(1) 請找出下列各數的質因數

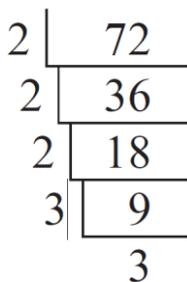
- ①51    ②76

(2) ①請將 72 寫成質因數的連乘積。

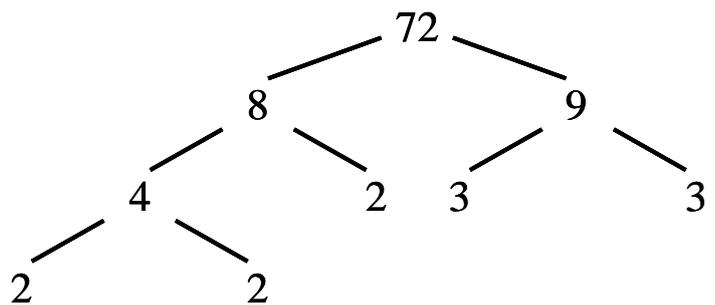
②請將 72 的質因數的連乘積改寫成指數記法。

解：

①在國小曾經學過，利用短除法或是樹狀圖將一個合數分解，並寫成它的質因數連乘積。如下所示： $72=2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$ 。



【利用質因數的短除法】



【樹狀圖質因數分解】

答： $72=2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$

- ② 因為  $2 \times 2 \times 2$  可以記成  $=2^3$   
 $3 \times 3$  可以記成  $=3^2$   
 所以  $72=2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3=2^3 \times 3^2$

重點整理

- (1) 像這樣將一個合數分解成質因數的連乘積的過程，我們稱之為質因數分解。  
 (2) 將質因數分解寫成指數的形式，並將相異質因數由小排到大，這樣的表示法就稱為標準分解式。  
 例如： $72=2^3 \times 3^2$ ，我們說  $2^3 \times 3^2$  是 72 的標準分解式。



(3) 判斷下列哪些是標準分解式？

- ① $2 \times 3 \times 5$     ② $5^3 \times 3 \times 2$     ③ $2 \times 2 \times 3^2$     ④ $2 \times 6 \times 49$     ⑤ $7 \times 17^2 \times 23$

解：

	相異質因數	寫成指數形式	由小排到大	是否為標準分解式
① $2 \times 3 \times 5$	2、3、5 均為質因數	有	有	是
② $5^3 \times 3 \times 2$	2、3、5 均為質因數	有	否	否
③ $2 \times 2 \times 3^2$	2、3 均為質因數	否	有	否
④ $2 \times 6 \times 49$	6、49 非質數	否	有	否
⑤ $7 \times 17^2 \times 23$	7、17、23 均為質因數	有	有	是

答： ①⑤

(4) 請列出 180 的質因數，並寫出 180 的標準分解式。

解：

短除法	質因數	質因數分解	標準分解式
$  \begin{array}{r}  2 \overline{) 180} \\  \underline{2 \phantom{00}} \\  90 \\  \underline{3 \phantom{00}} \\  45 \\  \underline{3 \phantom{00}} \\  15 \\  \underline{3 \phantom{00}} \\  5  \end{array}  $	2、3、5	$180 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5$	$180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$



(5) 下列何者可以表示成兩個質數的乘積？

- ①81    ②82    ③83    ④84

解：

$$\textcircled{1} 81 = 3^4$$

$$\textcircled{2} 82 = 2 \times 41$$

③83 為質數

$$\textcircled{4} 84 = 2^2 \times 3 \times 7$$

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 82} \\ \underline{41} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 84} \\ \underline{42} \\ 3 \overline{) 21} \\ \underline{7} \end{array}$$

答：②84



隨堂練習

寫出下列各數的標準分解式並列出其質因數：

- (1) 105    (2) 660



## 小試身手

1. 若四位數  $395\square$  是 2 的倍數，但不是 5 的倍數，則  $\square$  可以填入哪些數？

答：\_\_\_\_\_。

2. 若四位數  $20\square 8$  是 11 的倍數，則  $\square$  中可以填入哪些數？

答：\_\_\_\_\_。

3. 將下列各數做質因數分解並寫出它的標準分解式。

(1)  $60 =$  \_\_\_\_\_。

(2)  $91 =$  \_\_\_\_\_。

(3)  $110 =$  \_\_\_\_\_。

(4)  $180 =$  \_\_\_\_\_。

(5)  $240 =$  \_\_\_\_\_。



教育部國民及學前教育署 編

國民中學 學生學習扶助教材 **7** 年級數學

