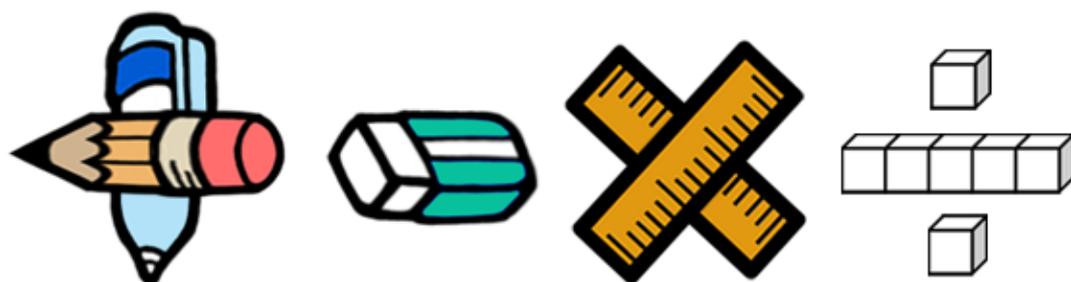




基本學習內容：NC-8-1-1

二次方根的意義及化簡

【教師用】



**學習內容：**

N-8-1 二次方根：二次方根的意義；根式的化簡及四則運算。

基本學習內容：

NC-8-1-1 二次方根的意義及化簡

基本學習表現：

NCP-8-1-1-1 認識平方根的意義。

NCP-8-1-1-2 認識 \sqrt{a} 僅能在 a 不為負數時才有意義。

NCP-8-1-1-3 認識 $\sqrt{0} = 0$ 。

NCP-8-1-1-4 認識：若 $a > b > 0$ ， $\sqrt{a} > \sqrt{b}$ 。

NCP-8-1-1-5 認識 $n\sqrt{a}$ 的意義。

NCP-8-1-1-6 能理解最簡根式的意義。

概要說明：

◎ **基本學習內容 NC-8-1-1 首次引入二次方根的意義。**

■ 帶有根號的數如 $\sqrt{2}$ 、 $\sqrt{3}$...等對學生來講是新的數，因此對於引進 $\sqrt{2}$ 、 $\sqrt{3}$ 的學習動機，對學生能學好這些新的數是非常重要的。從數學史來講，發現 $\sqrt{2}$ 不是分數也是一件很重大的事情，可以透過講故事的方式（如希帕索斯與畢達哥拉斯學派的故事），讓學生知道引起興趣。

■ 觀察 $1^2=1$ 、 $2^2=4$ 、 $3^2=9$ 、...，我們稱 1 、 4 、 9 、...為完全平方數。

■ 建議教師在面積與邊長的情境下引入根式的意義，此時的根式恆為正數。學生學過一元二次方程式以後，知道一元二次方程式會有兩組解，所以解二次方根才会有正負數。



基本學習內容：NC-8-1-1 二次方根的意義與化簡

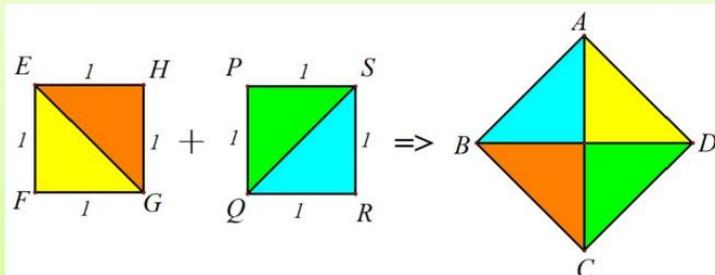
◎二次方根的意義

(1) 已知有一個正方形的邊長為 2，請問其面積為何？

解：正方形面積 = 邊長 × 邊長 = $2 \times 2 = 4$ 。

(2) 如下圖，已知正方形 $EFGH$ 及正方形 $PQRS$ ，它們的邊長皆為 1。

- ① 請問正方形 $EFGH$ 及 $PQRS$ 的面積和為多少？
- ② 如果把正方形 $EFGH$ 及 $PQRS$ 切割成四個小等腰直角三角形重新組成正方形 $ABCD$ ，請問 $ABCD$ 的面積為多少？
- ③ 根據上述正方形 $ABCD$ 的面積，請你計算 $ABCD$ 的邊長是多少？



解：

- ① 正方形 $EFGH$ 及 $PQRS$ 的面積皆為 $1 \times 1 = 1$ ，故其面積和為 $1 + 1 = 2$
- ② 正方形 $ABCD$ 的面積也是 2
- ③ 由正方形的面積公式「正方形面積 = 邊長的平方」來討論 $ABCD$ 邊長的大小

(a) 如果邊長是整數：

因為 $1^2 = 1$ ， $2^2 = 4$ ，所以 $1^2 < 2 < 2^2$ ，得到 $1 < \text{邊長} < 2$

由上可知邊長一定不是整數。

**教材內容說明：**

1. 本教材第 1~2 頁的教學重點是介紹二次方根的意義。

本頁教材為討論活動，給定二個邊長為 1 的正方形，要求學生重組成一個新的正方形，並討論新正方形的邊長如何表示？

2. 第(1)題給定正方形的邊長為 2，要求學生回答其面積為何？

正方形面積=邊長×邊長=2×2=4。

3. 第(2)題給定二個邊長為 1 的正方形，要求學生回答 3 個子問題：

子問題①：兩正方形的面積和為多少？

兩正方形面積皆為 $1 \times 1 = 1$ ，兩正方形面積和為 $1 + 1 = 2$ 。

子問題②：若將兩正方形切割成四個小等腰直角三角形再重組成一個新的正方形，

請問此新正方形面積為多少？

新正方形的面積也是 2。

子問題③：討論新正方形的邊長是多少？

教師可以從三種可能和學生一起討論

(a)如果邊長是整數，因為 $1^2 < 2 < 2^2$ ，得到 $1 < \text{邊長} < 2$ ，所以邊長不是整數。

(b)如果邊長是小數。

(c)如果邊長是分數 $(\frac{b}{a})$ 。

- 教師宜避免談到 $\sqrt{2}$ 為無理數的概念，所以設計此邊長有三種可能情形，討論過程讓學生發現無法用已學過的整數、小數及分數表示，最後設計新的記號表示面積為 2 正方形的邊長。



基本學習內容：NC-8-1-1 二次方根的意義與化簡

(b) 如果邊長是一位小數：

因為 $1.4^2 = 1.96$ ， $1.5^2 = 2.25$ ，所以 $1.4^2 < 2 < 1.5^2$ ， $1.4 < \text{邊長} < 1.5$

如果邊長是二位小數：

因為 $1.41^2 = 1.9881$ ， $1.42^2 = 2.0164$ ，所以 $1.41^2 < 2 < 1.42^2$ ， $1.41 < \text{邊長} < 1.42$

由上可知，因為小數的平方一定是小數，所以邊長一定不是小數。

(c) 如果邊長是 $\frac{b}{a}$ (a, b 為正整數且沒有共質因數)

(c-1) 如果邊長的分母是 3：

因為 $(\frac{4}{3})^2 = \frac{16}{9}$ ， $(\frac{5}{3})^2 = \frac{25}{9}$ ， $\frac{16}{9} < 2 < \frac{25}{9}$ ，所以邊長的分母一定不是 3

(c-2) 如果邊長的分母是 7：

$(\frac{9}{7})^2 = \frac{81}{49}$ ， $(\frac{10}{7})^2 = \frac{100}{49}$ ， $\frac{81}{49} < 2 < \frac{100}{49}$ ，所以邊長的分母一定不是 7

依此類推，因為 a, b 沒有共同質因數，可知 a^2 和 b^2 也沒有共同質因數，

所以 $\frac{b^2}{a^2}$ 不會等於 2。

由(a)、(b)、(c)可知，面積為 2 的正方形，它的邊長不會是整數、小數及分數。

依據數學定義，我們把面積為 2 的正方形，將其邊長記為 $\sqrt{2}$ (唸作根號 2)。

像這樣有帶根號的式子都稱為「根式」。例如： $\sqrt{2}$ 、 $\sqrt{3}$ 、 $\sqrt{5}$ 、...

(3) 請問 $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = ?$

解： $\sqrt{2}$ 代表面積為 2 的正方形邊長，由邊長 \times 邊長 = 正方形面積得到 $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$

**教材內容說明：**

1. 本教材第 1~2 頁的教學重點是介紹二次方根的意義。

本頁教材為討論活動，給定二個邊長為 1 的正方形，要求學生重組成一個新的正方形，並討論新正方形的邊長如何表示？

2. 接續第 1 頁討論完(a)如果邊長是整數的情形之後，接下來討論：

(b)如果邊長是一位小數：因為 $1.4^2 = 1.96 < 2 < 2.25 = 1.5^2$ ，

所以 $1.4 < \text{邊長} < 1.5$ 。

如果邊長是二位小數：因為 $1.41^2 = 1.9881 < 2 < 2.064 = 1.42^2$ ，

所以 $1.41 < \text{邊長} < 1.42$ 。

由上面討論教師可以告訴學生邊長一定不是小數。

(c)如果邊長是分數 $\frac{b}{a}$ (a, b 為正整數且互質)，我們假設此分數化為小數是除不盡的無限小數。

若邊長的分母為 3： $(\frac{4}{3})^2 = \frac{16}{9} < 2 < \frac{25}{9} = (\frac{5}{3})^2$ ，得到 $\frac{4}{3} < \text{邊長} < \frac{5}{3}$

則邊長的分母一定不是 3。

若邊長的分母為 7： $(\frac{9}{7})^2 = \frac{81}{49} < 2 < \frac{100}{49} = (\frac{10}{7})^2$ ，得到 $\frac{9}{7} < \text{邊長} < \frac{10}{7}$

則邊長的分母一定不是 7。

依此類推，教師可以告訴學生邊長一定不是分數。

3. 本頁的定義框告訴學生可以將面積為 2 的正方形其邊長記為 $\sqrt{2}$ ，像這樣有帶根號的式子稱為「根式」。例如： $\sqrt{2}$ 、 $\sqrt{3}$ 、 $\sqrt{5}$ 、...

4. 第(3)題要求學生計算 $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = ?$

教師可提示學生將 $\sqrt{2}$ 聯想成面積為 2 的正方形邊長，所以邊長×邊長為正方形面積，故 $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$ 。



基本學習內容：NC-8-1-1 二次方根的意義與化簡



依此類推：

面積為 5 的正方形，其邊長為 $\sqrt{5}$ ，

$$\sqrt{5} \times \sqrt{5} = (\sqrt{5})^2 = 5$$

面積為 3.2 的正方形，其邊長為 $\sqrt{3.2}$ ，

$$\sqrt{3.2} \times \sqrt{3.2} = (\sqrt{3.2})^2 = 3.2$$

面積為 $\frac{3}{2}$ 的正方形，其邊長為 $\sqrt{\frac{3}{2}}$ ，

$$\sqrt{\frac{3}{2}} \times \sqrt{\frac{3}{2}} = \left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2 = \frac{3}{2}$$

- (1) 依據數學定義，面積為 a 的正方形，其邊長記為 \sqrt{a} ，
正方形的面積可表為 $\sqrt{a} \times \sqrt{a} = (\sqrt{a})^2$ ，故 $(\sqrt{a})^2 = a$ 。
- (2) 假設正方形的面積為 0，則正方形邊長也會為 0，
得到 $\sqrt{0} = 0$ 。
- (3) 因為正方形面積不為負數，若 $a \geq 0$ ， \sqrt{a} 有意義；
若 $a < 0$ ，則 \sqrt{a} 無意義。



隨堂練習

計算下列各數：(1) $(\sqrt{10})^2$ (2) $(\sqrt{2.25})^2$ (3) $(\sqrt{\frac{5}{4}})^2$

答：(1) 10 (2) 2.25 (3) $\frac{5}{4}$

**教材內容說明：**

1. 本教材第 3 頁的教學重點是二次方根的練習活動。

本頁教材利用正方形面積與正方形邊長的關係，幫助學生理解 $(\sqrt{n})^2$ 或 $\sqrt{n} \times \sqrt{n}$ 的意義。

2. 本頁的第一個教師指導框說明兩個相同的根式相乘，結果等於根號內的數。

例如： $\sqrt{5} \times \sqrt{5} = (\sqrt{5})^2 = 5$

- 建議教師不宜教授「根號」與「平方」可以抵消的作法讓學生背誦。例： $(\sqrt{3.2})^2$ ，建議不要讓學生同時消掉「根號」及「平方」而得到 3.2。

3. 本頁的第二個教師指導框在說明下面三個重點：

- (1) 面積為 a 的正方形，其邊長記為 \sqrt{a}
- (2) $\sqrt{0} = 0$ (正方形面積為 0，邊長也為 0)
- (3) \sqrt{a} 有意義，則 $a \geq 0$

4. 本頁隨堂練習的評量重點為計算根式平方後的值。



基本學習內容：NC-8-1-1 二次方根的意義與化簡

(4) 試比較 $\sqrt{2}$ 、 $\sqrt{3}$ 、 $\sqrt{5}$ 的大小

解：

$\sqrt{2}$ 相當於面積為 2 的正方形其邊長， $\sqrt{3}$ 相當於面積為 3 的正方形其邊長
 $\sqrt{5}$ 相當於面積為 5 的正方形其邊長。由面積愈大的正方形，其邊長也愈大，
 因為 $2 < 3 < 5$ ，所以 $\sqrt{2} < \sqrt{3} < \sqrt{5}$



隨堂練習

比較下列兩數的大小並在 \square 中填入 $>$ 、 $<$ 或 $=$

(1) $\sqrt{35} \square \sqrt{24}$ (2) $\sqrt{\frac{17}{4}} \square \sqrt{\frac{25}{6}}$

答：(1) $>$ (2) $>$

(5) 請問 $\sqrt{\square}=4$ ，請問 \square 要填入哪一個數？

解：

面積為 \square 的正方形其邊長記為 $\sqrt{\square}$ ，因為 $\sqrt{\square}=4$ ，所以正方形面積 $\square=4 \times 4=16$



隨堂練習

請問 $\sqrt{\square}=6$ ，請問 \square 要填入哪一個數？

答：36

**教材內容說明：**

1. 本教材第 4 頁的教學重點是比較根式的大小。

本教材利用正方形的面積與邊長的關係幫助學生比較根式的大小

2. 第(4)題給定 $\sqrt{2}$ 、 $\sqrt{3}$ 、 $\sqrt{5}$ 三個根式，要求學生比較其大小關係。

教師提示 $\sqrt{2}$ 相當於面積為 2 的正方形其邊長， $\sqrt{3}$ 、 $\sqrt{5}$ 以此類推。

因為面積愈大的正方形，其邊長愈大。由 $2 < 3 < 5$ ，得到 $\sqrt{2} < \sqrt{3} < \sqrt{5}$ 。

3. 本頁隨堂練習的評量重點在要求學生比較兩個根式的大小關係。

4. 第(5)題給定根號內為未知數的根式，要求學生回答此未知數為何？

教師可以提示根號內的數代表正方形的面積，根號的值代表邊長。

$$\square = 4 \times 4 = 16$$

5. 本頁隨堂練習的評量重點在給定根號內為未知數的根式，要求學生回答此未知數為何？



基本學習內容：NC-8-1-1 二次方根的意義與化簡

◎ \sqrt{a} 的值 (a 為完全平方數)

(6) 算算看，請在下列表格中的空格填入適當的數。

正方形的邊長	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
正方形的面積	1	4	9							

解：利用正方形面積=邊長×邊長，完成下列表格

正方形的邊長	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
正方形的面積	1	4	9	4×4 =16	5×5 =25	6×6 =36	7×7 =49	8×8 =64	9×9 =81	10×10 =100

(7) ①在 1 到 10 當中，哪些數可以寫成一個正整數的平方？

②觀察下表，還有哪些數也可以寫成一個正整數的平方？

正方形的邊長	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
正方形的面積	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

解：

① 因為 $1=1\times 1=1^2$ ， $4=2\times 2=2^2$ ， $9=3\times 3=3^2$ ，

所以 1 到 10 當中，1、4、9 可以寫成一個正整數的平方。

② 因為 $16=4^2$ 、 $25=5^2$ 、 $36=6^2$ 、 $49=7^2$ 、 $64=8^2$ 、 $81=9^2$ 、 $100=10^2$

所以 16、25、36、49、64、81、100 也可以寫成一個正整數的平方。

一個正整數若可以寫成某個正整數的平方，我們就稱這個數為「**完全平方數**」，例如： $1=1^2$ 、 $4=2^2$ 、 $9=3^2$ 、 $16=4^2$ 、 $100=10^2$ 所以 1、4、9、16、25、100 都是完全平方數。



**教材內容說明：**

1. 本教材第 5 頁的教學重點為介紹完全平方數。

本教材利用列表，將正方形的邊長及面積並列在一表格中內，幫助學生了解完全平方數的意義。

2. 第(6)題給定正方形邊長與面積的列表，要求學生在空格中填入適當的數。

利用正方形的面積=邊長×邊長，得到其餘的空格可分表示為：

$$4 \times 4 = 16、5 \times 5 = 25、6 \times 6 = 36、7 \times 7 = 49、8 \times 8 = 64、9 \times 9 = 81、10 \times 10 = 100$$

3. 第(7)題給定正方形面積和邊長的列表，要求學生回答 2 個子問題：

子問題①：1~10 的正整數中，哪些數可以寫成一個正整數的平方？

$$1 = 1 \times 1 = 1^2、4 = 2 \times 2 = 2^2、9 = 3 \times 3 = 3^2，$$

故 1、4、9 可寫成整數的平方。

子問題②：表中的正方形面積，有那些數也可以寫成一個正整數的平方？

$$16 = 4 \times 4 = 4^2、25 = 5 \times 5 = 5^2、36 = 6 \times 6 = 6^2、49 = 7 \times 7 = 7^2、64 = 8 \times 8 = 8^2$$

$$81 = 9 \times 9 = 9^2、100 = 10 \times 10 = 10^2$$

所以 16、25、36、49、64、81、100 也可以寫成正整數的平方。

4. 本頁教師指導框的重點為說明完全平方數的意義。



基本學習內容：NC-8-1-1 二次方根的意義與化簡

(8) 請問下列哪些算式的結果是完全平方數？

- ① 23^2 ② 13×13 ③ $5 \times 5 \times 5 \times 5$ ④ $2 \times 3 \times 6$ ⑤ 7^3 ⑥ 2×2^2

解：

- ① 23^2 是完全平方數。
 ② $13 \times 13 = 13^2$ ，所以 13×13 是完全平方數。
 ③ $5 \times 5 \times 5 \times 5 = (5 \times 5) \times (5 \times 5) = 25^2$ ，所以 $5 \times 5 \times 5 \times 5$ 是完全平方數。
 ④ $2 \times 3 \times 6 = 2 \times 3 \times (2 \times 3) = 6 \times 6 = 6^2$ ，所以 $2 \times 3 \times 6$ 是完全平方數。
 ⑤ $7^3 = 7^2 \times 7^1$ ，因為 7^3 無法寫成某個正整數的平方，所以 7^3 不是完全平方數。
 ⑥ 因為 2×2^2 無法表示成某個正整數的平方，所以 2×2^2 不是完全平方數。



$$\sqrt{\text{正方形面積}} = \text{正方形的邊長}$$

$$\sqrt{(\text{正方形邊長})^2} = \text{正方形的邊長}$$

由上可知：

$$\sqrt{4} = \sqrt{2^2} = 2, \quad \sqrt{9} = \sqrt{3^2} = 3, \quad \sqrt{16} = \sqrt{4^2} = 4,$$

$$\sqrt{25} = \sqrt{5^2} = 5$$

若 a 為正數，邊長為 a 的正方形其面積為 a^2 ；另外面積為 a^2 的正方形，其邊長可寫為 $\sqrt{a^2}$ 。所以 $\sqrt{a^2} = a (a > 0)$
 對於一個正數 a ， $\sqrt{a^2} = a$ 。



(9) 已知 $12^2 = 144$ ， $13^2 = 169$ ， $14^2 = 196$ ， $15^2 = 225$

請問① $\sqrt{144} = ?$ ② $\sqrt{225} = ?$

解：① $\sqrt{144} = \sqrt{12^2} = 12$

② $\sqrt{225} = \sqrt{15^2} = 15$

**教材內容說明：**

1. 本教材第 6 頁的教學重點為 $\sqrt{a^2} = a$ 的化簡。

本教三角形利用正方形面積和邊長的關係幫助學生理解。

2. 第(8)題包含 6 個子問題，要求學生判斷何者是完全平方數？

子問題①： 23^2

是完全平方數。

子問題②： 13×13

$13 \times 13 = 13^2$ 是完全平方數。

子問題③： $5 \times 5 \times 5 \times 5$

$5 \times 5 \times 5 \times 5 = (5 \times 5) \times (5 \times 5) = 25^2$ 是完全平方數。

子問題④： $2 \times 3 \times 6$

$2 \times 3 \times 6 = (2 \times 3) \times 6 = 6 \times 6 = 6^2$ 是完全平方數。

子問題⑤： 7^3

$7^3 = 7^2 \times 7^1$ ，

7^3 無法寫成正整數的平方，所以 7^3 不是完全平方數。

子問題⑥： 2×2^2

2×2^2 無法寫成正整數的平方，所以 2×2^2 不是完全平方數。

3. 本頁第一個教師指導框為 $\sqrt{a^2} = a$ 示例。

本頁第二一個對話框為定義 $\sqrt{a^2} = a$ 。

4. 第(9)題包含 2 個子問題，給定幾個參考用的完全平方數，要求學生計算根式的值？

子問題①： $\sqrt{144}$ ， $\sqrt{144} = \sqrt{12^2} = 12$

子問題②： $\sqrt{225}$ ， $\sqrt{225} = \sqrt{15^2} = 15$



基本學習內容：NC-8-1-1 二次方根的意義與化簡



隨堂練習

已知 $15^2 = 225$ ， $16^2 = 256$ ， $17^2 = 289$ ，請比較 $\sqrt{225}$ 、 16 、 $\sqrt{17^2}$ 三數的大小關係？

答： $\sqrt{225} < 16 < \sqrt{17^2}$



小試身手

- (1) ①面積為 15 的正方形，其邊長為何？
②邊長為 $\sqrt{10}$ 的正方形，其面積為何？
答：① $\sqrt{15}$ ② 10
- (2) 請問 $\sqrt{\square} = 9$ ，請問 \square 要填入哪一個數？
答： $\square = 81$
- (3) 已知 $17^2 = 289$ 、 $18^2 = 324$ ， $19^2 = 361$ ，請問
① $\sqrt{324} = ?$
②比較 $\sqrt{289}$ 、 18 、 $\sqrt{19^2}$ 三數的大小關係？
答：① 18 ② $\sqrt{289} < 18 < \sqrt{19^2}$

**教材內容說明：**

1. 本教材第 7 頁的教學重點為隨堂練習及小試身手。
2. 本頁隨堂練習的評量重點為要求學生比較 $\sqrt{225}$ 、 16 、 $\sqrt{17^2}$ 三數的大小關係。
3. 本頁小試身手提供 3 個問題評量學生是否理解二次方根的意義。

第(1)題包含兩個子問題：

子問題①：給定正方形面積，要求學生回答正方形的邊長。

子問題②：給定正方形邊長，要求學生回答正方形的面積。

第(2)題給定根號內含有未知數的根式，要求學生回答此未知數為何？

第(3)題包含兩個子問題，及幾個完美平方數。

子問題①：要求學生計算根式的值

子問題②：與比較幾個根式值的大小關係。



教育部國民及學前教育署 編

國民中學

學生學習扶助教材

8

年級數學

