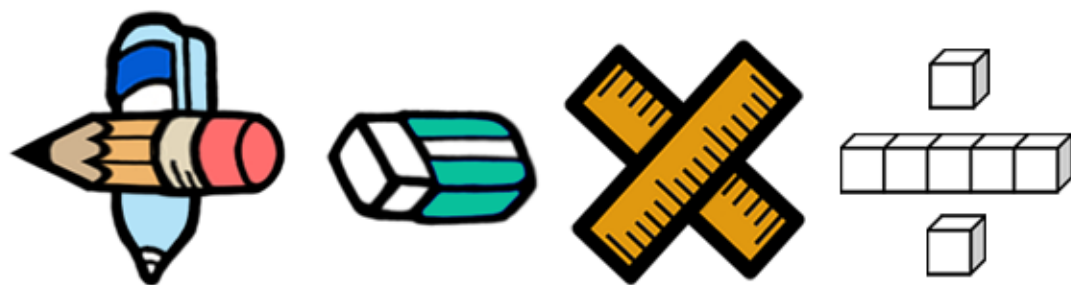


基本學習內容：NC-8-2-1

二次方根的近似值

【教師用】





基本學習內容：NC-8-2-1

學習內容：

N-8-2 二次方根的近似值：二次方根的近似值；二次方根的整數部分；
十分逼近法。使用計算機 $\sqrt{\quad}$ 鍵。

基本學習內容：

NC-8-2-1 二次方根的近似值。

基本學習表現：

NCP-8-2-1-1 認識二次方根的近似值。

NCP-8-2-1-2 能用查表求二次方根的近似值。

NCP-8-2-1-3 能用計算機求二次方根的近似值。

概要說明：

整係數多項式的因式、倍式

- 本基本學習內容 NC-8-2-1 為 NC-8-1-1 之後續學習概念，故學生應該已理解根式的意義。
- 本基本學習內容幫助學生透過查表及使用計算機計算二次方根的近似值。
- 熟悉使用計算機的 $\sqrt{\quad}$ 鍵，求出 \sqrt{a} 的近似值，其中 $a > 0$ 。
- 教師可透過下列方法幫助學生理解「當 $a > b \geq 0$ 時，得 $\sqrt{a} > \sqrt{b} > 0$ 。」
 方法一： 利用兩個大小不同的正方形，比較面積大小，再比較對應邊長大小關係。
 方法二： 透過計算機的 $\sqrt{\quad}$ 鍵，發現「當 $a > b \geq 0$ 時，得 $\sqrt{a} > \sqrt{b} > 0$ 。」
- 能利用完全平方數，求出 \sqrt{a} 的整數部分。
- 十分逼近法教學時，因計算一位小數較複雜，應由老師提供數據，教導學生判別，並正確估計至小數點後第 1 位。
- 本基本學習內容不利用幾何(尺規作圖)求二次方根的近似值。



基本學習內容：NC-8-2-1 二次方根的近似值

◎利用完全平方數計算二次方根近似值

(1) 有甲、乙兩個正方形，它們的面積分別為 6、5，

說說看，它們的邊長 $\sqrt{6}$ 、 $\sqrt{5}$ 的大小關係為何？

解：

因為 $6 > 5$ ，

表示甲的面積 $>$ 乙的面積，可以知道甲的邊長 $>$ 乙的邊長，

又正方形邊長 $=\sqrt{\text{正方形面積}}$ ，

而甲的邊長 $=\sqrt{6}$ ，乙的邊長 $=\sqrt{5}$ ，

所以 $\sqrt{6} > \sqrt{5}$ 。

答：邊長大小關係為 $\sqrt{6} > \sqrt{5}$

從上面討論發現：

① 如果正方形面積為 a ，那麼正方形的邊長為 \sqrt{a} 。

② 正方形面積越大，邊長越長。



**教材內容說明：**

1. 本教材第 1～3 頁的教學重點在幫助學生利用完全平方數計算二次方根近似值。
2. 第(1)題：給定甲、乙兩個正方形，它們的面積分別為 6、5，要求學生比較兩正方形邊長 $\sqrt{6}$ 、 $\sqrt{5}$ 的大小關係。

教師引導學生利用正方形面積越大，邊長越長，發現面積 6 > 面積 5，所以邊長 $\sqrt{6} > \sqrt{5}$ 。

3. 本頁對話框在幫助學生理解正方形面積與邊長關係與利用不同正方形面積大小關係，比較對應正方形邊長的大小關係。

●教師應幫助學生將兩正方形面積對應到兩正整數，兩正方形邊長對應到兩個二次方根。

由正方形面積越大，邊長越長的關係，說明正整數越大，其正的二次方根越大的關係。



基本學習內容：NC-8-2-1 二次方根的近似值

(2) 請比較 $\sqrt{9}$ 、 $\sqrt{10}$ 與 $\sqrt{11}$ 的大小關係。

解：

假設 A 正方形的面積是 9 ， B 正方形的面積是 10 ，

C 正方形的面積是 11 ，

因為 $9 < 10 < 11$ ，得到 A 的面積 $< B$ 的面積 $< C$ 的面積，

可以知道 A 的邊長 $< B$ 的邊長 $< C$ 的邊長，

所以 $\sqrt{9} < \sqrt{10} < \sqrt{11}$ 。

答： $\sqrt{9} < \sqrt{10} < \sqrt{11}$

重點整理

當 $a > b \geq 0$ 時，得 $\sqrt{a} > \sqrt{b} > 0$ 。

(3) 請問 $\sqrt{13}$ 介於哪兩個連續整數之間？

解：

因為 $\dots < 9 < 10 < 11 < 12 < 13 < 14 < 15 < 16 < \dots$ ，

所以 $\dots < \sqrt{9} < \sqrt{10} < \sqrt{11} < \sqrt{12} < \sqrt{13} < \sqrt{14} < \sqrt{15} < \sqrt{16} < \dots$

又 $\sqrt{9} = 3$ ， $\sqrt{16} = 4$

所以 $3 < \sqrt{10} < \sqrt{11} < \sqrt{12} < \sqrt{13} < \sqrt{14} < \sqrt{15} < 4$ 。

答： $\sqrt{13}$ 介於 3 和 4 兩個連續整數之間

**教材內容說明：**

1. 本教材第 1~3 頁的教學重點在幫助學生利用完全平方數計算二次方根近似值。
2. 第(2)題給定三個二次方根 $\sqrt{9}$ 、 $\sqrt{10}$ 、 $\sqrt{11}$ ，要求學生比較它們的大小關係。
 - 前頁第(1)題提供正方形面積與邊長幫助學生解題，本題僅給二次方根作比較。
 - 教師引導學生先將方根內的正整數 9、10、11 分別假設成 A 、 B 、 C 三個正方形的面積，發現面積大小關係為 $9 < 10 < 11$ ，則對應邊長大小關係為 $\sqrt{9} < \sqrt{10} < \sqrt{11}$ ，所以二次方根大小關係為 $\sqrt{9} < \sqrt{10} < \sqrt{11}$ 。
3. 本頁的重點整理在說明當 $a > b > 0$ 時，得 $\sqrt{a} > \sqrt{b} > 0$ 。
4. 第(3)題給定 $\sqrt{13}$ ，要求學生判斷 $\sqrt{13}$ 的值介於在哪兩個整數之間。
 - 教師應幫助學生先複習 1~100 正整數中，可記為平方數的數，例如： $1=1^2$ ， $4=2^2$ ， $9=3^2$ ， \dots ， $100=10^2$ ，學生列舉連續正整數比大小關係時，較容易確認寫到哪個數可以停下。
 - 教師引導學生先寫出比 13 小的連續正整數，直到平方數 9 停下；
比 13 大的連續正整數，直到平方數 16 停下，透過觀察正整數的大小關係，
 $\dots < 9 < 10 < 11 < 12 < 13 < 14 < 15 < 16 < \dots$ ，
 利用本頁重點整理說明其對應二次方根的大小關係，
 $\dots < \sqrt{9} < \sqrt{10} < \sqrt{11} < \sqrt{12} < \sqrt{13} < \sqrt{14} < \sqrt{15} < \sqrt{16} < \dots$ ，
 化簡二次方根後，得到
 $3 < \sqrt{10} < \sqrt{11} < \sqrt{12} < \sqrt{13} < \sqrt{14} < \sqrt{15} < 4$ ，
 最後幫助學生確認 $\sqrt{13}$ 介於 3 和 4 兩個連續整數之間。



基本學習內容：NC-8-2-1 二次方根的近似值

找 $\sqrt{13}$ 介於哪兩個整數之間的方法，如下所示：

- ① 寫出比 13 小的整數，直到找到最接近 13 的平方數 9 就停下。
- ② 寫出比 13 大的整數，直到找到最接近 13 的平方數 16 就停下。
- ③ 說明 $\sqrt{13}$ 與 $\sqrt{9}$ 、 $\sqrt{16}$ 的大小關係，再計算根式的值。
- ④ 說明 $\sqrt{13}$ 與 3，4 的大小關係。



(4) 請問 $\sqrt{30}$ 介於哪兩個連續整數之間？

解：

因為 $25 < 30 < 36$ ，所以 $\sqrt{25} < \sqrt{30} < \sqrt{36}$ ，

又 $\sqrt{25}=5$ ， $\sqrt{36}=6$ ，得到 $5 < \sqrt{30} < 6$ 。

答： $\sqrt{30}$ 介於 5 和 6 兩個連續整數之間



隨堂練習

(1) 請問 $\sqrt{35}$ 介於哪兩個連續整數之間？答：5，6

(2) 請問 $\sqrt{51}$ 介於哪兩個連續整數之間？答：7，8

**教材內容說明：**

1. 本教材第 1~3 頁的教學重點在幫助學生利用完全平方數計算二次方根近似值。
2. 上一頁已幫助學生透過 $\sqrt{13}$ 介於在哪兩個整數之間，
發現 $\sqrt{13}$ 介於 3 和 4 兩個連續整數之間。
3. 本頁對話框在幫助學生將利用完全平方數計算二次方根近似值的方法與過程，寫成 4 個步驟，讓往後相關概念的解題可依步驟執行。
4. 本頁第(4)題給定 $\sqrt{30}$ ，要求學生判斷 $\sqrt{30}$ 介於在哪兩個連續整數之間。
教師引導學生只寫出比 30 小的平方數 25，與比 30 大的平方數 36，透過 $25 < 30 < 36$ ，經過化簡，說明 $\sqrt{30}$ 與 5，6 的大小關係。
● 如果學生仍寫出平方數與 30 之間的連續正整數，教師先幫助學生逐步完成解題，再利用 $5 < \sqrt{30} < 6$ 說明，因為題目所求為找出兩個連續整數，所以保留經二次方根化簡後仍為整數的平方數 25 和 36，其餘的數可省略不寫。
5. 本頁下方隨堂練習解答如下：
(1)①5 ②6
(2)①7 ②8



基本學習內容：NC-8-2-1 二次方根的近似值

◎利用查表計算二次方根近似值

(5) 利用下表一，說明 $\sqrt{137}$ 介於哪兩個連續整數之間？

表一：

M	121	144	169	196	225
\sqrt{M}	11	12	13	14	15

解：

從表一第一列知道 137 介於 121，144 兩個平方數之間，

這兩數之間連續整數的大小關係為

$$121 < 122 < \dots < 137 < \dots < 143 < 144,$$

保留平方數與 137，寫成 $121 < 137 < 144$ ，將各數開根號，

得到 $\sqrt{121} < \sqrt{137} < \sqrt{144}$ ，又從第二列知道 $\sqrt{121} = 11$ ， $\sqrt{144} = 12$ ，

所以 $11 < \sqrt{137} < 12$ 。

答： $\sqrt{137}$ 介於 11，12 兩個連續整數之間

我們利用表一來查找 $\sqrt{137}$ ，依序四個步驟如下：

①與 M 同一列找到比 137 小的平方數 121，比 137 大的平方數 144；

②與 \sqrt{M} 同一列為平方數 M 開根號化簡的結果，找到 121 對應 11、144 對應 12，分別表示 $\sqrt{121} = 11$ ， $\sqrt{144} = 12$ ；

③可以列出 $\sqrt{121} < \sqrt{137} < \sqrt{144}$ ；

④所以 $11 < \sqrt{137} < 12$ ， $\sqrt{137}$ 介於 11，12 兩個連續整數之間。



**教材內容說明：**

1. 本教材第 4～6 頁的教學重點在幫助學生利用查表計算二次方根近似值。
2. 本頁第(5)題給定表一與 $\sqrt{137}$ ，要求學生利用查表判斷 $\sqrt{137}$ 介於在哪兩個連續整數之間。
教師先幫助學生理解表一上下列的關係：
第一列為平方數 M ：121、144、169、196、225，
第二列為平方數開根號化簡後的結果 \sqrt{M} ：11、12、13、14、15。
再引導學生查找第一列，發現 $121 < 137 < 144$ ，經過開根號後查找第二列，得到 $11 < \sqrt{137} < 12$ ，
所以 $\sqrt{137}$ 介於 11，12 兩個連續整數之間。
● 本題透過查表幫助學生理解二次方根的範圍，建議學生解題時，直接由表格內容判斷二次方根介於哪兩個連續整數之間。
3. 本頁對話框在幫助學生理解表一上下列的關係，並且說明
 $\sqrt{122}$ ，...， $\sqrt{137}$ ，...， $\sqrt{143}$ 也都介於 11，12 兩個連續整數之間。



基本學習內容：NC-8-2-1 二次方根的近似值

(6) 利用下表二，說明 $\sqrt{171}$ 在哪兩個連續整數之間？

表二：

N	11	12	13	14	15
N^2	121	144	169	196	225

解：

法一、 將表二的 N^2 改寫成 M ，也就是設 $M = N^2$ ，所以 $\sqrt{M} = \sqrt{N^2} = N$ ，

接著在表二最右邊新增一行，分別為 \sqrt{M} 、 M 兩欄位，如下表三所示，

表三：

N	11	12	13	14	15	\sqrt{M}
N^2	121	144	169	196	225	M

從表三 M 欄位向左查找，知道 $169 < 171 < 196$ ，將各數開根號，

$$\sqrt{169} < \sqrt{171} < \sqrt{196}，$$

又從 \sqrt{M} 欄位向左查找，知道 $\sqrt{169} = 13$ ， $\sqrt{196} = 14$ ，

所以 $13 < \sqrt{171} < 14$ 。

法二、 從表二第二列知道 $169 < 171 < 196$ ，

又從第一列得到 $13^2 < 171 < 14^2$ ，又 $171 = (\sqrt{171})^2$ ，可記成

$13^2 < (\sqrt{171})^2 < 14^2$ ，所以 $13 < \sqrt{171} < 14$ 。

答： $\sqrt{171}$ 介於 13，14 兩個連續整數之間

**教材內容說明：**

1. 本教材第 4~6 頁的教學重點在幫助學生利用查表計算二次方根近似值。
2. 上一頁已幫助學生透過查找表一判斷 $\sqrt{137}$ 介於在哪兩個整數之間，發現 $\sqrt{137}$ 介於 11，12 兩個連續整數之間。
3. 本頁第(6)題給定表二與 $\sqrt{171}$ ，要求學生利用查表判斷 $\sqrt{171}$ 介於在哪兩個連續整數之間。

教師先幫助學生理解表二上下列的關係：

第一列為正整數 N ：11、12、13、14、15，

第二列為正整數取平方的結果 N^2 ：121、144、169、196、225。

以下透過兩個方法建議教師如何幫助學生解題：

方法一：將表二 N 與 N^2 的關係對應到表一 \sqrt{M} 與 M 的關係，建立新表格表三，
透過查找表三解題。

教師引導學生在表二最右邊新增一行，分別為 \sqrt{M} 與 M 欄位，得到表三。

從表三 M 欄位向左查找，發現 $169 < 171 < 196$ ，從 \sqrt{M} 欄位向左查找，
得到 $13^2 < (\sqrt{171})^2 < 14^2$ ，所以 $\sqrt{171}$ 介於 13，14 兩個連續整數之間。

方法二：直接查找表二解題。

教師引導學生查找第二列，發現 $169 < 171 < 196$ ，再查找第一列，

得到 $13^2 < (\sqrt{171})^2 < 14^2$ ，所以 $\sqrt{171}$ 介於 13，14 兩個連續整數之間。

- 本題透過查找表二幫助學生理解二次方根的範圍，建議學生解題時，可適當在表二最右邊新增一行，分別為 \sqrt{M} 與 M 欄位幫助解題。



基本學習內容：NC-8-2-1 二次方根的近似值

表二的第一列為正整數 N ：11、12、13、14、15；
 第二列為正整數取平方的結果 N^2 ：121、144、169、196、225。
 因為表二正整數 N 取平方的結果為 N^2 的關係對應到
 表一平方根 \sqrt{M} 取平方得到 M 的關係，所以 $N = \sqrt{M}$ ， $N^2 = M$ ，
 在表二最右邊新增一行，分別為 \sqrt{M} 與 M 欄位，得到表三。



隨堂練習

(1) 利用下表一，說明 $\sqrt{200}$ 在哪兩個連續整數之間？答：14，15

表一：

M	121	144	169	196	225
\sqrt{M}	11	12	13	14	15

(2) 利用下表四，說明 $\sqrt{290}$ 在哪兩個連續整數之間？答：17，18

表四：

N	16	17	18	19	20	\sqrt{M}
N^2	256	289	324	361	400	M



教材內容說明：

1. 本教材第 4～6 頁的教學重點在幫助學生利用查表計算二次方根近似值。
2. 本頁對話框在幫助學生理解表二上下列的關係，並說明如何將表二 N 與 N^2 的關係對應到表一 \sqrt{M} 與 M 的關係，建立新表格表三。
3. 本頁下方隨堂練習解答如下：
 - (1)①14 ②15
 - (2)①17 ②18



基本學習內容：NC-8-2-1 二次方根的近似值

◎利用十分逼近法計算二次方根近似值

(7) 已知 $(1.71)^2 = 2.9241$,

$$(1.72)^2 = 2.9584 ,$$

$$(1.73)^2 = 2.9929 ,$$

$$(1.74)^2 = 3.0276 ,$$

請問 $\sqrt{3}$ 的近似值為多少？(以四捨五入取到小數點後第一位)

解：

因為 $(\sqrt{3})^2 = 3$,

從題意知道 $(1.73)^2 = 2.9929$, $(1.74)^2 = 3.0276$,

得到 $2.9929 < 3 < 3.0276$,

$$(1.73)^2 < (\sqrt{3})^2 < (1.74)^2 ,$$

所以 $1.73 < \sqrt{3} < 1.74$,

表示 $\sqrt{3} = 1.73\dots$

因此，以四捨五入取 $\sqrt{3}$ 的近似值到小數點後第一位為 1.7。

答：1.7

**教材內容說明：**

1. 本教材第 7~9 頁的教學重點在幫助學生利用十分逼近法計算二次方根的近似值。
2. 第(7)題給定 1.71^2 ， 1.72^2 ， 1.73^2 ， 1.74^2 的結果，要求學生說明 $\sqrt{3}$ 的近似值(以四捨五入取到小數點後第一位)。

教師引導學生發現 $(1.73)^2 < (\sqrt{3})^2 < (1.74)^2$ ，得到 $1.73 < \sqrt{3} < 1.74$ 。

所以 $\sqrt{3}$ 的近似值為 1.7。

- 本題在幫助學生利用十分逼近法計算二次方根的近似值，教師可以強調 $\sqrt{3}$ 介於 1 和 2 兩個連續整數之間，進一步引導學生思考「 $\sqrt{3}$ 會介於 1.1、1.2、1.3、...、1.9 哪兩個小數之間？」
- 本題也可以利用計算機幫助學生解題。



基本學習內容：NC-8-2-1 二次方根的近似值

(8) 已知 $(2.235)^2 = 4.995225$,

$(2.236)^2 = 4.99696$,

$(2.237)^2 = 5.004169$,

$(2.238)^2 = 5.008644$,

請問 $\sqrt{5}$ 的近似值為多少？(以四捨五入取到小數點後第二位)

解：

因為 $(\sqrt{5})^2 = 5$,

從題意知道 $(2.236)^2 = 4.99696$, $(2.237)^2 = 5.004169$,

得到 $4.99696 < 5 < 5.004169$,

$(2.236)^2 < (\sqrt{5})^2 < (2.237)^2$,

所以 $2.236 < \sqrt{5} < 2.237$,

表示 $\sqrt{5} = 2.236\cdots$

因此，以四捨五入取 $\sqrt{5}$ 的近似值到小數點後第二位為 2.24。

答：2.24

**教材內容說明：**

1. 本教材第 7~9 頁的教學重點在幫助學生利用十分逼近法計算二次方根的近似值。
2. 第(8)題給定 2.235^2 ， 2.236^2 ， 2.237^2 ， 2.238^2 的結果，要求學生說明 $\sqrt{5}$ 的近似值(以四捨五入取到小數點後第一位)。

教師引導學生發現 $(2.236)^2 < (\sqrt{5})^2 < (2.237)^2$ ，得到 $2.236 < \sqrt{5} < 2.237$ 。

所以 $\sqrt{5}$ 的近似值為 2.24。

- 本題在幫助學生利用十分逼近法計算二次方根的近似值，教師可以強調 $\sqrt{5}$ 介於 2 和 3 兩個連續整數之間，依序引導學生思考
「 $\sqrt{5}$ 會介於 2.1、2.2、2.3、...、2.9 哪兩個小數之間？」；
「 $\sqrt{5}$ 會介於 2.21、2.22、2.23、...、2.29 哪兩個小數之間？」
- 本題也可以利用計算機幫助學生解題。



基本學習內容：NC-8-2-1 二次方根的近似值



隨堂練習

(1) 已知 $(1.4141)^2 = 1.99967881$ ，

$(1.4142)^2 = 1.99996164$ ，

$(1.4143)^2 = 2.00024449$ ，

$(1.4144)^2 = 2.00052736$ ，

請問 $\sqrt{2}$ 的近似值為多少？(以四捨五入取到小數點後第三位) 答：1.414



教材內容說明：

1. 本教材第 7～9 頁的教學重點在幫助學生利用十分逼近法計算二次方根的近似值。

2. 本頁隨堂練習解答如下：

(1)1.414



基本學習內容：NC-8-2-1 二次方根的近似值



小試身手

(1) 請比較 $\sqrt{30}$ 與 $\sqrt{36}$ 的大小關係。答： $\sqrt{30} < \sqrt{36}$

(2) 請問 $\sqrt{70}$ 介於哪兩個連續整數之間？答：8，9

(3) 請利用下表一，回答下列問題：

表一：

M	256	289	324	361	400
\sqrt{M}	16	17	18	19	20

① $\sqrt{300}$ 在哪兩個連續整數之間？答：17，18

② $\sqrt{300}$ 的整數部分為多少？答：17

(4) 請利用下表二，回答下列問題：

表二：

N	16	17	18	19	20
N^2	256	289	324	361	400

① $\sqrt{360}$ 在哪兩個連續整數之間？答：18，19

② $\sqrt{360}$ 的整數部分為多少？答：18

(5) 已知 $(2.6456)^2 = 6.99919936$ ，

$$(2.6457)^2 = 6.99972849，$$

$$(2.6458)^2 = 7.00025764，$$

$$(2.6459)^2 = 7.00078681，$$

請問 $\sqrt{7}$ 的近似值為多少？(以四捨五入取到小數點後第三位) 答：2.646

**教材內容說明：**

1. 本頁小試身手是針對二次方根的近似值問題進行練習。

2. 第(1)題要求學生說明 $\sqrt{30}$ 和 $\sqrt{36}$ 的大小關係。

解答： $\sqrt{30} < \sqrt{36}$

3. 第(2)題要求學生找出 $\sqrt{70}$ 在哪兩個連續整數之間。

解答：8，9

4. 第(3)題包含表格與 2 個子問題：

表格第一列紀錄為平方數，第二列紀錄為平方數對應的正平方根；

子問題①要求學生利用查表找出 $\sqrt{300}$ 在哪兩個連續整數之間，

子問題②要求學生說明 $\sqrt{300}$ 的整數部分。

解答：①17，18 ②17

5. 第(4)題包含表格與 2 個子問題：

表格第一列紀錄為正整數，第二列紀錄為正整數對應的平方數；

子問題①要求學生利用查表找出 $\sqrt{360}$ 在哪兩個連續整數之間，

子問題②要求學生說明 $\sqrt{360}$ 的整數部分。

解答：①18，19 ②18

6. 第(5)題給定 4 個連續數取平方的結果，這 4 個連續數皆帶有 4 位小數，要求學生找出 $\sqrt{7}$ 的近似值，並以四捨五入取到小數點後第三位。

解答：2.646



教育部國民及學前教育署 編

國民中學

學生學習扶助教材

8 年級數學

