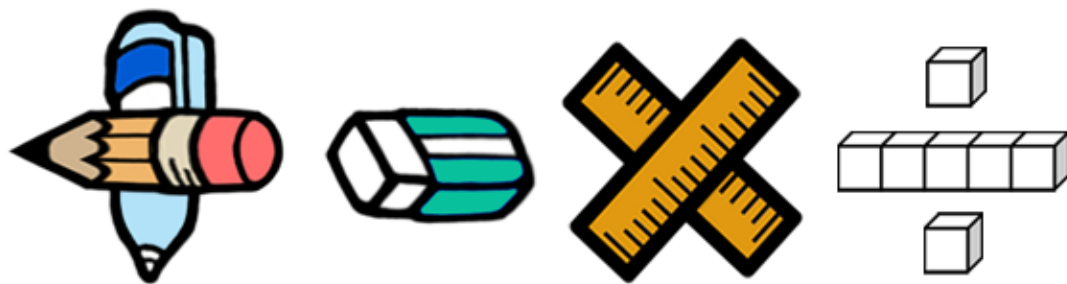


基本學習內容：NC-8-3-1
NC-8-4-1、2

數列的意義
等差數列的意義
等差數列第 n 項公式
【教師用】





基本學習內容：NC-8-3-1；NC-8-4-1、2

學習內容：

N-8-3 認識數列：生活中常見的數列及其規律性(包括圖形的規律性)。

N-8-4 等差數列：等差數列；給定首項、公差計算等數列的一般項。

備註：不處理「已知等差數列不相鄰某兩項的值(不含首項)，反求首項、項數或公差」，例如：給定 a_5 和 a_9 的值，求首項和公差。

基本學習內容：

NC-8-3-1 數列的意義。

NC-8-4-1 等差數列的意義。

NC-8-4-2 等差數列第 n 項公式。

基本學習表現：

NCP-8-3-1-1 認識數列的名稱與意義。

NCP-8-3-1-2 能發現生活中常見數列的規律性。

NCP-8-4-1-1 理解等差數列的名稱與意義。

NCP-8-4-1-2 能判別一數列是否為等差數列。

NCP-8-4-2-1 認識首項、公差、項數、第 n 項的名稱。

NCP-8-4-2-2 理解公差 $d = a_{m+1} - a_m$ 。

NCP-8-4-2-3 理解第 n 項 $a_n = a_1 + (n - 1)d$ ， d 為公差。

NCP-8-4-2-4 給定一等差數列，能依題意求出：公差 d 、或第 n 項、或某數為第幾項等。



概要說明：

- 讓學生認識有次序地將一組數排成一行，則稱該列數為「數列」，並習慣以符號表示數列的任一項，例如：第1項(首項)可表為 a_1 ，第2項可表為 a_2 ， \cdots ，第 n 項可表為 a_n 。
- 教學活動內容可引入具體操作情境，例如：用邊長為1的正方形排出邊長為 n 的正方形，其周長為 $4 \times n$ ，面積為 n^2 ；用邊長為1的正三角形排出邊長為 n 的正三角形，其周長為 $3 \times n$ 。
- 教學活動可與函數作結合，將數列的項次 n 設為自變數，該項的值為應變數，可以讓學生發現項次可以唯一對應到該項的值，但不宜讓學生試著寫出此函數對應關係的數學式，只需讓學生說明其規律性即可。

例如：

(1) 等差數列 $\{a_n\}$

項次 n	1	2	3	4	5	6
值 a_n	1	4	7	10	13	16

讓學生理解每個下一項只需加3，不需求出第 n 項的值。

(2) 平方數列 $\{b_n\}$

項次 n	1	2	3	4	5	6
值 b_n	1	4	9	16	25	36

讓學生理解只需對項次取平方，不需求出第 n 項的值。

(3) 等比數列 $\{c_n\}$

項次 n	1	2	3	4	5	6
值 c_n	2	4	8	16	32	64

讓學生理解每個下一項只需乘2，不需求出第 n 項的值。

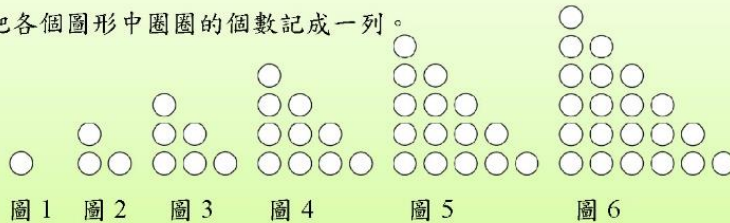
- 不處理「已知等差數列不相鄰某兩項的值(不含首項)，反求首項、項數或公差」，例如：給定 a_5 和 a_9 的值，求首項和公差，因此本基本學習內容不處理等差中項。

基本學習內容：NC-8-3-1；NC-8-4-1、2 數列的意義；等差數列的意義、等差數列第 n 項公式

◎認識數列

(1)請觀察這些圖形，依照圖(1)、圖(2)、圖(3)、圖(4)、圖(5)、圖(6)的順序，

把各個圖形中圓圈的個數記成一系列。



解：我們先點數發現，圖(1)有1個圓圈，圖(2)有3個圓圈，圖(3)有6個圓圈，圖(4)有10個點，圖(5)有15個圓圈，圖(6)有21個圓圈。

我把這些圓圈的數量記成一系列：1、3、6、10、15、21，

第一個數是1表示圖(1)的圓圈的數量，第二個數是3表示圖(2)的圓圈的數量，第三個數是6表示圖(3)的圓圈的數量，第四個數是10表示圖(4)的圓圈的數量，第五個數是15表示圖(5)的圓圈的數量，第六個數是21表示圖(6)的圓圈的數量。

答：1、3、6、10、15、21

依照圖(1)、圖(2)的順序，把圓圈的個數排成一系列，並以逗點分開，稱為數列。

例如：1, 3, 6, 10, 15, 21



(2)有一位植物學家從5月1日到5月8日把植物生長高度是幾公分依序記錄如下：3, 7, 10, 15, 18, 20, 23, 25

請問5月3日植物生長的高度是幾公分？

解：5月1日是3公分，5月2日是7公分，5月3日是10公分。

答：10公分

3, 7, 10, 15, 18, 20, 23, 25 中，數字由左開始依序排列，這樣的記錄稱為數列。

這個數列總共有8個項，數列中第1個數字是3，稱為第1項(又稱為首項)，可以記為 $a_1=3$ ，第2個數字是7，稱為第2項，記為 $a_2=7$ ，……，依此類推。最後1個數字為25，稱為末項，可以記為 $a_8=25$ 。





教材內容說明：

1. 本教材第 1-2 頁的教學重點是認識數列。
2. 第(1)題給定「有規律的圈圈圖形」，要求學生把圖 1 到圖 6 中，各個圖形中圈圈的個數記成一行。

本教材透過下列步驟幫助學生理解：

步驟一：將各個圖和其圈圈個數的對應關係，詳細記成一行，如下：

圖 1	圖 2	圖 3	圖 4	圖 5	圖 6
↓	↓	↓	↓	↓	↓
1	3	6	10	15	21

步驟二：將上述記錄改記成自然數和圈圈個數的對應關係，如下：

1	2	3	4	5	6
↓	↓	↓	↓	↓	↓
1	3	6	10	15	21

步驟三：將自然數的編號記錄也省略，以第一個位置記錄圖 1 的數量，

第二個位置記錄圖 2 的數量，並以逗點隔開，寫成數列如下

1, 3, 6, 10, 15, 21。

- 教師應注意「自然數和圈圈個數的對應關係」和「利用數列的方式將對應關係記下來」之間的表徵轉換。

3. 第(2)題給定「植物生長高度紀錄表」，要求根據紀錄找出對應日期的生長天數。

本教材透過讓學生依序點數方式，找出 5 月 3 日對應的植物生長高度。



基本學習內容：NC-8-3-1；NC-8-4-1、2

基本學習內容：NC-8-3-1；NC-8-4-1、2 數列的意義；等差數列的意義、等差數列第 n 項公式

(3) 小明將最近一週高雄市 covid-19 確診例子列成數列：

703, 653, 324, 568, 840, 990, 787

請問第一天有幾人確診？第五天有幾人確診？最後一天有幾人確診？

解：我們將確診例子整理成表格如下：

第一天	第二天	第三天	第四天	第五天	第六天	第七天
703	653	324	568	840	990	787

將第一天看成這個數列的第一項，第二天看成這個數列的第二項，以此類推，此數列總共有七項，為了方便記錄，我們用 a_1 表示這個數列的第一項，用 a_2 表示這個數列的第二項， a_3 表示這個數列的第三項，以此類推。

 $a_1=703$ ， $a_2=653$ ， $a_3=324$ ， $a_4=568$ ， $a_5=840$ ， $a_6=990$ ， $a_7=787$ ，

答：第一天有 703 人，第五天有 840 人，第七天有 787 人。

重點整理

項：數列中的每一個數叫做項，

其中第一個數稱為第 1 項或首相，通常記為 a_1 ；

第二個數稱為第 2 項，記為 a_2 ；

第三個數稱為第 3 項，記為 a_3 ；

最後一個數稱為末項，記為 a_n ，其中 n 代表項數。

其實只是一個統稱，例如項數 $n=13$ ，則 $a_n=a_{13}$ 表示第 13 項。



教材內容說明：

1. 本教材第 1-2 頁的教學重點是認識數列。
2. 第(3)題給定「最近一週的確診例子依序列成數列」，要求學生從確診數列的對應位子，找出相對天數的確診數量。

透過第幾天確診人數就是這個數列的第幾項，找到對應的位置的數，分別得到 a_1, a_5, a_7 。

●當學生無法解題時，教師可幫助學生將數列改記成表格形式如下，再進行解題。

第一天	第二天	第三天	第四天	第五天	第六天	第七天
703	653	324	568	840	990	787

3. 本頁重點整理在說明數列中的項、首相、末項、項的簡記方式為 a_n ，以及省略符號「...」的三種用法：

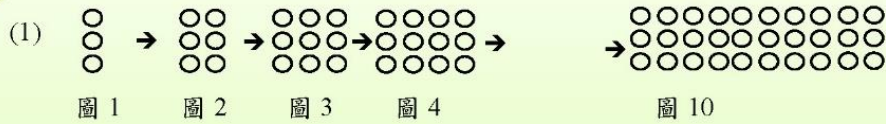
- (1)知道首項、末項及項數，使用「...」省略中間的部分項數。
- (2)知道首項、末項，但不知道項數，使用「...」省略中間的部分項數。
- (3)知道首項，但不知道末項及項數，使用「...」省略指定項之後的所有各項。



基本學習內容：NC-8-3-1；NC-8-4-1、2

基本學習內容：NC-8-3-1；NC-8-4-1、2 數列的意義；等差數列的意義、等差數列第 n 項公式

◎等差數列



如上圖，棋子的排列有規律，

圖 1 有一排棋子 3×1 個，圖 2 有二排棋子 3×2 個，

圖 3 有三排棋子 3×3 個，圖 4 有四排棋子 3×4 個，.....

用一個算式把圖 1~圖 10 的棋子排數和棋子個數對應記下來，
你要怎麼表示這個算式？

解：我把各個圖的棋子排數跟棋子個數做對應，整理如下：

(棋子排數) (棋子個數)

1 \rightarrow 3×1 (個)

2 \rightarrow 3×2 (個)

3 \rightarrow 3×3 (個)

4 \rightarrow 3×4 (個)

.....

10 \rightarrow 3×10 (個)



我發現棋子排數和棋子個數有對應關係，

可以用一個算式記下來：

(棋子排數) (棋子個數)

n \rightarrow $3 \times n$ (個)

$n=1,2,3,\dots,10$

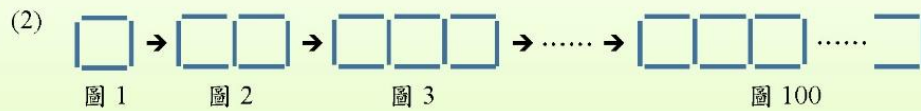
答： $3 \times n$ ($n=1,2,3,\dots,10$)



教材內容說明：

1. 本教材第 3 頁的教學重點是等差數列的意義。
 - 本教材先幫助學生在實作的情境中，發現平行四邊形的對邊等長性質。
2. 第(1)題給定有規律的棋子排列方式，將棋子排數跟棋子個數做對應：
 - 步驟一：將棋子排數 1 至 10 對應寫出棋子個數。
 - 步驟二：用一個算式將棋子排數跟棋子個數做記錄。

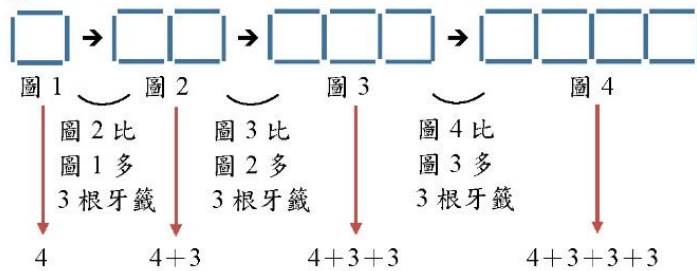
基本學習內容：NC-8-3-1；NC-8-4-1、2 數列的意義；等差數列的意義、等差數列第 n 項公式



如上圖，用牙籤排列正方形，圖 1 有 1 個正方形，圖 2 有 2 個正方形，圖 3 有 3 個正方形，...，圖 100 有 100 個正方形，請問：

- ① 圖 4 有 4 個正方形，請問有幾根牙籤？
- ② 用一個算式來表示從圖 1 到圖 100 的正方形數與牙籤數的對應，你要怎麼表示這個算式？

解：①我觀察後發現，每個圖形的正方形個數都比前一個圖形的正方形個數多 1 個，而每多一個正方形就會多 3 根牙籤，我只要把前一個圖形的牙籤數加 3，就可以得到下一個圖形的牙籤數，所以圖 4 需要 $4+3+3+3$ 根牙籤。



②我把圖 1~圖 100 的正方形數與牙籤數作對應整理

(正方形數)	(牙籤數)		(正方形數)	(牙籤數)
1	→	4	1	→ 4
2	→	$4+3$	2	→ $4+3\times 1$
3	→	$4+3+3$	3	→ $4+3\times 2$
4	→	$4+3+3+3$	4	→ $4+3\times 3$
.....			
100	→	$4+3+3+3+\dots+3$	100	→ $4+3\times 99$



教材內容說明：

1. 本教材第 4-6 頁的教學重點是等差數列的意義，幫助學生可以用一個算式來表示圖形與牙籤數量的對應關係。
2. 第(2)題給定用牙籤排列正方形，要求學生判斷牙籤數量與正方形的數量關係，包含兩個子問題。
子問題①要求學生判斷圖 4 的牙籤數量。
子問題②要求學生用一個算式表示從圖 1 到圖 100 的正方形數與牙籤數的對應關係。

基本學習內容：NC-8-3-1；NC-8-4-1、2 數列的意義；等差數列的意義、等差數列第 n 項公式

我發現正方形數跟牙籤數有對應關係，可以改記為：

(正方形數)	(牙籤數)		(正方形數)	(牙籤數)
1	$\rightarrow 4$	\Rightarrow	1	$\rightarrow 4 + 3 \times (1 - 1)$
2	$\rightarrow 4 + 3 \times (2 - 1)$		2	$\rightarrow 4 + 3 \times (2 - 1)$
3	$\rightarrow 4 + 3 \times (3 - 1)$		3	$\rightarrow 4 + 3 \times (3 - 1)$
4	$\rightarrow 4 + 3 \times (4 - 1)$		4	$\rightarrow 4 + 3 \times (4 - 1)$
.....			
100	$\rightarrow 4 + 3 \times (100 - 1)$		100	$\rightarrow 4 + 3 \times (100 - 1)$

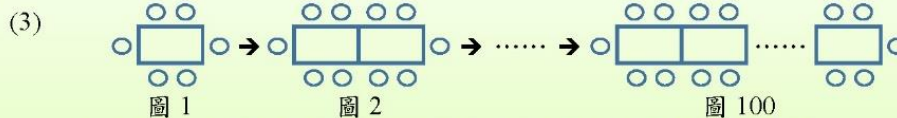
我可以用一個算式記下來：

(正方形數)	(牙籤數)
n	$\rightarrow 4 + 3 \times (n - 1), n = 1, 2, 3, \dots, 100$

另外一個記法是，我把圖 n 的牙籤數寫做 a_n ，可以用算式記成：

$$a_n = 4 + 3 \times (n - 1), n = 1, 2, 3, \dots, 100$$

答：① $4 + 3 + 3 + 3$ 根 ② $a_n = 4 + 3 \times (n - 1), n = 1, 2, 3, \dots, 100$

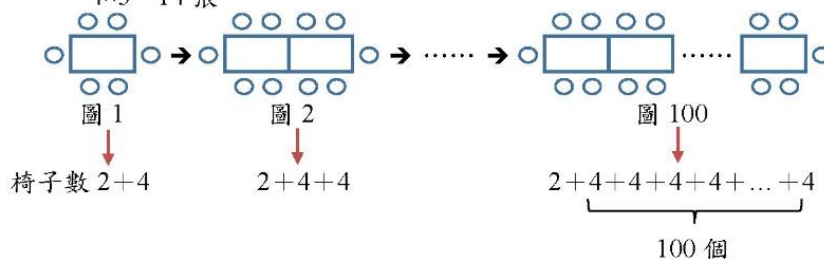


如上圖，圖 1 有 1 張桌子 6 張椅子，圖 2 有 2 張桌子 10 張椅子，依此類推總共有 100 張圖，請問：

① 圖 3 有 3 張桌子，請問椅子有幾張？

② 用一個算式來表示從圖 1 到圖 100 裡桌子數和椅子數的對應，你要怎麼表示這個算式？

解：① 我整理圖 3 的桌子數與椅子數，發現一張桌子的上下二端共有 4 個椅子，還要加上左右二端的 2 張椅子，所以椅子數有 $2 + 4 + 4 + 4 = 2 + 4 \times 3 = 14$ 張。





教材內容說明：

1. 本教材第 4-6 頁的教學重點是幫助可以用算式來表示圖形與牙籤數量的對應關係。
2. 第(2)題給定用牙籤排列正方形，要求學生判斷牙籤數量與正方形的數量關係，包含兩個子問題。
子問題①要求學生判斷圖 4 的牙籤數量。
子問題②要求學生用一個算式表示從圖 1 到圖 100 的正方形數與牙籤數的對應關係。
3. 第(3)題給定用 1 張桌子排列 6 張椅子，2 張桌子 10 張椅子，要求學生判斷桌子與椅子的數量關係，包含兩個子問題。
子問題①要求學生判斷圖 3 有 3 張桌子的椅子數量。
子問題②要求學生用一個算式表示從圖 1 到圖 100 裡桌子與椅子數量的對應關係。



基本學習內容：NC-8-3-1；NC-8-4-1、2 數列的意義；等差數列的意義、等差數列第 n 項公式

② 我把圖 1~圖 100 的算式重新整理

(桌子數) (椅子數)
 1 $\rightarrow 2 + 4 \times 1$ (根)
 2 $\rightarrow 2 + 4 \times 2$ (根)
 3 $\rightarrow 2 + 4 \times 3$ (根)
 4 $\rightarrow 2 + 4 \times 4$ (根)

 100 $\rightarrow 2 + 4 \times 100$ (根)



我可以用一個算式記下來：

(桌子數) (椅子數)
 $n \rightarrow 2 + 4 \times n$ (根), $n =$

我把圖 n 的椅子數寫做 a_n ，
 用一個算式記下來：

$a_n = 2 + 4 \times n$, $n = 1, 2, 3, \dots, 100$

答： ①14 張 ② $a_n = 2 + 4 \times n$, $n = 1, 2, 3, \dots, 100$

數列 1,4,7,10,13,16 中，任何相鄰二項，其後項減去前項所得的差都相等，如 $4 - 1 = 7 - 4 = 10 - 7 = 13 - 10 = 16 - 13 = 3$ 。

像這樣後項減去前項所得的差都相等的數列，稱為**等差數列**。

每個後項減前項的差，稱為**公差**，記為 d 。

如上述的等差數列，公差 d 是 3。

還有像下面的數列也都是**等差數列**。

例題(2)的棋子數：3,6,9,12,15,18,.....,30，公差 d 是 3。

例題(3)的牙籤數：4,7,10,13,.....,301，公差 d 是 3。

例題(4)的椅子數：6,10,14,18,.....,402，公差 d 是 4。





教材內容說明：

1. 本教材第 4-6 頁的教學重點是幫助可以用算式來表示圖形與牙籤數量的對應關係。
2. 第(3)題給定用 1 張桌子排列 6 張椅子，2 張桌子 10 張椅子，要求學生判斷桌子與椅子的數量關係，包含兩個子問題。
子問題①要求學生判斷圖 3 有 3 張桌子的椅子數量。
子問題②要求學生用一個算式表示從圖 1 到圖 100 裡桌子與椅子數量的對應關係。
3. 本頁教師提示重點幫助學生理解：如果「後項－前項」的值都為定值，就代表此數列為等差數列，定值就是公差。



基本學習內容：NC-8-3-1；NC-8-4-1、2

基本學習內容：NC-8-3-1；NC-8-4-1、2 數列的意義；等差數列的意義、等差數列第 n 項公式

(4) 請判斷下列哪一個是等差數列？

- ① 2, 5, 8, 11, 14, 17
- ② 19, 13, 7, 1, -5, -11
- ③ 3, -3, 3, -3, 3, -3, 3

解：①後項－前項 $=5-2=8-5=11-8=14-11=17-14=3$ ，所以是等差數列。

②後項－前項 $=13-19=7-13=1-7=(-5)-1=(-11)-(-5)=-6$ ，
所以是等差數列。

③第二項－第一項 $=(-3)-3=-6$

第三項－第二項 $=3-(-3)=6$

因為後項－前項的結果不一樣，所以不是等差數列。

答：①是，公差 $=3$

②是，公差 $=-6$

③不是

(5) 下列的等差數列，請問公差各是多少？

- ① 2, 5, 8, 11, 14, 17
- ② 19, 13, 7, 1, -5, -11

解：①後項－前項 $=5-2=8-5=11-8=14-11=17-14=3$ ，所以公差是 3。

②後項－前項 $=13-19=7-13=1-7=(-5)-1=(-11)-(-5)=-6$ ，
所以公差是 -6 。

答：①公差 $=3$

②公差 $=-6$



教材內容說明：

1. 本教材第 7 頁的教學重點是幫助學生利用公差來判斷等差數列。
2. 第(4)題包含三個子問題，給定 3 個數列，要求學生判斷給定的數列是否為等差數列，如果是等差數列，寫出它的公差。

本教材提供解法：檢查數列中各項的後項減掉前項的差是否相等。

3. 第(5)題包含 2 個子問題，給定 2 個等差數列，皆要求學生求出公差。

本教材提供解法：檢查數列中各項的後項減掉前項的差，即為公差。



基本學習內容：NC-8-3-1；NC-8-4-1、2

基本學習內容：NC-8-3-1；NC-8-4-1、2 數列的意義；等差數列的意義、等差數列第 n 項公式

(6) 在等差數列 4, 7, 10, 13, 16, 19 中，公差為 3，
用一個算式表示此等差數列，你要怎麼表示這個算式？

解：我把每一項的數字做整理，發現：

(項)(數字)	(項) (數字)	(項) (數字)
1 → 4	1 → 4	1 → 4
2 → 7	2 → 4 + 3	2 → 4 + 3 × 1
3 → 10	3 → 4 + 3 + 3	3 → 4 + 3 × 2
4 → 13	4 → 4 + 3 + 3 + 3	4 → 4 + 3 × 3
5 → 16	5 → 4 + 3 + 3 + 3 + 3	5 → 4 + 3 × 4
6 → 19	6 → 4 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3	6 → 4 + 3 × 5

(項) (數字)	(項) (數字)
1 → 4	1 → 4 + 3 × (1 - 1)
2 → 4 + 3 × (2 - 1)	2 → 4 + 3 × (2 - 1)
3 → 4 + 3 × (3 - 1)	3 → 4 + 3 × (3 - 1)
4 → 4 + 3 × (4 - 1)	4 → 4 + 3 × (4 - 1)
5 → 4 + 3 × (5 - 1)	5 → 4 + 3 × (5 - 1)
6 → 4 + 3 × (6 - 1)	6 → 4 + 3 × (6 - 1)

我們可以用一個算式記下來：

$$\begin{array}{cc} \text{(項)} & \text{(數字)} \\ n & \rightarrow 4 + 3 \times (n - 1), n = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \end{array}$$

另外一個記法，把對應的數字改寫成 a_n ，算式可以記成

$$a_n = 4 + 3 \times (n - 1), n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

答： $a_n = 4 + 3 \times (n - 1), n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$



隨堂練習

在等差數列 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20 中，公差為 3，第 n 項寫成 a_n ，
用一個算式表示此等差數列，你要怎麼表示這個算式？

答： $a_n = 2 + 3 \times (n - 1), n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$



教材內容說明：

1. 本教材第 8 頁的教學重點是幫助學生利用已知公差的值，看到公差數量的變化與項數的對應關係，用一個算式表示此等差數列。
2. 第(6)題給定公差為 3 的數列共 7 項，要求學生利用一個算式表示此等差數列。

本教材提供解法：

步驟一：將每一項與數字寫出對應關係。

步驟二：將每一項的寫成首相加上公差的形式。

步驟三：將每一項的公差數量改寫成乘法。

步驟四：將公差數量調整寫成 $n-1$ 形式，方便找出公差與項數的關係。

步驟五：用一個算式記下並將對應的數字寫成 a_n 。

步驟六：檢查數列中各項的後項減掉前項的差是否相等。

3. 本頁下方隨堂練習的評量重點是用一個算式表示此等差數列。

基本學習內容：NC-8-3-1；NC-8-4-1、2 數列的意義；等差數列的意義、等差數列第 n 項公式

(7) 在等差數列 301, 298, 295, 292, 289, 286, 283 中，公差為 -3 ，
用一個算式表示此等差數列，你要怎麼表示這個算式？

解： 我把每一項的數字做整理，發現：

(項) (數字)		(項) (數字)
1 \rightarrow 301		1 \rightarrow 301
2 \rightarrow 298		2 \rightarrow 301+(-3)
3 \rightarrow 295		3 \rightarrow 301+(-3)+(-3)
4 \rightarrow 292	\rightarrow	4 \rightarrow 301+(-3)+(-3)+(-3)
5 \rightarrow 289		5 \rightarrow 301+(-3)+(-3)+(-3)+(-3)
6 \rightarrow 286		6 \rightarrow 301+(-3)+(-3)+(-3)+(-3)+(-3)
7 \rightarrow 283		7 \rightarrow 301+(-3)+(-3)+(-3)+(-3)+(-3)+(-3)

(項) (數字)	\rightarrow	(項) (數字)
1 \rightarrow 301+0 \times (-3)		1 \rightarrow 301+(1-1) \times (-3)
2 \rightarrow 301+1 \times (-3)	\rightarrow	2 \rightarrow 301+(2-1) \times (-3)
3 \rightarrow 301+2 \times (-3)		3 \rightarrow 301+(3-1) \times (-3)
4 \rightarrow 301+3 \times (-3)	\rightarrow	4 \rightarrow 301+(4-1) \times (-3)
5 \rightarrow 301+4 \times (-3)		5 \rightarrow 301+(5-1) \times (-3)
6 \rightarrow 301+5 \times (-3)		6 \rightarrow 301+(6-1) \times (-3)
7 \rightarrow 301+6 \times (-3)		7 \rightarrow 301+(7-1) \times (-3)

我可以用一個算式記下來：

$$(項) (數字)$$

$$n \rightarrow 301+(n-1) \times (-3), n=1, 2, 3, \dots, 8$$

另外一個記法，我把對應的數字寫成 a_n ，

$$可以記成 a_n = 301+(n-1) \times (-3), n=1, 2, 3, \dots, 8$$

$$答：a_n = 301+(n-1) \times (-3), n=1, 2, 3, \dots, 8$$

等差數列：3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29

可以省略寫成 3, 5, 7, ..., 29





教材內容說明：

1. 本教材第 9 頁的教學重點是幫助學生利用已知公差的值，看到公差數量的變化與項數的對應關係，用一個算式表示此等差數列。
2. 第(7)題給定公差為 3 的數列共 7 項，要求學生利用一個算式表示此等差數列。

本教材提供解法：

步驟一：將每一項與數字寫出對應關係。

步驟二：將每一項的寫成首相加上公差的形式。

步驟三：將每一項的公差數量改寫成乘法。

步驟四：將公差數量調整寫成 $n-1$ 形式，方便找出公差與項數的關係。

步驟五：用一個算式記下並將對應的數字寫成 a_n 。

步驟六：檢查數列中各項的後項減掉前項的差是否相等。

3. 本頁教師提示重點幫助學生理解等差數列中「...」省略符號在等差數列中的意義。



基本學習內容：NC-8-3-1；NC-8-4-1、2

基本學習內容：NC-8-3-1；NC-8-4-1、2 數列的意義；等差數列的意義、等差數列第 n 項公式

(8) 在等差數列 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, ..., 298 中，公差為 3，
請問末項 298 是第幾項？

解：在例題(7)中，我用一個算式 $a_n = 4 + 3 \times (n - 1)$ ， $n=1, 2, 3, 4, 5, 6$ ，
來表示 4, 7, 10, 13, 16, 19。
等差數列 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, ..., 298 是前述數列的延長。
若末項是 298，假設它是第 n 項，我從算式 $a_n = 4 + 3 \times (n - 1)$ 知道，
 $4 + 3 \times (n - 1) = 298$
 $3 \times (n - 1) = 294$
 $n - 1 = 98$
 $n = 99$
所以 298 是第 99 項。

答：第 99 項

如果 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 為等差數列，第 n 項寫成 a_n ，公差寫成 d ，
我們可以發現：

$$a_1 \rightarrow a_1 \quad \rightarrow a_1 + d \times 0 \rightarrow a_1 + d \times (1 - 1)$$

$$a_2 \rightarrow a_1 + d \quad \rightarrow a_1 + d \times 1 \rightarrow a_1 + d \times (2 - 1)$$

$$a_3 \rightarrow a_1 + d + d \quad \rightarrow a_1 + d \times 2 \rightarrow a_1 + d \times (3 - 1)$$

$$a_4 \rightarrow a_1 + d + d + d \rightarrow a_1 + d \times 3 \rightarrow a_1 + d \times (4 - 1)$$

.....

→ 所以我們可以得到一個計算公式：

$$a_n = a_1 + d \times (n - 1), n = 1, 2, 3, \dots$$



隨堂練習

在等差數列 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, ..., 51，公差為 2，
請問 51 是第幾項？

答：第 26 項



教材內容說明：

1. 本教材第 10 頁的教學重點是幫助學生理解等差數列的第 n 項公式。
2. 第(8)題給定公差為 3 的數列，要求學生找出末項的項數。

本教材提供解法：

步驟一：將每一項與數字寫出對應關係。

步驟二：將每一項的寫成首相加上公差的形式。

步驟三：將每一項的公差數量改寫成乘法。

步驟四：將公差數量調整寫成 $n-1$ 形式，方便找出公差與項數的關係。

步驟五：用一個算式記下並將對應的數字寫成 a_n 。

步驟六：檢查數列中各項的後項減掉前項的差是否相等。

3. 本頁教師提示重點幫助學生理解等差數列的公式。
4. 本頁下方隨堂練習的評量重點是檢核學生是否能利用等差數列計算公式找出項數。

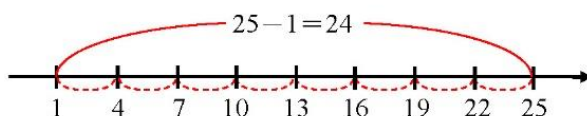


基本學習內容：NC-8-3-1；NC-8-4-1、2

基本學習內容：NC-8-3-1；NC-8-4-1、2 數列的意義；等差數列的意義、等差數列第 n 項公式

(9) 等差數列 $1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, \dots, 61$ 中，首項是 1，末項是 61，
請問此數列共有幾項？

解：小明說：我把每項數字當作數線上的一點，先觀察 $1 \sim 25$ 相差 24，公差 3，



我發現 $(25-1) \div 3$ 可以得到 8 個線段和 9 項數字。

同樣方式，觀察 $1 \sim 61$ 相差 60，公差 3， $(61-1) \div 3 = 20$ ，
可以得到 20 個線段和 21 項數字。

小英說：我用對應關係整理數字，發現：

(項)	(數字)	(數字)	(數字)
1	$\rightarrow 1$	$\rightarrow 1+3 \times 0$	$\rightarrow 1+3 \times (1-1)$
2	$\rightarrow 4$	$\rightarrow 1+3 \times 1$	$\rightarrow 1+3 \times (2-1)$
3	$\rightarrow 7$	$\rightarrow 1+3 \times 2$	$\rightarrow 1+3 \times (3-1)$
4	$\rightarrow 10$	$\rightarrow 1+3 \times 3$	$\rightarrow 1+3 \times (4-1)$
5	$\rightarrow 13$	$\rightarrow 1+3 \times 4$	$\rightarrow 1+3 \times (5-1)$
...
?	$\rightarrow 61$	$\rightarrow 1+3 \times 20$	$\rightarrow 1+3 \times (21-1)$

從 $61 = 1 + 3 \times (21-1)$ 發現 61 是第 21 項，得到數列共有 21 項。

小華說：我利用等差數列公式： $a_n = a_1 + d \times (n-1)$ ，得到 $1 + 3 \times (n-1) = 61$

$$3 \times (n-1) = 60$$

$$n-1 = 20, n = 21$$

也就是共有 21 項。

答：21 項



隨堂練習

等差數列 $2, 5, 8, 11, 14, 17, \dots, 41$ 中，共有幾項？

答：14 項



教材內容說明：

1. 本教材第 11-12 頁的教學重點是給定有省略符號的等差數列，知道首項、公差及末項，找出項數。

本教材提供兩種解題方法：

- (1)將等差數列的各項數值，記成數線上的點，再利用數線上的兩點距離與公差的關係解題。
- (2)利用等差數列第 n 項公式解題。

2. 第(9)題給定公差為 3 的數列，要求學生找出項數。

本教材提供三個方法解題：

方法一：觀察線段和數字的關係。

方法二：等差數列公式的推導過程，幫助學生回憶。

方法三：利用等差公式代入求解。

- 若學生只會利用方法二解題時，教師應先接受，再幫助學生改成使用方法三解題。

3. 本頁下方隨堂練習的評量重點是檢核學生是否能利用等差數列計算公式找出項數。

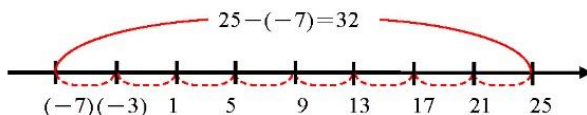


基本學習內容：NC-8-3-1；NC-8-4-1、2

基本學習內容：NC-8-3-1；NC-8-4-1、2 數列的意義；等差數列的意義、等差數列第 n 項公式

(10) 等差數列 $(-7), (-3), 1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, \dots, 41$ 中，共有幾項？

解：小明說：我把每項數字當作數線上的一點，先觀察 $(-7) \sim 25$ 相差 32，公差 4，



我發現 $[25 - (-7)] \div 4$ 可以得到 8 個線段和 9 項數字。

同樣方式，觀察 $(-7) \sim 41$ 相差 48，公差 4， $[41 - (-7)] \div 4 = 12$ ，
可以得到 12 個線段和 13 項數字。

小華說：我利用等差數列公式： $a_n = a_1 + d \times (n - 1)$ ，得到 $(-7) + 4 \times (n - 1) = 41$

$$4 \times (n - 1) = 41 - (-7) = 48$$

$$n - 1 = 48 \div 4 = 12$$

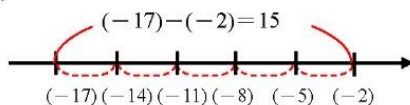
$$n = 12 + 1 = 13$$

也就是共有 13 項。

答：13 項

(11) 等差數列 $(-2), (-5), (-8), (-11), (-14), (-17), \dots, (-41)$ 中，共有幾項？

解：小明說：我把每項數字當作數線上的一點，先觀察 $(-2) \sim (-17)$ 相差 15，
公差 (-3) ，



我發現 $[(-17) - (-2)] \div 3$ 可以得到 5 個線段和 6 項數字。

同樣方式，觀察 $(-2) \sim (-41)$ 相差 (-39) ，公差 (-3) ，

$$[(-41) - (-2)] \div (-3) = 13，$$

可以得到 13 個線段和 14 項數字。

小華說：我利用等差數列公式： $a_n = a_1 + d \times (n - 1)$ ，

$$\text{得到 } (-2) + (-3) \times (n - 1) = (-41)$$

$$(-3) \times (n - 1) = (-41) - (-2) = (-41) + 2 = (-39)$$

$$n - 1 = (-39) \div (-3) = 13$$

$$n = 13 + 1 = 14$$

也就是共有 14 項。

答：14 項



教材內容說明：

1. 本教材第 11-12 頁的教學重點是給定有省略符號的等差數列，知道首項、公差及末項，找出項數。

本教材提供兩種解題方法：

- (1)將等差數列的各項數值，記成數線上的點，再利用數線上的兩點距離與公差的關係解題。
- (2)利用等差數列第 n 項公式解題。

2. 第(10)題給定公差為 4 的數列，要求學生找出項數。

本教材提供兩個方法解題：

方法一：觀察線段和數字的關係。

方法二：利用等差公式代入求解。

3. 第(11)題給定公差為-3 的數列，要求學生找出項數。

本教材提供兩個解法：

本教材提供兩個方法解題：

方法一：觀察線段和數字的關係。

方法二：利用等差公式代入求解。



基本學習內容：NC-8-3-1；NC-8-4-1、2 數列的意義；等差數列的意義、等差數列第 n 項公式



小試身手

①觀察下列數列的規律，在空格中填入適當的數。

(1) $-3, -6, -9, -12, \square$

(2) $2, 4, 8, \square, 32, 64$

(3) $-1, 3, \square, 11, 15$

(4) $-1, 2, -3, 4, -5, 6, \square, 8, -9, 10$

答：(1) -15 (2) 16 (3) 7 (4) -7

②判斷下列數列是否為等差數列。如果是等差數列，寫出它的公差。

(1) $-2, -2, -2, -2, -2, -2$

答：是，公差為 0

(2) $1, -2, 3, -4, 5, -6$

答：不是

(3) $6, 3, 0, -3, -6$

答：是，公差為 -3

(4) $-2, -5, -9, -14, -20, -27$

(5) $5, 10, 15, 20, 25, 30$

答：不是

③若等差數列的首項為 12 ，公差為 -2 ，求此等差數列的第 16 項。

答： -18

④已知 $7, 11, 15, \dots, 67$ 為等差數列，則此等差數列共有幾項？

答： 16 項



教材內容說明：

1. 本頁小試身手，包含 4 個子問題，提供學生等差數列公式及等差級數和公式的練習。



教育部國民及學前教育署 編

國民中學

學生學習扶助教材

8 年級數學

