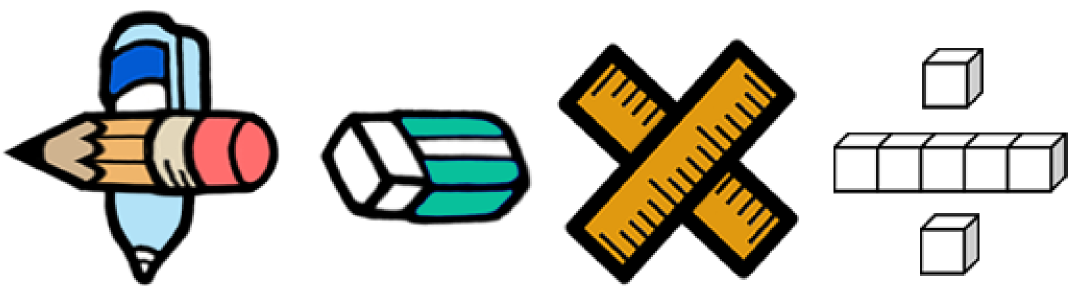
本教材著作財產權為教育部國民及學前教育署所有

基本學習內容：NC-8-6-1、2

等比數列之意義、

等比數列第 n 項公式

【教師用】



教育部國民及學前教育署 編

中華民國 111 年 8 月

本教材著作財產權為教育部國民及學前教育署所有

學習內容：

N-8-6 等比數列：等比數列；給定首項、公比計算等比數列的一般項。

備註：不處理「已知等比數列不相鄰某兩項的值(不含首項)，反求首項、項數或公比」，

例如：給定和的值，求首項和公比。

基本學習內容：

NC-8-6-1　等比數列之意義。

NC-8-6-2　等比數列第 n 項公式。

基本學習表現：

NCP-8-6-1-1 認識等比數列的名稱與意義。

NCP-8-6-1-1 能判別一數列是否為等比數列。

NCP-8-6-2-1 認識首項、前項、後項、公比、第 n 項的名稱。

NCP-8-6-2-2 認識公比$r=\dfrac{a_{m+1}}{a_m}$，$a\neq 0$。

NCP-8-6-2-3 認識第n項$a_n=a_1r^{n-1}$，r為公比。

NCP-8-6-2-4 給定一等比數列，能依題意求出：公比、第n項、或某數為第幾項等。

本教材著作財產權為教育部國民及學前教育署所有

概要說明：

■ 本基本學習內容 NC-8-6-1 及 NC-8-6-2 為 N-8-4 之後續學習概念，學生應該已認識等差數列及一般項公式。

■ 本基本學習內容幫助學生認識等比數列的意義及一般項公式。

■ 本基本學習內容限制等比數列的首項以整數為原則。

■ 本基本學習內容不引入等比中項。

■ 本基本學習內容主要讓學生觀察數列中，若後項除以前項皆為定值時即為等比數列，如：2, −2, 2, −2, · · · 也為等比數列。

■ 本學習內容限制等比數列中的公比以正整數、負整數或單位分數（如: $\frac{1}{2}$、$\frac{1}{3}$ ）為原則。

■ 對於等比數列 $a_n = a_1 r^{n-1}$ 的教學，建議教師可以將項次與各項的值產生對應關 係，幫助學生看到項次與指數的關係。例如:底下以等比數列 3,6,12,24,48,768 說明如何推導第 n 項的值：

項次	值	算式拆解(乘法)	算式拆解（指數）	項次和指數的關係
1	$a_1 = 3$	3	3	3
2	$a_2 = 6$	3×2	3×2^1	$3\times2^{2-1}$
3	$a_3 = 12$	$3\times2\times2$	3×2^2	$3\times2^{3-1}$
4	$a_4 = 24$	$3\times2\times2\times2$	3×2^3	$3\times2^{4-1}$
5	$a_5 = 48$	$3\times2\times2\times2\times2$	3×2^4	$3\times2^{5-1}$
n	$a_n = 768$	$3\times2\times2...$		$3\times2^{n-1}$

$768 = 3\times2^{n-1}$ 解出 n=8

得到 $a_n = a_1 r^{n-1}$，n＝1,2,3,4,5, ……

■ 不處理「已知等比數列不相鄰某兩項的值（不含首項），反求首項、項數或公比」，例如：給定 a_5 和 a_7 的值，求首項和公比。

本教材著作財產權為教育部國民及學前教育署所有

◎複習等差數列

(1)

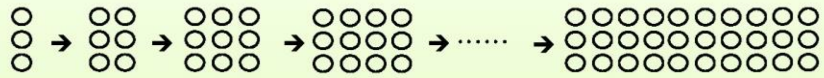


圖 1　圖 2　圖 3　圖 4　圖 10

如上圖，棋子的排列有規律，
圖 1 有一排棋子 3×1 個，圖 2 有二排棋子 3×2 個，
圖 3 有三排棋子 3×3 個，圖 4 有四排棋子 3×4 個，……
用一個算式把圖 1~圖 10 的棋子排數和棋子個數對應記下來，
你要怎麼表示這個算式？並列出此棋子的排列數。

解：我把各個圖的棋子排數跟棋子個數做對應，整理如下：

（棋子排數）		（棋子個數）
1	→	3×1 (個)
2	→	3×2 (個)
3	→	3×3 (個)
4	→	3×4 (個)
……		
10	→	3×10(個)

n

我發現棋子排數和棋子個數有對應關係，
可以用一個算式記下來：

（棋子排數）		（棋子個數）
n	→	3×n(個)
n=1,2,3,……,10		

因此圖一至圖十棋子數分別為 3,6,9,12,15,18,21,24,27,30 個。

如上例圖一至圖十的棋子個數分別是 3,6,9,12,15,18,21,24,27,30，
相鄰二項，其後項減去前項所得的差都相等，如 a_2-a_1=6-3=3,
a_3-a_2=9-6=3, a_4-a_3=12-9=3, a_5-a_4=15-12=3, a_6-a_5=18-15=3,
a_7-a_6=21-18=3, a_8-a_7=24-21=3, a_9-a_8=27-24=3, a_{10}-a_9=30-27=3,
像這樣相鄰後項減去前項所得的差都相等的數列，稱為**等差數列**。
每個後項減前項的差，稱為**公差**，記為 d。
如上述的等差數列，公差 d 是 3，記為 d=3。

本教材著作財產權為教育部國民及學前教育署所有

教材內容說明：

1. 本教材第 1~2 頁的教學重點是複習等差數列的意義(NC-8-4-1)，幫助學生「發現棋子排數和棋子個數有對應關係」，為後面等比數列問題鋪路。

2. 第(1)題給定「有規律的棋子的排列圖形」，要求學生把圖 1 到圖 10 中，棋子的個數用一個算式記錄下來。

   本教材透過下列步驟幫助學生理解:

   步驟一：將(棋子排數)和(棋子個數)，詳細的列出來，讓學生觀察數字，

   發現棋子排數和棋子個數的對應關係是

   1→3，2→6，3→9，4→12，……，10→30。

   步驟二：將(棋子排數)和(棋子個數)的對應關係，改記如下：

   1→3×1，2→3×2，3→3×3，4→3×4，……，10→3×10。

   步驟三：用 n 代表(棋子排數)，將(棋子個數)用含有 n 的一次式表示對應關係。

   - 教師應注意「棋子排數和棋子個數有對應關係」和「利用算式將對應關係記下來」之間的表徵轉換。
   - 自變數 n 為棋子的排數，並非圖示的編碼。

3. N-8-4 已引入等差數列，如果學生不認識等差數列的公差與項數的關係，教師可參閱 NC-8-4-1 的教材，或提供 NC-8-4-1 的教材讓學生練習。

本教材著作財產權為教育部國民及學前教育署所有

(2)在等差數列 4,7,10,13,16,19... 中，公差為 3，
用一個算式表示此等差數列，你要怎麼表示這個算式？

解：我把每一項的數字做整理，發現：

(項)	(數字)
1 →	4
2 →	7
3 →	10
4 →	13
5 →	16
6 →	19
……	

➔

(項)	(數字)
1 →	4
2 →	4＋3
3 →	4＋3＋3
4 →	4＋3＋3＋3
5 →	4＋3＋3＋3＋3
6 →	4＋3＋3＋3＋3＋3
……	

➔

(項)	(數字)
1 →	4
2 →	4＋3×1
3 →	4＋3×2
4 →	4＋3×3
5 →	4＋3×4
6 →	4＋3×5
……	

➔

(項)	(數字)
1 →	4
2 →	4＋3×(2－1)
3 →	4＋3×(3－1)
4 →	4＋3×(4－1)
5 →	4＋3×(5－1)
6 →	4＋3×(6－1)
……	

➔

(項)	(數字)
1	→ 4＋3×(1－1)
2	→ 4＋3×(2－1)
3	→ 4＋3×(3－1)
4	→ 4＋3×(4－1)
5	→ 4＋3×(5－1)
6	→ 4＋3×(6－1)
	……

n

我可以用一個算式記下來：

(項)	(數字)
n	→ 4＋3×(n－1)，n＝1,2,3,4,⋯

另外一個記法，我把對應的數字寫做 a(n)
或是改寫成 a_n，算式可以記成

$a_n = 4 + 3\times(n-1)$，$n = 1,2,3,4,\cdots$

本教材著作財產權為教育部國民及學前教育署所有

教材內容說明：

1. 本教材第 1~2 頁的教學重點是複習等差數列的意義(NC-8-4-1)，幫助學生「發現棋子排數和棋子個數有對應關係」，為後面等比數列問題鋪路。
2. 第(2)題直接提供一個等差數列，並告知公差為 3。請學生試著用一個算式表示此等差數列。本教材透過下列步驟幫助學生理解:

   步驟一：首先列出(項)和(數字)的對應關係。

   步驟二：將(項)和(數字)與公差間的關係以連續加法表示，讓學生看見項數增加，公差也跟著增加。

   步驟三：將公差從連續加法的表示方式，改寫成乘法紀錄，讓學生觀察項數與公差個數間的關係。

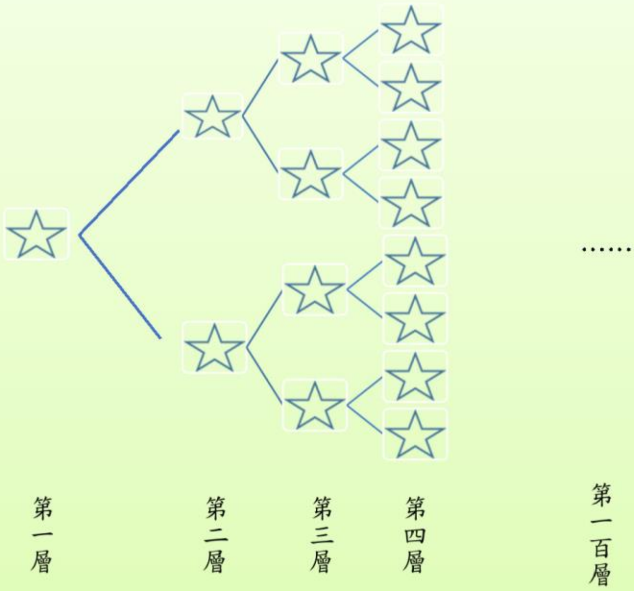
   步驟四：將公差的個數改寫成和項數相同的數字，讓學生看到項數與公差個數相差 1 的關係。

   步驟五：讓學生從 a_1~a_6 試著推論到第 n 項的算式表示法。

本教材著作財產權為教育部國民及學前教育署所有

◎**等比數列**

(1)



如上圖，樹狀圖第一層有 1 顆星，第二層有 1×2 顆星，
第三層有 1×2×2 顆星，第四層有 1×2×2×2 顆星，依此類推有一百層，
請問：依此關係，用一個算式來表示從第一層到第一百層星星的層數和星星數對應記下來，你要怎麼表示這個算式？

解：我把各層的層數跟星星個數做對應，整理如下：

(層數)		(星星個數)	
1	→	1	(個)
2	→	1×2	(個)
3	→	1×2×2	(個)
4	→	1×2×2×2	(個)
......			
100	→	1×2×2×…×2	(個)

➔

(層數)		(星星個數)	
1	→	1	(個)
2	→	1×2^{1}	(個)
3	→	1×2^{2}	(個)
4	→	1×2^{3}	(個)
......			
100	→	1×2^{99}	(個)

本教材著作財產權為教育部國民及學前教育署所有

教材內容說明：

1. 本教材第 3~4 頁的教學重點是介紹等比數列的意義。
2. 第(1)題給定一個星星樹狀圖，說明樹狀圖第一層有 1 顆星星，第二層有 1×2 顆星，第三層有 1×2×2 顆星，第四層 1×2×2×2 顆星，依此類推有一百層，要求學生用一個算式來表示(星星層數)和(星星數)的對應關係。

   本教材將星星的層數視為自變數，星星的顆數視為應變數，透過下列步驟幫助學生解題:

   步驟一：先列出(層數)和(星星個數)的對應關係表，第一層對應 1 顆星，第二層對應 1×2 顆星，第三層對應 1×2×2 顆星，第四層對應 1×2×2×2 顆星……第 100 層對應 1×2×2……×2 顆星。

   步驟二：把步驟一的關係表格改用指數來表示。

   - 教師可以幫助學生看到第 n 層星星個數是第 $n-1$ 層星星個數的 2 倍。

本教材著作財產權為教育部國民及學前教育署所有

➔

(層數)	(星星個數)	
1	$\rightarrow 1\times 2^{(1-1)}$	(個)
2	$\rightarrow 1\times 2^{(2-1)}$	(個)
3	$\rightarrow 1\times 2^{(3-1)}$	(個)
4	$\rightarrow 1\times 2^{(4-1)}$	(個)
	……	
100	$\rightarrow 1\times 2^{(100-1)}$	(個)

n

我發現層數和星星個數有對應關係，可以用一個算式記下來:

(層數)　(星星個數)

n　$\rightarrow$　$1\times 2^{(n-1)}$ (個)　，　n=1,2,3, ……,100

另外一個記法

$a_1 = 1\times 2^{(1-1)}$　　$a_2 = 1\times 2^{(2-1)}$　　$a_3 = 1\times 2^{(3-1)}$

$a_4 = 1\times 2^{(4-1)}$　　$a_5 = 1\times 2^{(5-1)}$

我把第 n 層的星星個數寫成 a_n，算是可記成

$a_n = 1\times 2^{(n-1)}$　，n=1,2,3,4,…,100

由上例數列 1,2,4,8,16 中，
任何相鄰二項，其後項除以前項所得的商都相等，如
$a_2\div a_1=2\div 1=2$, $a_3\div a_2=4\div 2=2$, $a_4\div a_3=8\div 4=2$, $a_5\div a_4=16\div 8=2$，
像這樣相鄰後項除以前項所得的商都相等的數列，稱為**等比數列**。
每個後項除以前項的商，稱為**公比**，記為 r。
上述的等比數列，公比 r 是 2，記為 r=2。

本教材著作財產權為教育部國民及學前教育署所有

教材內容說明：

1. 本教材第 3~4 頁的教學重點是介紹等比數列的意義。
2. 第(1)題給定一個星星樹狀圖，說明樹狀圖第一層有 1 顆星星，第二層有 1×2 顆星，第三層有 $1\times2\times2$ 顆星，第四層 $1\times2\times2\times2$ 顆星，依此類推有一百層，要求學生用一個算式來表示(星星層數)和(星星數)的對應關係。

   本教材將星星的層數視為自變數，星星的顆數視為應變數，透過下列步驟幫助學生解題:

   步驟三：把步驟二的對應關係表中，將

   第一層星星的顆數 1 改記成 $1\times2^{1-1}$，

   第二層星星的顆數 1×2 改記成 $1\times2^{2-1}$，

   第三層星星的顆數 $1\times2\times2$ 顆星改記成 $1\times2^{3-1}$，.......

   第 100 層星星的顆數 $1\times\ldots\ldots\times2\times2$ 改記成 $1\times2^{100-1}$。

   - 改記的目的，是幫助學生更容易看到自變數和應變數的對應關係。

   步驟四：把步驟三的關係表，透過使用變數 n 代替層數，改記成

   $n\rightarrow 1\text{x}2^{(n-1)}$個，$n$=1,2,3, ……,100。

3. 像這樣相鄰兩項，後項除以前項所得的商都相等的數列，稱為等比數列。

   每個後項除以前項的商，稱為公比，記為 r。

   - 由上面數列 1,2,4,8,16……中，我們發現後項除以前項的商都是 2，所以它是公比為 2 的等比數列。
   - 教師應多舉一些等比數列的例子，幫助學生理解等比數列的意義。

本教材著作財產權為教育部國民及學前教育署所有

(2)一球由高 135 公尺處落下，若每次反跳高度為落下高度的 2/3，第一次落下彈起的高度是 90 公尺，如圖所示，請依此關係，用一個算式來表示從落下到第十次的反跳高度對應數，你要怎麼表示這個算式？

解：

（次數）　（高度）

$1 \rightarrow 90$

$2 \rightarrow 90\times\frac{2}{3}$

$3 \rightarrow 90\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}$

$4 \rightarrow 90\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}$

$5 \rightarrow 90\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}$

$6 \rightarrow 90\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}$

$7 \rightarrow 90\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}$

……

➔

（次數）　（高度）

$1 \rightarrow 90$

$2 \rightarrow 90\times(\frac{2}{3})^1$

$3 \rightarrow 90\times(\frac{2}{3})^2$

$4 \rightarrow 90\times(\frac{2}{3})^3$

$5 \rightarrow 90\times(\frac{2}{3})^4$

$6 \rightarrow 90\times(\frac{2}{3})^5$

$7 \rightarrow 90\times(\frac{2}{3})^6$

……

➔

（次數）　（高度）

$1 \rightarrow 90\times 1$

$2 \rightarrow 90\times(\frac{2}{3})^1$

$3 \rightarrow 90\times(\frac{2}{3})^2$

$4 \rightarrow 90\times(\frac{2}{3})^3$

$5 \rightarrow 90\times(\frac{2}{3})^4$

$6 \rightarrow 90\times(\frac{2}{3})^5$

$7 \rightarrow 90\times(\frac{2}{3})^6$

……

➔

（次數）　（高度）

$1 \rightarrow 90\times(\frac{2}{3})^0$

$2 \rightarrow 90\times(\frac{2}{3})^1$

$3 \rightarrow 90\times(\frac{2}{3})^2$

$4 \rightarrow 90\times(\frac{2}{3})^3$

$5 \rightarrow 90\times(\frac{2}{3})^4$

$6 \rightarrow 90\times(\frac{2}{3})^5$

$7 \rightarrow 90\times(\frac{2}{3})^6$

……

➔

（次數）　（高度）

$\boxed{1} \rightarrow 90\times(\frac{2}{3})^{(\boxed{1}-1)}$

$\boxed{2} \rightarrow 90\times(\frac{2}{3})^{(\boxed{2}-1)}$

$\boxed{3} \rightarrow 90\times(\frac{2}{3})^{(\boxed{3}-1)}$

$\boxed{4} \rightarrow 90\times(\frac{2}{3})^{(\boxed{4}-1)}$

$\boxed{5} \rightarrow 90\times(\frac{2}{3})^{(\boxed{5}-1)}$

$\boxed{6} \rightarrow 90\times(\frac{2}{3})^{(\boxed{6}-1)}$

$\boxed{7} \rightarrow 90\times(\frac{2}{3})^{(\boxed{7}-1)}$

……

n

我可以用一個算式記下來：

（次數）　（高度）

$n \rightarrow 90\times(\frac{2}{3})^{(n-1)}$ ，$n=1,2,3,4,5,6,7,\cdots 10$

另外一個記法，我把落下反彈對應的高度寫成 a_n，算式可以記成

$a_n = 90\times(\frac{2}{3})^{(n-1)}$，$n=1,2,3,4,\cdots 10$

本教材著作財產權為教育部國民及學前教育署所有

教材內容說明：

1. 本教材第 3~6 頁的教學重點是是介紹等比數列的意義。
2. 第(3)題給定一個球從高處落下，說明若每一次球落下後，反彈高度為落下高度 2/3 倍，第一次落下彈起的高度是 90 公尺，請學生用一個算式來表示從落下到第十次的反彈高度對應數。

本教材透過下列步驟幫助學生理解:

步驟一：先列出(次數)和(高度)的對應關係表，第一層對應 90 公尺，第二層對應 $90\times\frac{2}{3}$，

第三層對應 $90\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}$，第四層對應 $90\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}$，……。

步驟二：把步驟一的關係表，改用指數來表示。

步驟三：把步驟二的對應關係表中，將第一層的高度改記成 90×1。

步驟四：把步驟三的對應關係表中，將第一層的高度改記成 $90\times(\frac{2}{3})^0$。

步驟五：把步驟四的對應關係表中，將

第一層的高度改記成 $90\times(\frac{2}{3})^{1-1}$，第二層的高度改記成 $90\times(\frac{2}{3})^{2-1}$，

第三層的高度改記成 $90\times(\frac{2}{3})^{3-1}$，……，第十層的高度改記成 $90\times(\frac{2}{3})^{10-1}$。

- 改記的目的，是幫助學生更容易看到自變數和應變數的對應關係。

步驟六：透過使用變數 n 代替次數，把步驟五的對應關係表，改記成

$n \rightarrow 90\times(\frac{2}{3})^{n-1}$，$n$=1,2,3, ……,10，並改記成 $a_n=90\times(\frac{2}{3})^{n-1}$。

本教材著作財產權為教育部國民及學前教育署所有

如果 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ 為等比數列，第 n 項寫成 a_n，公比寫成 r，
我們可以發現：

1 $\rightarrow a_1 \qquad = a_1\times r^0 \quad = a_1\times r^{(1-1)}$

2 $\rightarrow a_2=a_1\times r \qquad = a_1\times r^1 \quad = a_1\times r^{(2-1)}$

3 $\rightarrow a_3=a_1\times r\times r \qquad = a_1\times r^2 \quad = a_1\times r^{(3-1)}$

4 $\rightarrow a_4=a_1\times r\times r\times r \qquad = a_1\times r^3 \quad = a_1\times r^{(4-1)}$

……

所以我們可以得到一個計算公式：$a_n = a_1\times r^{(n-1)}$，$n=1,2,3,\cdots$

本教材著作財產權為教育部國民及學前教育署所有

教材內容說明：

1. 本教材第 3~6 頁的教學重點是介紹等差數列的意義。
2. 如果a_1, a_2, a_3 ……a_n為等比數列，第 n 項寫成a_n，公比寫成 r，我們可以得到一個計算公式$a_n = a_1 \times r^{(n-1)}$，$n = 1, 2, 3, \ldots$
   - 教師應多舉一些等比數列的例子，幫助學生理解等比數列的意義。

本教材著作財產權為教育部國民及學前教育署所有

(3) 請判斷下列哪一個是等比數列？若為等比數列，請說明公比是多少？

① 2,5,8,11,14,17

②19,13,7,1,-5,-11

③ 1,2,4,8,16,32

④ 7,7,7,7,7,7

⑤ 3,-3,3,-3,3,-3

解： ①$a_2 \div a_1 = 5 \div 2 = 2.5$

$a_3 \div a_2 = 8 \div 5 = 1.6$

因為 $2.5 \neq 1.6$，我發現 $a_2 \div a_1 \neq a_3 \div a_2$，所以不是等比數列。

②$a_2 \div a_1 = 13 \div 19 = \frac{13}{19}$

$a_3 \div a_2 = 7 \div 13 = \frac{7}{13}$

因為$\frac{13}{19} \neq \frac{7}{13}$，我發現相 $a_2 \div a_1 \neq a_3 \div a_2$，所以不是等比數列。

③$a_2 \div a_1 = 2 \div 1 = 2$

$a_3 \div a_2 = 4 \div 2 = 2$

$a_4 \div a_3 = 8 \div 4 = 2$

$a_5 \div a_4 = 16 \div 8 = 2$

$a_6 \div a_5 = 32 \div 16 = 2$

因為 2=2=2=2=2，我發現 $a_2 \div a_1 = a_3 \div a_2 = a_4 \div a_3 = a_5 \div a_4 = a_6 \div a_5$，所以是等比數列，公比為 2。

④$a_2 \div a_1 = 7 \div 7 = 1$

$a_3 \div a_2 = 7 \div 7 = 1$

$a_4 \div a_3 = 7 \div 7 = 1$

$a_5 \div a_4 = 7 \div 7 = 1$

$a_6 \div a_5 = 7 \div 7 = 1$

因為 1=1=1=1=1，我發現 $a_2 \div a_1 = a_3 \div a_2 = a_4 \div a_3 = a_5 \div a_4 = a_6 \div a_5$，所以是等比數列，公比為 1。

⑤$a_2 \div a_1 = (-3) \div 3 = -1$

$a_3 \div a_2 = 3 \div (-3) = -1$

$a_4 \div a_3 = (-3) \div 3 = -1$

$a_5 \div a_4 = 3 \div (-3) = -1$

$a_6 \div a_5 = (-3) \div 3 = -1$

因為-1=-1=-1=-1=-1，我發現 $a_2 \div a_1 = a_3 \div a_2 = a_4 \div a_3 = a_5 \div a_4 = a_6 \div a_5$，所以是等比數列，公比為-1。

本教材著作財產權為教育部國民及學前教育署所有

教材內容說明：

1. 本教材第 7~13 頁的教學重點是等比數列的應用。
2. 第(3)題給定五個數列，要求學生判斷誰是等比數列，若為等比數列，請說明公比是多少。

①$a_2 \div a_1 = 5 \div 2 = 2.5$，$a_3 \div a_2 = 8 \div 5 = 1.6$，因為 $2.5 \neq 1.6$，後項除以前項的商不相等，所以不是等比數列。

②$a_2 \div a_1 = \dfrac{13}{19} \neq \dfrac{7}{13} = a_3 \div a_2$，後項除以前項的商不相等，所以不是等比數列。

③由數列 1,2,4,8,16,32 中，我們發現後項除以前項的商都是 2，所以它是公比為 2 的等比數列。

④由數列 7,7,7,7,7,7 中，我們發現後項除以前項的商都是 1，所以它是公比為 1 的等比數列。

⑤由數列 3,－3, 3,－3, 3,－3 中，我們發現後項除以前項的商都是－1，所以它是公比為－1 的等比數列。

● 如果要判斷它不是等比數列，只要找到一個相鄰兩項的商不相等即可。如果要判斷它是等比數列，則必須找出所有相鄰兩項的商都相等。

本教材著作財產權為教育部國民及學前教育署所有

(4) 已知某等比數列的首項為 3 且公比為 2，請列出此等比數列的前五項。

學生可能的解法:

方法一

(n)	(a_n)		(a_n)	(a_n)
1 →	$a_1=3$	→	3	= 3
2 →	$a_2=3\times2$	→	3×2	= 6
3 →	$a_3=3\times2\times2$	→	3×2^2	= 12
4 →	$a_4=3\times2\times2\times2$	→	3×2^3	= 24
5 →	$a_5=3\times2\times2\times2\times2$	→	3×2^4	= 48

等比數列的前五項為 3,6,12,24,48

方法二

$a_1=3$

$a_2= a_1\times r=3\times2=6$

$a_3= a_2\times r=6\times2=12$

$a_4= a_3\times r=12\times2=24$

$a_5= a_4\times r=24\times2=48$

等比數列的前五項為 3,6,12,24,48

方法三

$a_1=3$

$a_2= a_1\times r^{2-1}=3\times2^{2-1}=3\times2=6$

$a_3= a_1\times r^{3-1}=3\times2^{3-1}=3\times2^2=3\times4=12$

$a_4= a_1\times r^{4-1}=3\times2^{4-1}=3\times2^3=3\times8=24$

$a_5= a_1\times r^{5-1}=3\times2^{5-1}=3\times2^4=3\times16=48$

等比數列的前五項為 3,6,12,24,48

本教材著作財產權為教育部國民及學前教育署所有

教材內容說明：

1. 本教材第 7~13 頁的教學重點是等比數列的應用。

2. 第(4)題給定某等比數列的首項和公比，請學生列出此等比數列的前五項。

3. 本教材提供三種方法解題:

   方法一：透過等比數列的定義，先列出 n 和 a_n 的對應關係來解題。

   方法二：利用相鄰兩項，後項的值等於前項乘上公比的關係來解題。

   方法三：利用等比數列第 n 項公式 $a_n = a_1 \times r^{(n-1)}$ 來解題。

   - 本教材提供三種解題方法，教師應要求學生理解這三種方法。

本教材著作財產權為教育部國民及學前教育署所有

(5) 在下列□中填入適當的數，使得每個數列成為等比數列：

① 16 ,□, 4 , 2 , □

② □, 27 , 9 , □, □

解：①在等比數列 16 , □, 4 , 2 , □中，令 $a_1=16, a_3=4, a_4=2$，

知道相鄰的兩項且知道數字的只有 $a_3=4$ 和 $a_4=2$

得知 $r= a_4\div a_3=2\div 4=\frac{1}{2}$

因為 $a_2=a_1\times r$,

故 $a_2= 16\times \frac{1}{2}=8$

又因 $a_5=a_4\times r$,

故 $a_5= 2\times \frac{1}{2}=1$

②在等比數列□, 27 ,9 , □, □中，令 $a_2=27, a_3=9$,

相鄰的兩項且知道數字的只有 $a_2=27$ 和 $a_3=9$

得知 $r= a_3\div a_2=9\div 27=\frac{1}{3}$

因為 $r=a_2\div a_1$, $\frac{1}{3}=27\div a_1$,

故 $a_1=27\div \frac{1}{3}=81$

又因 $a_4=a_3 \times r$,

故 $a_4=9\times \frac{1}{3}=3$

再因 $a_5=a_4 \times r$,

故 $a_5=3\times \frac{1}{3}=1$

本教材著作財產權為教育部國民及學前教育署所有
BY NC SA

教材內容說明：

1. 本教材第 7~13 頁的教學重點是等比數列的應用。

2. 第(5)題給定某等比數列，請學生在□中填入是當的數，使得每個數列都成為等比數列。

3. 本教材透過下列步驟幫助學生理解：

①請學生先觀察此數列是否有相鄰兩項，

步驟一：知道相鄰兩項且知道數字的只有 $a_3=4$，$a_4=2$。

步驟二：由 $r=a_4\div a_3=2\div 4=\frac{1}{2}$。

步驟三：$a_2=16\times\frac{1}{2}=8$，$a_5=a_4\times\frac{1}{2}=2\times 1=2$

②請學生先觀察此數列是否有相鄰兩項，

步驟一：知道相鄰兩項且知道數字的只有 $a_2=27$，$a_3=9$。

步驟二：由 $r=a_3\div a_2=9\div 27=\frac{1}{3}$。

步驟三：$a_1=27\div\frac{1}{3}=81$，$a_4=a_3\times r=9\times\frac{1}{3}=3$，$a_5=a_4\times\frac{1}{3}=3\times\frac{1}{3}=1$

BY NC SA

(6) 已知某等比數列的第五項為 10 且公比為$\frac{1}{2}$，請列出此等比數列的前十項。

方法一

在等比數列 $a_1, a_2, a_3, a_4, 10, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}$,其中 $a_5=10$，$r=\frac{1}{2}$

$a_6=10\times\frac{1}{2}=5$

$a_7=10\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$

$a_8=10\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{4}$

$a_9=10\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{8}$

$a_{10}=10\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{16}$

$r=a_5\div a_4$，$\frac{1}{2}=10\div a_4$，$a_4=20$; $r=a_4\div a_3$，$\frac{1}{2}=20\div a_3$，$a_3=40$

$r=a_3\div a_2$，$\frac{1}{2}=40\div a_2$，$a_2=80$; $r=a_2\div a_1$，$\frac{1}{2}=80\div a_1$，$a_1=160$

故此等比數列的前十項為 160,80,40,20,10,5, $\frac{5}{2}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{5}{16}$

方法二

在等比數列 $a_1, a_2, a_3, a_4, 10, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}$,其中 $a_5=10$，$r=\frac{1}{2}$

$a_5=a_1\times r^{5-1}$ ， $10=a_1\times(\frac{1}{2})^{5-1}$ ，$10=a_1\times\frac{1}{16}$ ，$a_1=10\times16=160$

$a_2=a_1\times r^{2-1}$ ， $a_2=160\times(\frac{1}{2})^{2-1}=160\times\frac{1}{2}=80$

$a_3=a_1\times r^{3-1}$ ， $a_3=160\times(\frac{1}{2})^{3-1}=160\times\frac{1}{4}=40$

$a_4=a_1\times r^{4-1}$ ， $a_4=160\times(\frac{1}{2})^{4-1}=160\times\frac{1}{8}=20$

$a_6=a_5\times r=10\times\frac{1}{2}=5$

$a_7=a_5\times r^2=10\times(\frac{1}{2})^2=10\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$

$a_8=a_5\times r^3=10\times(\frac{1}{2})^3=10\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{4}$

$a_9=a_5\times r^4=10\times(\frac{1}{2})^4=10\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{8}$

$a_{10}=a_5\times r^5=10\times(\frac{1}{2})^5=10\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{16}$

故此等比數列的前十項為 160,80,40,20,10,5, $\frac{5}{2}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{5}{16}$

本教材著作財產權為教育部國民及學前教育署所有

BY NC SA

教材內容說明：

1. 本教材第 7~13 頁的教學重點是等比數列的應用。

2. 第(6)題給定某等比數列的第五項為 10，請學生此等比數列的前十項。

3. 本教材提供兩種方法解題：

   方法一：利用相鄰兩項，後項的值等於前項乘上公比的關係來解題。

   方法二：利用等比數列第 n 項公式 $a_n = a_1 \times r^{(n-1)}$ 來解題。

   - 本教材提供兩種解題方法，教師應要求學生理解這兩種方法。

本教材著作財產權為教育部國民及學前教育署所有

(7) 在等比數列 4,12,36,108,324,972,……，26244 中，公比為 3，
請問末項 26244 是第幾項？

解：

小英說：我用對應關係整理數字，發現：

(n)	(a_n)	(a_n)	(a_n)	(a_n)
1	→ 4	→ 4	→ 4×3^0	→ $4\times3^{(1-1)}$
2	→ 12	→ 4×3	→ 4×3^1	→ $4\times3^{(2-1)}$
3	→ 36	→ $4\times3\times3$	→ 4×3^2	→ $4\times3^{(3-1)}$
4	→ 108	→ $4\times3\times3\times3$	→ 4×3^3	→ $4\times3^{(4-1)}$
5	→ 324	→ $4\times3\times3\times3\times3$	→ 4×3^4	→ $4\times3^{(5-1)}$
…	…	…	…	…
？	→ 26244	→ $4\times3\times3\times3\times\cdots\times3$	→ 4×3^8	→ $4\times3^{(n-1)}$

從 $26244=4\times3^{(9-1)}$發現 $4\times3^8=4\times3^{(n-1)}$，$3^8=3^{(n-1)}$
故 26244 是第 9 項，得到數列共有 9 項。

小華說：等比數列 4,12,36,108,324,972,……，26244 ，其中 $a_1=4$，
$r=a_2\div a_1=12\div4=3$
末項是 26244，假設末項是第 n 項，由公式 $a_n=a_1\times r^{n-1}$ 知道，
$4\times3^{(n-1)}=26244$
$3^{(n-1)}=6561$
$3^{(n-1)}=3^8$
$n-1=8$
$n=9$
所以 26244 是第 9 項。

隨堂練習

(1) 在等比數列 1,2,4,8,16,32,64,……,512，公比為 2，請問 512 是第幾項？

答:第 10 項

本教材著作財產權為教育部國民及學前教育署所有

教材內容說明：

1. 本教材第 7~13 頁的教學重點是等比數列的應用。

2. 第(7)題給定某等比數列的首項和公比，請學生算此等比數列末項的值。

3. 本教材提供兩種方法解題：

方法一：透過等比數列的定義，找出項數和末項對應關係為 $26244=4\times3^{(n-1)}$，再利用因數分解 $26244=4\times3^{8}$ 解出 $n=9$。

方法二：先找出首項。再利用「相鄰兩項，後項的值除以前項等於公比」找出公比。最後，利用等比數列第 n 項公式 $a_n=a_1\times r^{(n-1)}$ 關係來解題。

- 本教材提供兩種解題方法，教師應要求學生理解這兩種方法。

4. 隨堂練習的答案為 $512=1\times2^{(n-1)}$，$n=10$。

本教材著作財產權為教育部國民及學前教育署所有

(8) 等比數列 1,-2,4,-8,16,-32,64,⋯,1024 中，首項是 1，末項是 1024，請問此數列共有幾項？

解：小英說：我用對應關係整理數字，發現：

(n)		(a_n)	(a_n)	(a_n)
1	→	1	$\to 1\times(-2)^0$	$\to 1\times(-2)^{(1-1)}$
2	→	-2	$\to 1\times(-2)$	$\to 1\times(-2)^{(2-1)}$
3	→	4	$\to 1\times(-2)\times(-2)$	$\to 1\times(-2)^{(3-1)}$
4	→	-8	$\to 1\times(-2)\times(-2)\times(-2)$	$\to 1\times(-2)^{(4-1)}$
5	→	16	$\to 1\times(-2)\times(-2)\times(-2)\times(-2)$	$\to 1\times(-2)^{(5-1)}$
⋯		⋯	⋯	⋯
？	→	1024	$\to 1\times(-2)^{10}$	$\to 1\times(-2)^{(n-1)}$

從 $1024=1\times(-2)^{(n-1)}$ 發現 $(-2)^{10}=(-2)^{(n-1)}$，

故 1024 是第 11 項，得到數列共有 11 項。

小華說：我利用等比數列公式：$a_n=a_1\times r^{(n-1)}$，得到 $1\times(-2)^{(n-1)}=1024$

$(-2)^{(n-1)}=(-2)^{10}$

$n-1=10$，$n=11$

也就是共有 11 項。

(9) 等比數列 $4,4\times3^1,4\times3^2,4\times3^3,4\times3^4,4\times3^5,\cdots,4\times3^{50}$ 中，首項是 4，末項是 4×3^{50}，請問 4×3^{50} 為第幾項？

解：小英說：我用對應關係整理數字，發現：

(n)		(a_n)		(a_n)
1	→	4×3^0	→	$4\times3^{(1-1)}$
2	→	4×3^1	→	$4\times3^{(2-1)}$
3	→	4×3^2	→	$4\times3^{(3-1)}$
4	→	4×3^3	→	$4\times3^{(4-1)}$
5	→	4×3^4	→	$4\times3^{(5-1)}$
⋯		⋯		⋯
？	→	4×3^{50}	→	$4\times3^{(n-1)}$

從 $4\times3^{50}=4\times3^{(n-1)}$ 發現 $3^{50}=3^{(n-1)}$，故 4×3^{50} 是第 51 項。

小華說：我利用等比數列公式：$a_n=a_1\times r^{(n-1)}$，得到 $4\times3^{(n-1)}=4\times3^{50}$

$3^{(n-1)}=3^{50}$

$n-1=50$，$n=51$

也就是第 51 項。

本教材著作財產權為教育部國民及學前教育署所有

BY NC SA

教材內容說明：

1. 本教材第 7~13 頁的教學重點是等比數列的應用。

2. 第(8)題給定某等比數列的首項和末項，請學生算出此等比數列的項數。

3. 本教材提供兩種方法解題：

   方法一：透過等比數列的定義，找出項數和末項對應關係 $1024=1\times(-2)^{(n-1)}$，

   再利用因數分解 $1024=2^{10}=(-2)^{10}$ 解出 $n=11$。

   方法二：利用第 n 項公式 $a_n=a_1\times r^{(n-1)}$ 關係來解題。

   ● 本教材提供兩種解題方法，教師應要求學生理解這兩種方法。

4. 第(9)題給定某等比數列的首項與末項，請學生判斷 4×3^{50} 為第幾項。

5. 本教材提供兩種方法解題：

   方法一：透過等比數列的定義，找出項數和末項對應關係 $4\times3^{(n-1)}$，

   再從 $4\times3^{50}=4\times3^{(n-1)}$ 解出 $n=51$。

   方法二：利用等比數列第 n 項公式 $a_n=a_1\times r^{(n-1)}$ 來解題。

   ● 本教材提供兩種解題方法，教師應要求學生理解這兩種方法。

本教材著作財產權為教育部國民及學前教育署所有

隨堂練習

(1) 等比數列 1,3,9,27,81,⋯,729 中，共有幾項？

答:共有 7 項

(10) 等比數列 $2^3,2^4,2^5,2^6,2^7,\cdots,2^{50}$ 中，首項是 2^3，末項是 2^{50}，請問此數列共有幾項？

解：小英說：我用對應關係整理數字，發現：

(n)	(a_n)	(a_n)	(a_n)	(a_n)
1	$\to 2^3$	$\to 2^3$	$\to 2^3\times2^0$	$\to 2^3\times2^{(1-1)}$
2	$\to 2^4$	$\to 2^3\times2$	$\to 2^3\times2^1$	$\to 2^3\times2^{(2-1)}$
3	$\to 2^5$	$\to 2^3\times2\times2$	$\to 2^3\times2^2$	$\to 2^3\times2^{(3-1)}$
4	$\to 2^6$	$\to 2^3\times2\times2\times2$	$\to 2^3\times2^3$	$\to 2^3\times2^{(4-1)}$
5	$\to 2^7$	$\to 2^3\times2\times2\times2\times2$	$\to 2^3\times2^4$	$\to 2^3\times2^{(5-1)}$
⋯	⋯	⋯	⋯	⋯
?	$\to 2^{50}$	$\to 2^3\times\ldots\times2$	$\to 2^3\times2^{47}$	$\to 2^3\times2^{(n-1)}$

從 $2^{50}=2^3\times2^{(n-1)}$發現 $2^{(n-1)}=2^{47}$，

故 2^{50} 是第 48 項，得到數列共有 48 項。

小華說：我利用等比數列公式：$a_n=a_1\times r^{(n-1)}$，得到 $2^3\times(2)^{(n-1)}=2^{50}$

$3+(n-1)=50$

$n=48$

也就是共有 48 項。

本教材著作財產權為教育部國民及學前教育署所有

教材內容說明：

1. 本教材第 7~13 頁的教學重點是等比數列的應用。

2. 隨堂練習的答案為 $729=1\times3^{(n-1)}$，$n=7$。

3. 第(10)題給定某等比數列的首項和末項，請學生算出此等比數列的項數。

4. 本教材提供兩種方法解題：

方法一：透過等比數列的定義，找出項數和末項對應關係 $2^3\times2^{(n-1)}$，

再從 $2^{50}=2^3\times2^{(n-1)}$ 解出 $n=48$。

方法二：利用等比數列第 n 項公式 $a_n=a_1\times r^{(n-1)}$ 關係來解題。

- 本教材提供兩種解題方法，教師應要求學生理解這兩種方法。

本教材著作財產權為教育部國民及學前教育署所有

BY NC SA

教育部國民及學前教育署 編

國民中學
學生學習扶助教材 8 年級數學