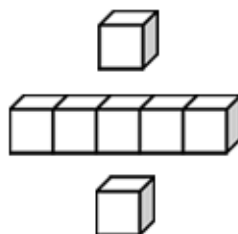


基本學習內容：SC-8-1-3

角平分線

【教師用】





基本學習內容：SC-8-1-3

學習內容：

S-8-1 角：角的種類；兩個角的關係（互餘、互補、對頂角、同位角、內錯角、同側內角）；角平分線的意義。

基本學習內容：

SC-8-1-3 角平分線。

基本學習表現：

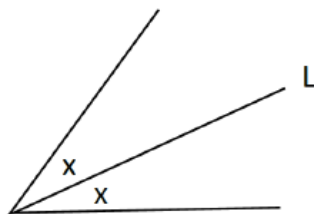
SCP-8-1-3-1 認識角平分線的意義。

概要說明：

- 基本學習內容 SC-8-1-3 為 SC-7-1-1 的後續學習概念，故學生應已認識角。

本基本學習內容開始引入角平分線。

- 從一個角的頂點引出一條射線 L ，把這個角分成兩個角度相同的角，這條射線叫做這個角的角平分線。

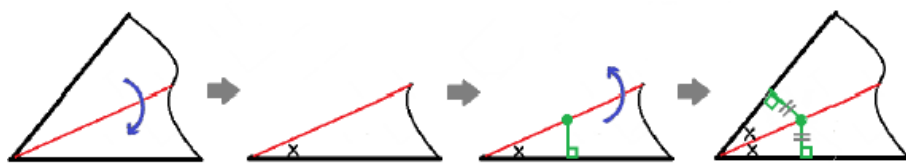


- 可以透過摺紙的方式來做出角平分線。

- 角平分線上任一點到角的兩邊距離相等，本基本學習內容提供兩種說明此性質的方法。

方法一：先透過摺紙找出角平分線，並隨意在角平分線取一點做出一邊的垂線，

最後將摺紙攤開，便可發現「角平分線上一點做出兩邊的垂線會等長」，如下圖。

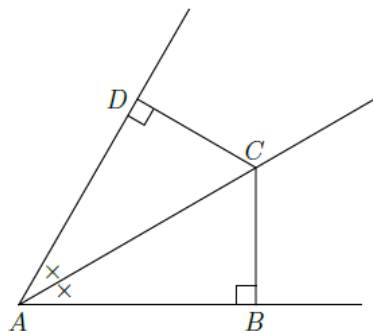


方法二：在 $\angle A$ 的角平分線上取一點 C 往 $\angle A$ 的兩邊分別做出垂線，

設垂線與兩邊的交點分別為 B 、 D 兩點。觀察 $\triangle ABC$ 與 $\triangle ADC$ ，

我們有 AC 為公共邊、 $\angle BAC = \angle DAC$ 和 $\angle CBA = 90^\circ = \angle CDA$ 。

由 AAS 三角形全等判定知 $\triangle ACB \cong \triangle ACD$ ，故 $CD = CB$ ，如下圖。



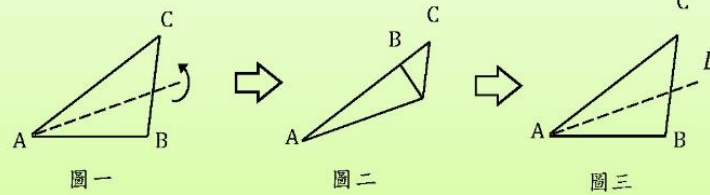
- 垂直平分線是平角的角平分線。

◎角平分線

(1) 拿出附件一中的三角形 ABC ，將 \overline{AB} 往上摺，與 \overline{AC} 疊合，再打開。設

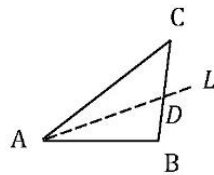
摺痕直線為 L ， L 將 $\angle A$ 分割成兩個角。請問這兩個角是否相等？

試說明你的理由。

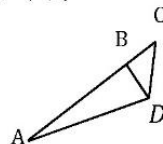


解：

設 L 與 \overline{BC} 交於 D 點， L 將 $\angle A$ 分割成 $\angle CAD$ 與 $\angle DAB$ ，如下圖



將 D 點標示在圖二上，如下圖



由上面的結果，我們可以看到， $\angle CAD$ 與 $\angle DAB$ 重疊在一起，因此

$$\angle CAD = \angle DAB。$$

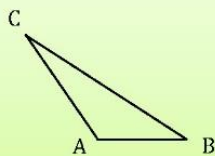


教材內容說明：

1. 本教材第 1 頁的教學重點是透過將三角形的其中一個角對摺，使得角的兩邊疊合，摺出兩個相等的角，幫助學生看到該角的角平分線。
2. 本教材區分銳角、鈍角及直角三種情況幫助學生建立角平分線的概念。
例題(1)，討論銳角角平分線，教師透過摺紙幫助學生看到角平分線。
例題(2)，討論鈍角角平分線，學生透過摺紙摺出相等的兩個角，並定義此摺線為該角的角平分線。
例題(3)，討論直角角平分線，要求學生做出角平分線。
3. 例題(1)，給定一張三角形紙張， $\angle A$ 為銳角，教師將 \overline{AB} 往上摺，與 \overline{AC} 疊合，幫助學生觀察摺痕 L 將 $\angle A$ 平分成相等的兩個角，並說明理由。
 - 教師應強調「摺痕 L 將 $\angle A$ 平分成相等的兩個角」。

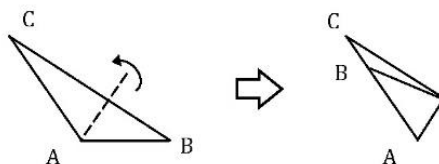
基本學習內容：SC-8-1-3 角平分線

(2) 拿出附件二中的三角形 ABC ，請找出一條直線 L ，將 $\angle A$ 分割成兩個相等的角。



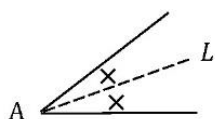
解

由(1)，我們知道將 \overline{AB} 往上摺，與 \overline{AC} 疊合，摺線會將 $\angle A$ 分割成兩個角，而且這兩個角相等，所以摺線就是 L 。



將一個角分割成兩個相等角的直線，此直線稱為該角的角平分線。

例如：直線 L 將 $\angle A$ 平分成分度相等的兩個角，我們稱直線 L 為 $\angle A$ 的角平分線。



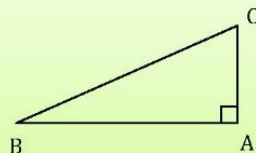


教材內容說明：

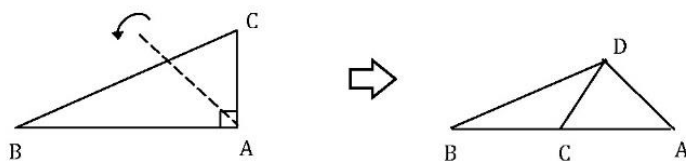
1. 本教材第 2 頁的教學重點是討論鈍角角平分線，學生透過摺紙摺出相等的兩個角，幫助學理解角平分線的意義，並定義此摺線為該角的角平分線。
2. 例題(2)，給定一張鈍角三角形紙張， $\angle A$ 為鈍角，要求學生找出一條直線將 $\angle A$ 分割成相等的兩個角。
 - 學生將 \overline{AB} 往上摺，與 \overline{AC} 疊合，摺痕 L 會將 $\angle A$ 平分成相等的兩個角。
 - 摺痕 L 將 $\angle A$ 分成兩個角，教師應要求學生說明，此兩角相等的理由。
 - 若學生將 \overline{AC} 往下摺，與 \overline{AB} 疊合，也接受此解法。
3. 本定義框進行角平分線的命名，將一個角分割成兩個相等角的直線，此直線稱為該角的角平分線。
 - 教師應透過下列兩點檢查學生是否理解角平分線的意義。
 - (1) 給定一個角及一直線，且此直線將角分割成相等的兩個角，
檢查學生是否能將此線稱為該角的角平分線。
 - (2) 給定一個角及其角平分線，要求學生說出角平分線的意義。
此線將角分割後的兩個角，檢查學生是否能夠說出其角度相等。

基本學習內容：SC-8-1-3 角平分線

(3) 拿出附件三中的直角三角形 ABC ， $\angle A$ 為直角，請畫出 $\angle A$ 的角平分線。



解 1: 摺紙活動



將 \overline{AC} 往下摺，疊合至 \overline{BA} 上，摺線交 \overline{BC} 於 D 點。

如圖， $\angle CAD$ 與 $\angle DAB$ 重疊在一起，因此 $\angle CAD = \angle DAB$ 。

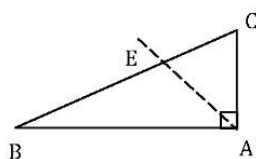
畫出摺線 \overline{AD} ， \overline{AD} 為 $\angle A$ 的角平分線。

解 2: 使用量角器

$\angle A$ 為直角， $\angle A$ 的角平分線會將 $\angle A$ 平分成為兩個 45° 的角，

使用量角器，畫出 45° 的角，交 \overline{BC} 於 E 點。

\overline{AE} 為 $\angle A$ 的角平分線。





教材內容說明：

1. 本教材第 3 頁的教學重點是討論直角角平分線，要求學生做出角平分線。
2. 例題(3)，給定一張直角三角形色紙， $\angle A$ 是直角，要求學生畫出 $\angle A$ 的角平分線。

本教材提供兩種解題方法。

方法一:透過摺紙解題

- 將 \overline{AC} 往下摺，與 \overline{BA} 疊合，摺痕 \overline{AD} 會將 $\angle A$ 平分成相等的兩個角，摺痕 \overline{AD} 為角平分線。
- 若學生將 \overline{AB} 往上摺，與 \overline{AC} 疊合，也接受此解法。

方法二:透過量角器解題

- 直角的一半為 45 度，使用量角器畫出與一股夾角為 45 度角的直線，該直線為角平分線。

◎角平分線性質

(4) 拿出附件四中的三角形 ABC ， L 為 $\angle A$ 的角平分線。

步驟一：沿著直線 L ，將 \overline{AB} 往上摺，疊合至 \overline{AC} ，如圖一。

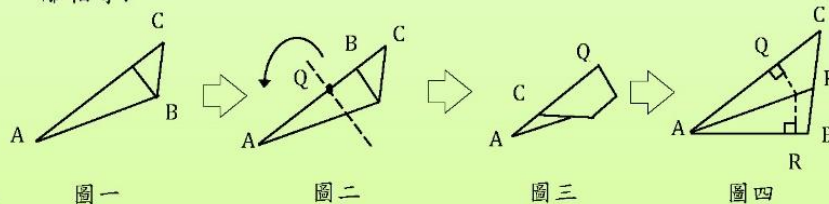
步驟二：在 \overline{AC} 上任取一點 Q ，如圖二。

步驟三：以 Q 為摺點，將 C 點往 A 點方向對摺，讓 \overline{CQ} 疊合在 \overline{AQ} 上， Q 為摺線與 \overline{AC} 的交點，如圖三。

步驟四：將三角形打開，設 P 為摺線與 L 的交點， R 為摺線與 \overline{AB} 的交點，如圖四。

請回答下列問題，並說明理由：

- ① P 到直線 AB 的距離和哪條線段一樣長？
- ② P 到直線 AC 的距離和哪條線段一樣長？
- ③ P 到直線 AB 的距離與 P 到直線 AC 的距離是否相等？
- ④ 在 L 上的任取一點 D ， D 到直線 AB 的距離是否與 D 到直線 AC 的距離相等？



解

- ① 如圖四，因為 \overline{PR} 垂直 AB ， P 到直線 AB 的距離與 \overline{PR} 一樣長
- ② 如圖四，因為 \overline{PQ} 垂直 AC ， P 到直線 AC 的距離與 \overline{PQ} 一樣長
- ③ 沿著直線 L 對摺時， \overline{PR} 和 \overline{PQ} 會疊合在一起，所以 P 到直線 AB 的距離與 P 到直線 AC 的距離相等。



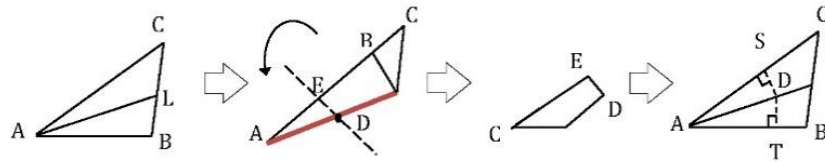
教材內容說明：

1. 本教材第 4~5 頁的教學重點是幫助學生理解角平分線的性質，即角平分線上任一點到角的兩邊直線的距離相等。
2. 例題(4)，拿出附件四中的三角形 ABC ，其中 L 為 $\angle A$ 的角平分線，依給定四個步驟折疊紙張，最後得到圖四，再要求學生回答下面四個子問題。
 - 要說明角平分線上的點到兩邊的距離一樣長，本教材先透過摺紙將點到兩邊的距離轉成線段長度，再比對兩線段一樣長，也就是距離相等。
 - 若學生無法理解圖四中， \overline{PQ} 與 \overline{AC} 垂直，教師應補充說明「因為 $\angle PQA$ 與角 $\angle PQC$ 疊合，平角為 180 度，所以 $\angle PQA = \angle PQC = 90$ 度」。
 - 子題①到子題③，在說明角平分線上特定一點到角的兩邊距離相等。
 - 子題④，幫助學生理解角平分線上任一點到角的兩邊距離都相等。
3. 子題①要求學生回答 P 到直線 \overline{AB} 的距離和哪條線段一樣長？
 - 透過圖四的摺痕幫助學生看到 P 到直線 \overline{AB} 的距離為 \overline{PR} 。
4. 子題②要求學生回答 P 到直線 \overline{AC} 的距離和哪條線段一樣長？
 - 透過圖四的摺痕幫助學生看到 P 到直線 \overline{AC} 的距離為 \overline{PQ} 。
5. 子題③要求學生回答 P 到直線 \overline{AB} 的距離與 P 到直線 \overline{AC} 的距離是否相等？
 - 若學生無法回答此問題，教師應幫助學生由步驟二以及步驟三，看到 \overline{PQ} 與 \overline{PR} 疊合，所以長度相同。

基本學習內容：SC-8-1-3

基本學習內容：SC-8-1-3 角平分線

④ 透過摺紙活動來說明本題，



步驟一：直線 L 為 $\angle A$ 的角平分線。沿著 L ，將 \overline{AB} 往上摺疊合至 \overline{AC} 。

步驟二：在 L 上任取一點 D ，以 D 為摺點往 A 點方向對摺讓 \overline{EC} 邊重疊至 \overline{AE} 邊，且 $\overline{DE} \perp \overline{AB}$ 。

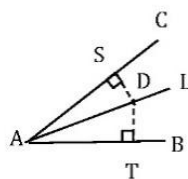
步驟三：將紙打開，發現 $\overline{DS} \perp \overline{AC}$ 且 $\overline{DT} \perp \overline{AB}$ 。又透過摺紙，可以看到 \overline{DS} 和 \overline{DT} 會疊合在一起。

所以 D 到直線 AB 的距離是否與 D 到直線 AC 的距離相等。

角平分線上的任一點到角的兩邊直線的距離相等，稱為角平分線性質。

例如：如圖，直線 L 為 $\angle BAC$ 的角平分線， D 為直線 L 上的一點，則 D 到

$\angle BAC$ 的兩邊直線距離相等，即 $\overline{DS} = \overline{DT}$ 。



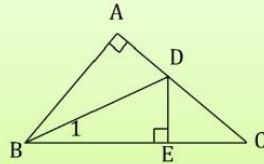


教材內容說明：

1. 本教材第 4~5 頁的教學重點是幫助學生理解角平分線的性質，即角平分線上任一點到角的兩邊直線的距離相等。
2. 子題④，在 L 上任取一點 D ，要求學生判斷 D 到直線 \overline{AB} 的距離與 D 到直線 \overline{AC} 的距離是否相等。
 - 若學生無法回答此問題，教師應提醒學生仿照步驟一到步驟三的摺法，通過 D 點再摺一次，且讓 \overline{DE} 垂直 \overline{AC} ，打開之後，發現 \overline{DF} 垂直 \overline{AB} ，所以 D 到直線 \overline{AB} 的距離與 D 到直線 \overline{AC} 的距離相等。
3. 本重點框說明角平分線上任一點到角的兩邊直線的距離相等。
 - 教師應透過下列兩點檢查學生是否理解角平分線的性質。
 - (1) 給定一個角及其角平分線，角平分線上任一點到角的兩邊距離是否相等？
 - (2) 給定一個角及角內一點，且該點到兩邊直線的距離相等，則該點與頂點的連線為角平分線。

基本學習內容：SC-8-1-3 角平分線

(5) 如下圖，直角三角形 $\triangle ABC$ 中 \overline{BD} 為 $\angle ABC$ 的角平分線且 $\angle ABC = 50^\circ$ ，若 $\overline{CD} = 5$ ， $\overline{DE} = 4$ ，求① $\angle 1 = ?$ ② $\overline{AD} = ?$



解

①

因為 \overline{BD} 為 $\angle ABC$ 的角平分線，所以

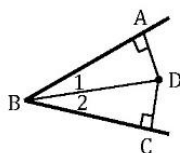
$$\angle 1 = \frac{1}{2} \angle ABC = \frac{1}{2} \times 50^\circ = 25^\circ$$

②

由角平分線性質，若 \overline{BD} 為 $\angle ABC$ 的角平分線，則 $\overline{AD} = \overline{DE} = 4$ 。



小試身手



如左圖， \overline{BD} 為 $\angle ABC$ 的角平分線，若 $\angle 1 = 35^\circ$ ， $\overline{BD} = 5$ ， $\overline{AD} = 3$ ，求：

(1) $\angle 2 = \underline{35^\circ}$

(2) $\overline{CD} = \underline{3}$



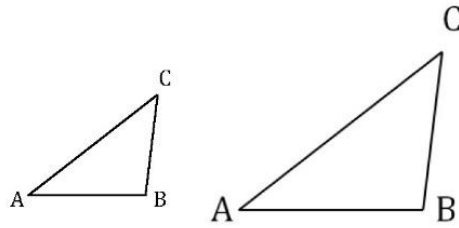
教材內容說明：

1. 本教材第 6 頁的教學重點是應用角平分線的性質解題及小試身手。
2. 例題(5)，給定一直角三角形 ABC 、 $\angle ABC$ 的角度、 \overline{CD} 長及 \overline{DE} 長，其中 \overline{BD} 為 $\angle ABC$ 的角平分線，要求學生回答兩個子問題，子題①求出 $\angle 1$ 的角度，子題②求出 \overline{AD} 長度。
 - 子題①與子題②都是應用角平分線的性質解題。
 - 若學生無法回答子題①，教師可提問學生，判斷 $\angle ABD$ 是否與 $\angle DBE$ 相等。
 - 若學生無法回答子題②，教師可依下列步驟幫助學生解題。
 - 步驟一： D 點到 \overline{AB} 邊的距離為哪條線段？
 - 步驟二： D 點到 \overline{AC} 邊的距離為哪條線段？
 - 步驟三： \overline{DA} 是否與 \overline{DE} 相等？
3. 本小試身手針對角平分線的性質做練習。

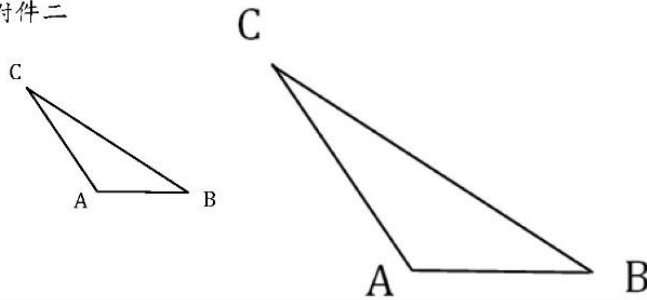
基本學習內容：SC-8-1-3

基本學習內容：SC-8-1-3 角平分線

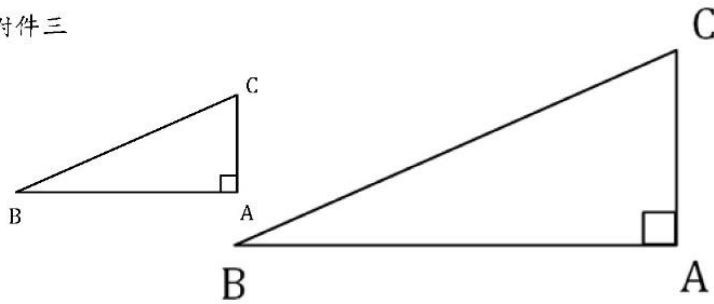
附件一



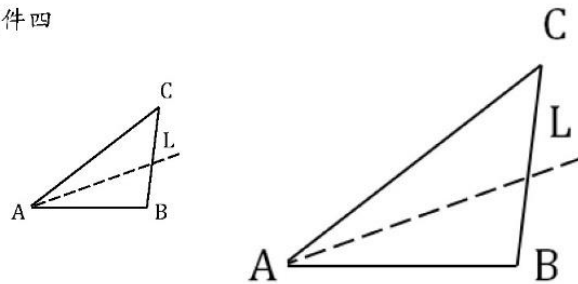
附件二



附件三



附件四





教材內容說明：

1. 本教材第 7 頁為本基本學習內容教材之附件。



教育部國民及學前教育署 編

國民中學

學生學習扶助教材

8 年級數學

