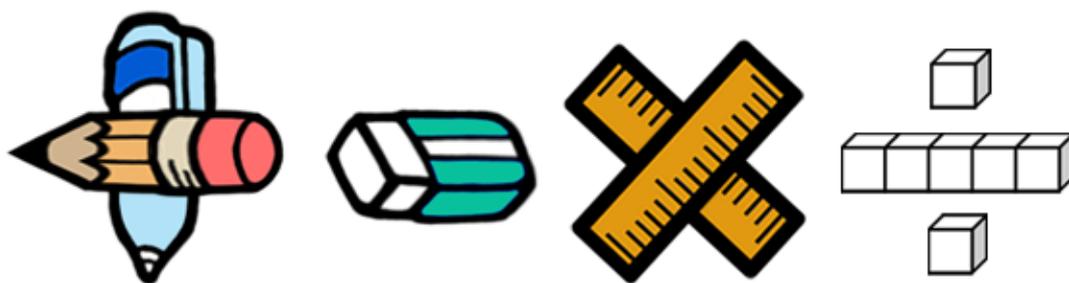




基本學習內容：SC-8-3-1

平行線的截角性質

【教師用】





基本學習內容：SC-8-3-1

學習內容：

S-8-3 平行：平行的意義與符號；平行線截角性質；兩平行線間的距離處處相等。

基本學習內容：

SC-8-3-1 平行線的截角性質。

基本學習表現：

SCP-8-3-1-1 理解平行的意義與符號。

SCP-8-3-1-2 在兩直線被一直線所截的情境下，認識內錯角、同位角、同側內角。

SCP-8-3-1-3 認識兩平行線被一直線所截時，內錯角相等、同位角相等、同側內角互補。



概要說明：

- 本基本學習內容 SC-8-3-1、SC-8-3-2 為 SC-4-5-1 和 SC-4-5-2 的後續學習概念，故學生應已認識有一個夾角是直角的兩線互相垂直，同時垂直於一線的兩線互相平行。

本基本學習內容開始在兩直線被一直線所截的情境下認識平行線的截角性質及判別性質。

- 國小四年級已引入判斷兩線互相平行的方法， L_1 與 L_2 同時垂直於 L ，稱 L_1 與 L_2 兩線互相平行。

- 下面說明如何區分同側與異側，內錯與外錯，同位與異位的判斷方法。

L_1 及 L_2 被一線 L 所截， L 稱為截線。

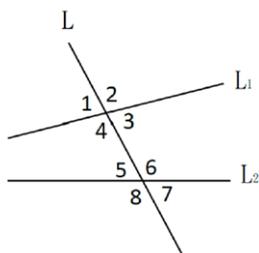
- (1) 在 L 同一邊的兩角稱為同側，在 L 不同邊的兩角稱為異側。

$\angle 2$ 、 $\angle 3$ 、 $\angle 6$ 及 $\angle 7$ 是同側， $\angle 1$ 和 $\angle 2$ 是異側。

- (2) 在 L_1 及 L_2 裡面交錯的兩角稱為內錯角，在 L_1 及 L_2 外面交錯的兩角稱為外錯角。例如：

「 $\angle 3$ 和 $\angle 5$ 」及「 $\angle 4$ 和 $\angle 6$ 」都是內錯角， $\angle 1$ 和 $\angle 7$ 是外錯角，但不評量外錯角。

- (3) 在 L_1 及 L_2 上面（或下面）同側的兩角稱為同位角。「 $\angle 2$ 和 $\angle 6$ 」及「 $\angle 4$ 和 $\angle 8$ 」都是同位角。



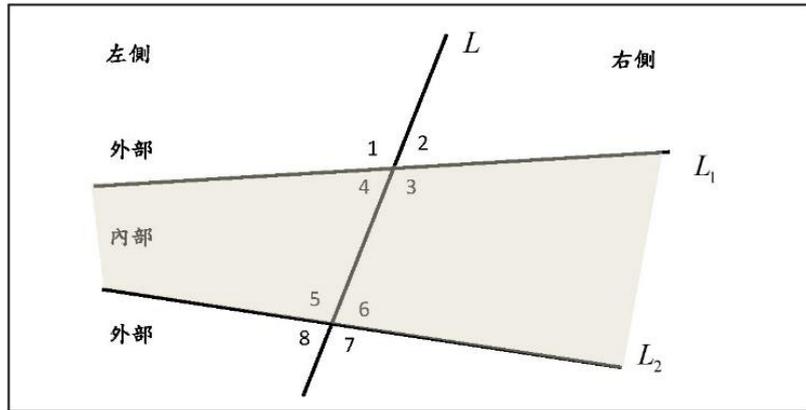
- 建議教師多強調在兩直線平行的條件下，同位角相等、內錯角相等、同側內角互補的關係才會成立，以免學生誤用。

- 國小透過長方形寬邊等長說明兩平行線距離處處相等，國中知道平行線上任一點到另一條直線距離都相等。

- 平行線的判別性質為透過同位角相等、內錯角相等、同側內角互補來判別兩線是否平行。平行線的截角性質為兩線平行時同位角相等、內錯角相等、同側內角互補。

SC-8-3-1 平行線的截角性質。

複習同側內角、內錯角與同位角



1. 同側內角：

$\angle 3$ 及 $\angle 6$ 都在同樣在截線 L 的同側也都在 L_1 和 L_2 的內部，我們稱 $\angle 3$ 及 $\angle 6$ 是同側內角。同理， $\angle 4$ 及 $\angle 5$ 也是同側內角

2. 內錯角：

$\angle 4$ 及 $\angle 6$ 都同樣在 L_1 和 L_2 的內部，在截線 L 的異側，我們稱 $\angle 4$ 及 $\angle 6$ 為內錯角。同理， $\angle 3$ 及 $\angle 5$ 也是內錯角

3. 同位角：

如圖， $\angle 1$ 和 $\angle 5$ 分別在 L_1 和 L_2 的上側，在截線 L 的同側，我們稱 $\angle 1$ 和 $\angle 5$ 是同位角。如圖， $\angle 3$ 和 $\angle 7$ 分別在 L_1 和 L_2 的下側，在截線 L 的同側，我們也稱 $\angle 3$ 和 $\angle 7$ 是同位角。同理， $\angle 2$ 及 $\angle 6$ 、 $\angle 4$ 及 $\angle 8$ 也是同位角。



教材內容說明：

1. 本教材第 1 頁的教學重點是複習同側內角、內錯角與同位角。
2. 同側內角：一條直線 L 將一個平面分成兩側，本例分為左側與右側。 L 將 L_1 和 L_2 兩條線截出 8 個角。兩個角位於同側且都是內角，本例中，我們稱 $\angle 3$ 和 $\angle 6$ 為同側內角。
 - 教師可指定特定兩個角，請學生回答是否為同側內角，以檢查學生是否認識同側內角。
3. 內錯角：兩個角位於異側且都是內角，本例中，我們稱 $\angle 4$ 和 $\angle 6$ 為內錯角。
 - 教師可指定特定兩個角，請學生回答是否為內錯角，以檢查學生的是否認識內錯角。
4. 同位角： L 和 L_1 將平面分割成上左、上右、下左、下右等四部分。

同理， L 和 L_2 也將平面分割成上左、上右、下左、下右等四部分。

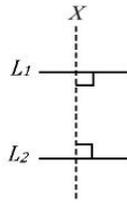
本例中， $\angle 1$ 位於 L 和 L_1 的上左部分， $\angle 5$ 也位於 L 和 L_2 的上左部分，所以屬於同個位置，我們稱 $\angle 1$ 和 $\angle 5$ 為同位角。

 - 教師可指定特定兩個角，請學生回答是否為同位角，以檢查學生的同位角概念。



SC-8-3-1 平行線的截角性質。

平行線的定義

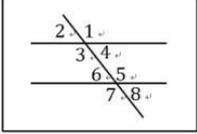
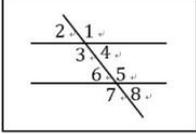
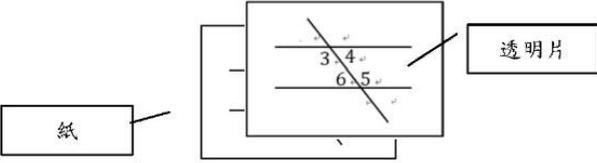


X 同時垂直 L_1 和 L_2 ，我們稱 L_1 和 L_2 互相平行。 L_1 和 L_2 互相平行，可以記成 $L_1 // L_2$ 。

換句話說，若 L_1 和 L_2 互相平行，可以找到一條 L 同時垂直 L_1 和 L_2 。

活動 1：同側內角互補

我們可以透過操作活動驗證同側內角互補。

 <p>(紙)</p>	 <p>(透明片)</p>
<p>步驟一：在一張紙上及一張透明片上畫出一組平行線和一條截線</p>	
	
<p>步驟二：再將透明片$\angle 6$往上與紙的$\angle 2$疊合，你會發現$\angle 6 + \angle 3 = 180^\circ$，同理，$\angle 5 + \angle 4 = 180^\circ$，因此，兩組同側內角都互補。我們稱同側內角互補。</p>	



教材內容說明：

1. 本教材第 2 頁上半部的教學重點是複習平行線的定義；下半部的是利用操作活動發現兩平行線被一線所截時，同側內角互補。
2. 複習平行線的定義
 - 在國小學習階段已經知道 X 同時垂直 L_1 和 L_2 ，則 L_1 和 L_2 互相平行，也知道平行線的距離處處相等。
 - 為了方便與老師溝通，在此我們稱 X 為 L_1 和 L_2 的公垂線。
 - 若學生不相信可以找到 X 同時垂直 L_1 和 L_2 ，教師應幫助學生先找到一條與 L_1 垂直的直線，再檢驗該條直線也與 L_2 垂直。
3. 活動一，給定一組平行線及一條截線，觀察所截出的八個角。本教材透過下列步驟幫助學生發現同側內角互補。

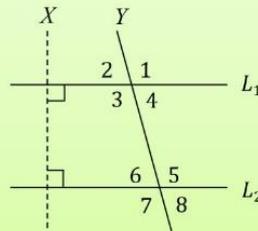
步驟一：學生使用投影片複製此圖形。

步驟二：平移投影片，使得透明片上的 $\angle 6$ 與紙上的 $\angle 2$ 疊合，發現 $\angle 6 + \angle 3 = 180^\circ$ 。

 - 教師也可以請學生將透明片上的 $\angle 3$ 與紙上的 $\angle 7$ 疊合，發現 $\angle 6 + \angle 3 = 180^\circ$ 。
 - 教師應請學生再檢查另外一組同側內角也互補，發現 $\angle 5 + \angle 4 = 180^\circ$ 。
 - 由本活動，我們可以看到共有兩組同側內角，且同側內角相加為 180 度，即同側內角互補。

SC-8-3-1 平行線的截角性質。

(1)如下圖， $L_1 // L_2$ ，會有一條直線 X 同時垂直 L_1 與 L_2 ，且截線 Y 將 L_1 與 L_2 截出 $\angle 1$ 、 $\angle 2$ 、 $\angle 3$ 、 $\angle 4$ 、 $\angle 5$ 、 $\angle 6$ 、 $\angle 7$ 、 $\angle 8$ 這八個角。其中 $\angle 3$ 和 $\angle 6$ 是同側內角，試證 $\angle 3 + \angle 6 = 180^\circ$



觀察中間的四邊形，由四邊形的內角和 360° ，得：

$$90^\circ \times 2 + \angle 3 + \angle 6 = 360^\circ$$

$$180^\circ + \angle 3 + \angle 6 = 360^\circ$$

$$\angle 3 + \angle 6 = 180^\circ$$

$\angle 3 + \angle 6 = 180^\circ$ ，所以 $\angle 3$ 和 $\angle 6$ 互補。 $\angle 4$ 和 $\angle 5$ 也是同側內角。

同理， $\angle 4$ 和 $\angle 5$ 也互補。

當 $L_1 // L_2$ ，兩組同側內角都互補，我們稱同側內角互補。





教材內容說明：

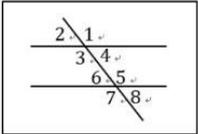
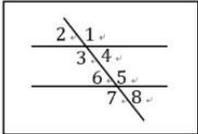
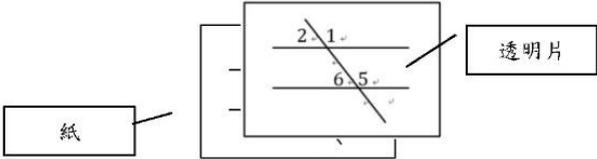
1. 本教材第 3 頁的教學重點是證明兩平行線被一線所截時，同側內角互補的性質。
2. 第(1)題在平行線中給定一截線與一公垂線，截線將平行線截出八個角，要求學生證明同側內角互補性質。
 - 觀察公垂線、截線與平行線所圍之四邊形，教師應幫助學生發現公垂線與 L_1 和 L_2 形成兩個直角，再利用四邊形內角和為 360 度，推得同側內角互補。
 - 教師也可以要求學生在截線的右側畫一條公垂線，說明 $\angle 4 + \angle 5 = 180^\circ$ 。
3. 本頁教師提醒在說明，由上例可以發現該兩組同側內角都互補，進而幫助學生類推到任何平行線被一直線所截，其所有的同側內角都互補。
 - 若學生無法類推到任何平行線被一直線所截，其所有的同側內角都互補，教師可依下列步驟進行教學。
 - 步驟一：幫助學生發現直角梯形(為梯形中恰有兩內角為直角)非直角的兩個角互補。
 - 步驟二：給定與前例不同方向的平行線及任一截線，要求學生畫出一條公垂線，幫助學生發現所圍的四邊形為直角梯形。
 - 步驟三：同側內角即為直角梯形中非直角的兩個角。



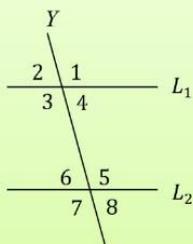
SC-8-3-1 平行線的截角性質。

活動 2: 同位角相等

我們可以透過操作活動驗證同位角相等。

 <p>(紙)</p>	 <p>(透明片)</p>
<p>步驟一：在一張紙上及一張透明片上畫出一組平行線和一條截線</p>	
	
<p>步驟二：再將透明片與紙疊合比較之後，你會發現$\angle 2 = \angle 6$、$\angle 1 = \angle 5$。我們稱同位角相等。</p>	

(2)如下圖， $L_1 // L_2$ ，且截線 Y 將 L_1 與 L_2 截出 $\angle 1$ 、 $\angle 2$ 、 $\angle 3$ 、 $\angle 4$ 、 $\angle 5$ 、 $\angle 6$ 、 $\angle 7$ 、 $\angle 8$ 這八個角。其中 $\angle 2$ 和 $\angle 6$ 是同位角，試證 $\angle 2 = \angle 6$ 。





教材內容說明：

1. 本教材第 4 頁的教學重點是使用操作活動說明兩平行線被一線所截時，幫助學生發現同位角相等。

2. 活動二：給定一組平行線及一條截線，觀察所截出的八個角。

本教材透過下列步驟幫助學生發現同位角相等。

步驟一：學生使用投影片複製此圖形。

步驟二：平移投影片，使得透明片上的 $\angle 6$ 與紙上的 $\angle 2$ 疊合，發現 $\angle 2 = \angle 6$ ，

也就是同位角相等。

● 教師應幫助學生發現其他三組同位角也相等，即 $\angle 1 = \angle 5$ 、 $\angle 3 = \angle 7$ 與 $\angle 4 = \angle 8$ 。

3. 第(2)題在平行線中給定一截線，截線將平行線截出八個角，要求學生證明其中一組同位角相等，即 $\angle 2 = \angle 6$ 。

● 本題證明在下一頁。



SC-8-3-1 平行線的截角性質。

由同側內角互補，我們知道

$$\angle 3 + \angle 6 = 180^\circ$$

$$\text{又 } \angle 3 + \angle 2 = 180^\circ \text{ (平角)}$$

$$\text{所以 } \angle 2 = \angle 6$$

$\angle 1$ 和 $\angle 5$ 在截線 Y 的同一側，在直線 L_1 與 L_2 的上方位置。同理， $\angle 1 = \angle 5$ 。

$\angle 3$ 和 $\angle 7$ 、 $\angle 4$ 和 $\angle 8$ 在截線 Y 的同一側，在直線 L_1 與 L_2 的下方位置。

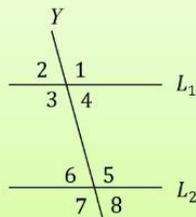
同理， $\angle 3 = \angle 7$ 、 $\angle 4 = \angle 8$ 。

$\angle 2$ 和 $\angle 6$ 是同位角，而且 $\angle 2 = \angle 6$ 。 $\angle 1$ 和 $\angle 5$ 、 $\angle 3$ 和 $\angle 7$ 以及 $\angle 4$ 和 $\angle 8$ 也是同位角，同理， $\angle 1 = \angle 5$ 、 $\angle 3 = \angle 7$ 、 $\angle 4 = \angle 8$ 。

當 $L_1 // L_2$ ，四組同位角都相等，我們稱為**同位角相等**。



(3) 如下圖， $L_1 // L_2$ ，且截線 Y 將 L_1 與 L_2 截出 $\angle 1$ 、 $\angle 2$ 、 $\angle 3$ 、 $\angle 4$ 、 $\angle 5$ 、 $\angle 6$ 、 $\angle 7$ 、 $\angle 8$ 這八個角。已知 $\angle 4 = 85^\circ$ ，則 $\angle 5$ 的角度為多少度？ $\angle 8$ 的角度為多少度？



由同側內角互補，我們知道 $\angle 4 + \angle 5 = 180^\circ$

$$85^\circ + \angle 5 = 180^\circ$$

$$\angle 5 = 180^\circ - 85^\circ = 95^\circ$$

由同位角相等，我們知道 $\angle 4 = \angle 8$

$$\text{則 } \angle 8 = \angle 4 = 85^\circ$$



教材內容說明：

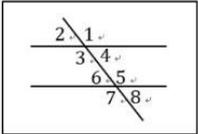
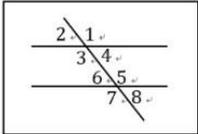
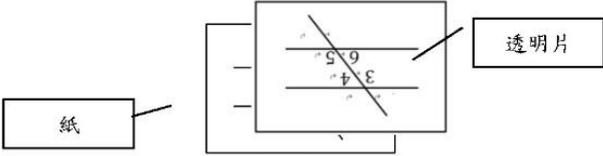
1. 本教材第 5 頁的教學重點是證明兩平行線被一線所截時，同位角相等。
2. 第(2)題在平行線中給定一截線，截線將平行線截出八個角，要求學生證明其中一組同位角相等，即 $\angle 2 = \angle 6$ 。
 - 由前例，知道同側內角互補，即 $\angle 3 + \angle 6 = 180^\circ$ 。再利用平角得 $\angle 3 + \angle 2 = 180^\circ$ ，因此 $\angle 2 = \angle 6$ 。
 - 教師也可以要求學生說明其他三組同位角也相等，例如透過 $\angle 1 + \angle 4 = 180^\circ$ (平角) 及 $\angle 5 + \angle 4 = 180^\circ$ (同側內角)，推得 $\angle 1 = \angle 5$ 。
3. 本頁教師提醒在說明，由上例可以發現該四組同位角都相等，進而幫助學生類推到任何平行線被一直線所截，其所有的同位角都相等。
 - 若學生無法類推到任何平行線被一直線所截，其所有的同位角都相等，教師可依下列步驟進行教學。
 - 步驟一：先確認學生是否理解同側內角互補。若不理解，回到前一個活動。
 - 步驟二：給定與前例不同方向的平行線及任一截線，要求學生利用同側內角互補及平角 180 度推得同位角相等。
4. 例(3)，在平行線中給定一截線，截線將平行線截出八個角，給定其中一個截角角度，檢查學生是否能應用同側內角互補及同位角相等解題。
 - 若學生無法順利回答問題，教師可依下列步驟進行教學。
 - 步驟一：引導學生判斷本例中 $\angle 4$ 與 $\angle 5$ 、 $\angle 4$ 與 $\angle 6$ 的關係為同側內角還是同位角？
 - 步驟二：使用同側內角互補、同位角相等性質進行解題。



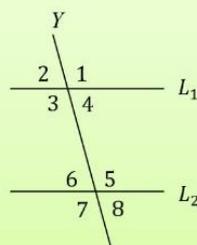
SC-8-3-1 平行線的截角性質。

活動 3：內錯角相等

我們可以透過操作活動驗證內錯角相等。

 <p>(紙)</p>	 <p>(透明片)</p>
<p>步驟一：在一張紙上及一張透明片上畫出一組平行線和一條截線</p>	
	
<p>步驟二：將透明片旋轉180°後，將兩張紙疊合比較，你會發現$\angle 3 = \angle 5$、$\angle 4 = \angle 6$。我們稱內錯角相等。</p>	

(4)如下圖， $L_1 // L_2$ ，且截線 Y 將 L_1 與 L_2 截出 $\angle 1$ 、 $\angle 2$ 、 $\angle 3$ 、 $\angle 4$ 、 $\angle 5$ 、 $\angle 6$ 、 $\angle 7$ 、 $\angle 8$ 這八個角。其中 $\angle 4$ 和 $\angle 6$ 是內錯角，試證 $\angle 4 = \angle 6$ 。





教材內容說明：

1. 本教材第 6 頁的教學重點是使用操作活動說明兩平行線被一線所截時，幫助學生發現內錯角相等。

2. 活動三，給定一組平行線及一條截線，觀察所截出的八個角。

本教材透過下列步驟幫助學生發現內錯角相等。

步驟一：學生使用投影片複製此圖形。

步驟二：將投影片旋轉 180 度，平移投影片，使得透明片上的 $\angle 5$ 與紙上的 $\angle 3$ 疊合，
發現 $\angle 5 = \angle 3$ 。

● 教師應請學生再檢查另外一組內錯角也相等，發現 $\angle 6 = \angle 4$ 。

● 由本活動，我們可以看到共有兩組內錯角，而且內錯角相等。

3. 第(4)題在平行線中給定一截線，截線將平行線截出八個角，要求學生證明內錯角相等，即 $\angle 4 = \angle 6$ 。

● 本題證明在下一頁。



SC-8-3-1 平行線的截角性質。

由同位角相等，我們知道

$$\angle 2 = \angle 6$$

又 $\angle 2 = \angle 4$ (對頂角相等)

$$\text{所以 } \angle 4 = \angle 6$$

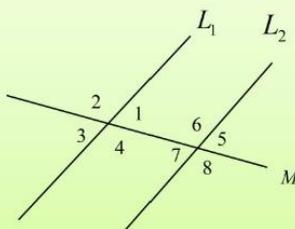
$\angle 3$ 和 $\angle 5$ 在截線 Y 的異側，在直線 L_1 與 L_2 的內側位置。同理， $\angle 2 = \angle 4$

$\angle 4$ 和 $\angle 6$ 是內錯角，而且 $\angle 4 = \angle 6$ 。 $\angle 3$ 和 $\angle 5$ 也是內錯角，同理， $\angle 3 = \angle 5$ 。

當 $L_1 // L_2$ ，兩組內錯角都相等，我們稱為內錯角相等。



(5) 如下圖 $L_1 // L_2$ ，且 $\angle 1 = 50^\circ$ ，求其他七個角的角度？



$$\angle 3 = \angle 1 = 50^\circ \quad (\text{對頂角})$$

$$\angle 5 = \angle 1 = 50^\circ \quad (\text{同位角相等}) \quad \angle 7 = \angle 3 = 50^\circ \quad (\text{同位角相等})$$

$$\angle 2 = \angle 4 = 180^\circ - \angle 1 = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ \quad (\text{對頂角})$$

$$\angle 5 = \angle 3 = 50^\circ \quad (\text{內錯角相等}) \quad \angle 6 = \angle 4 = 130^\circ \quad (\text{內錯角相等})$$

$$\angle 7 = \angle 3 = 50^\circ \quad (\text{同位角相等}) \quad \angle 8 = \angle 4 = 130^\circ \quad (\text{同位角相等})$$



教材內容說明：

1. 本教材第 7 頁上半部的教學重點是證明兩平行線被一線所截時，內錯角相等。下半部給定兩平行線被一直線所截的情境及其中一角的角角度，要求學生利用同側內角互補、同位角相等及內錯角相等的性質，求出另外七個角度。
2. 第(4)題在平行線中給定一截線，截線將平行線截出八個角，要求學生證明內錯角相等，即 $\angle 4 = \angle 6$ 。

- 由前例，學生已經知道同位角相等，即 $\angle 2 = \angle 6$ 。再透過 $\angle 2 = \angle 4$ 對頂角相等，推得內錯角相等 $\angle 4 = \angle 6$ 。
- 教師應要求學生使用其他的同位角關係說明另一組內錯角也相等，例如透過 $\angle 1 = \angle 5$ (同位角相等)及 $\angle 1 = \angle 3$ (對頂角相等)，推得 $\angle 3 = \angle 5$ 。

3. 本頁教師提醒在說明，由上例可以發現該兩組內錯角都相等，進而幫助學生類推到任何平行線被一直線所截，其所有內錯角都相等。

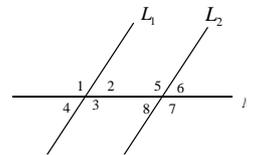
- 若學生無法類推到「任何平行線被一直線所截，其所有的內錯角都相等」，教師可依下列步驟進行教學。

步驟一:先確認學生是否理解同位角相等。若不理解，回到前一個活動。

步驟二:透過該例中的同位角相等與對頂角相等，推得內錯角相等。

例如:幫助學生發現此例中，同位角相等 $\angle 2 = \angle 6$ ，

又 $\angle 6 = \angle 8$ (對頂角相等)，因此推得內錯角相等 $\angle 2 = \angle 8$ 。



4. 例(5)，給定兩平行線被一直線所截的情境及其中一角角度，要求學生利用同側內角互補、同位角相等及內錯角相等的性質，求出另外七個角度。

- 當學生作答此題時，教師應檢查學生使用何種概念解題(同側內角互補、同位角相等及內錯角相等)。
- 學生只需解題成功即可，不需依照參考答案中的順序作答。



SC-8-3-1 平行線的截角性質。



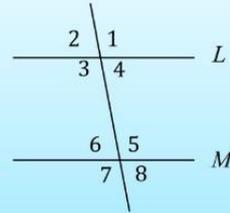
隨堂練習

如右圖， $L \parallel M$ ，且 $\angle 1 = 100^\circ$ ，試求下列各角度

$\angle 2 = \underline{80^\circ}$ 、 $\angle 3 = \underline{100^\circ}$ 、

$\angle 4 = \underline{80^\circ}$ 、 $\angle 5 = \underline{100^\circ}$ 、

$\angle 6 = \underline{80^\circ}$ 、 $\angle 7 = \underline{100^\circ}$ 、 $\angle 8 = \underline{80^\circ}$



小試身手

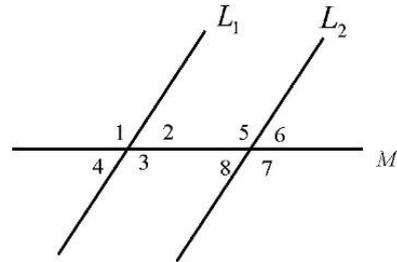
如右圖， $L_1 \parallel L_2$ ，且 $\angle 2 = 84^\circ$ ，試求下列各角度

$\angle 1 = \underline{116^\circ}$ 、 $\angle 3 = \underline{116^\circ}$ 、

$\angle 4 = \underline{84^\circ}$ 、 $\angle 5 = \underline{116^\circ}$ 、

$\angle 6 = \underline{84^\circ}$ 、 $\angle 7 = \underline{116^\circ}$ 、

$\angle 8 = \underline{84^\circ}$





教材內容說明：

1. 本教材第 8 頁的教學重點是隨堂練習與小試身手。
2. 隨堂練習針對兩平行線被一直線所截的情境及其中一角角度，要求學生利用同側內角互補、同位角相等及內錯角相等的性質做綜合練習。
3. 小試身手針對兩平行線被一直線所截的情境及其中一角角度，要求學生利用同側內角互補、同位角相等及內錯角相等的性質做綜合練習。



教育部國民及學前教育署 編

國民中學

學生學習扶助教材

8

年級數學

