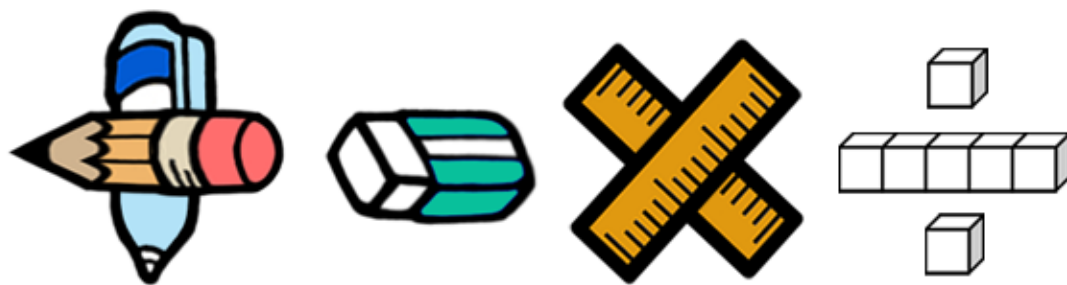


基本學習內容：SC-8-5-1

三角形的全等性質

SAS、SSS、ASA、AAS、RHS

【教師用】





基本學習內容：SC-8-5-1

學習內容：

S-8-5 三角形的全等性質：三角形的全等判定(SAS、SSS、ASA、AAS、RHS)；全等符號 (\cong)。

基本學習內容：

SC-8-5-1 三角形的全等性質 SAS、SSS、ASA、AAS、RHS。

基本學習表現：

SCP-8-5-1-1 認識兩三角形的全等性質 SSS，且能利用這些性質判別兩三角形是否全等。

SCP-8-5-1-2 認識兩三角形的全等性質 SAS，且能利用這些性質判別兩三角形是否全等。

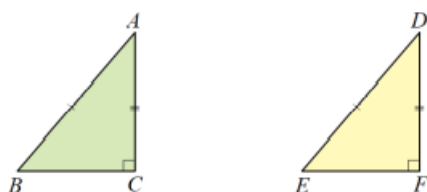
SCP-8-5-1-3 認識兩三角形的全等性質 ASA、AAS 且能利用這些性質判別兩三角形是否全等。

SCP-8-5-1-4 認識兩三角形的全等性質 RHS，且能利用這些性質判別兩三角形是否全等。



概要說明：

- 本基本學習內容 SC-8-5-1 為 SC-8-4-1 的後續學習概念，學生應已認識多邊形全等的意義，並能運用對應點、對應邊及對應角去描述兩個全等圖形對應的關係。本基本學習內容開始引入利用最少條件判斷三角形的全等。
- 國小學生在四年級時，已經透過圖形疊合的操作，認識平面圖形全等的意義，引入「全等」的名詞，並能用「對應點」、「對應邊」及「對應角」描述兩全等圖形對應的關係。
- 國中可利用疊合的概念，發現兩個三角形只要 3 組對應邊與 3 組對應角相等，則兩個三角形全等，只要利用兩個三角形三組對應邊與 3 組對應角相等中的 3 個特定條件，則兩個三角形全等。教學時可以從最少的條件慢慢增加，以得知在何種條件下，可以找到兩個三角形全等。
- 教師可以舉 SSA 的例子，讓學生知道 SSA 不一定能構成三角形全等，不需特別強調或評量，而 RHS 及鈍角三角形只是 SSA 的特例。
 1. 兩個三角形的「兩組邊對應相等」及「一組對應角相等」的情形。
 2. RHS 全等性質 (SSA 中的 A 是直角) 如圖 (十五)，在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 中，已知 $\overline{AB} = \overline{DE}$ 、 $\overline{AC} = \overline{DF}$ ，且 $\angle C$ 和 $\angle F$ 為直角。



圖(十五)

由畢氏定理 (S-8-6) 可知，當兩個直角三角形的斜邊及一股分別對應相等時，這兩個直角三角形就會全等，這個性質稱為 RHS 全等性質。其中 R 代表直角 (Right angle)，H 代表斜邊 (Hypotenuse)，S 代表一邊 (Side)。

- 教師可以舉 AAA 的例子，讓學生知道 AAA $\overline{AB} = \overline{DE}$ 不一定能構成三角形全等。
- 例如：正三角形每個內角均 60 度，邊長為 3 的正三角形與邊長為 5 的正三角形不會全等。

基本學習內容：三角形的全等性質 SAS、SSS、ASA、AAS、RHS

◎複習活動：

三角形 ABC 透過平移、旋轉、翻轉後，可以和三角形 DEF 完全疊合在一起，

我們稱三角形 ABC 和三角形 DEF 全等。



三角形 ABC 和三角形 DEF 全等時，為了方便表示 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 全等，我們將其記為 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ 。

$\angle A$ 和 $\angle D$ 疊合，我們稱 $\angle A$ 和 $\angle D$ 互為對應角， $\angle B$ 和 $\angle E$ 、 $\angle C$ 和 $\angle F$ 也為對應角。

\overline{AB} 和 \overline{DE} 疊合，我們稱 \overline{AB} 和 \overline{DE} 互為對應邊， \overline{AC} 和 \overline{DF} 、 \overline{BC} 和 \overline{EF} 也為對應邊。



- (1)想想看，兩三角形全等時，三個對應邊等長，三個對應角相等。
若知道有三個對應邊等長，兩個對應角相等，請問這兩個三角形會全等嗎？

會啊。三角形內角和 180 度，若三個內角知道了其中兩個，另一個角當然也會一樣，因此兩個三角形會相等。



要判定兩個三角形是否全等時，不一定要指出全部六個條件都一樣，才能說兩個三角形全等。



教材內容說明：

1. 本教材第 1 頁上半部的教學重點是複習三角形全等的意義。
2. 第(1)題問學生「兩個三角形，若是三個對應邊等長，兩個對應角相等，是否能判定此兩個三角形全等」。

透過三角形內角和為 180 度，發現其中兩個角相等，其第三個角也一定相等，則可以判斷此兩三角形全等。

- 本題目的主要跟學生說明若要說明兩個三角形全等，不需要指出兩個三角形的六個條件(三個對應邊等長和三個對應角等)，也可以說明三角形權等。

基本學習內容：三角形的全等性質 SAS、SSS、ASA、AAS、RHS

(2) 給定一個 $\triangle ABC$ ，已知 $\overline{AB} = \overline{DE}$ 、 $\overline{BC} = \overline{EF}$ 兩條件，試問再增加哪一個條件，可以使得 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 全等。



解 1：製作相等的第三邊

1. 準備和 \overline{AB} 一樣長的扣條 \overline{DE} ，以及和 \overline{AC} 一樣長的扣條 \overline{DF} 。
2. 再控制扣條使得 E 、 F 兩點間的距離等於 \overline{BC} 長，得到 $\triangle DEF$ 。
3. 最後移動 $\triangle DEF$ ，發現 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 全等。
4. 所以只要知道兩個三角形的三組對應邊等長，這兩個三角形就會全等。

用三組對應邊等長，判斷三角形全等的方法，稱為 SSS 全等。



為了方便表示三角形的邊，我們用記號 S 代表邊(Side)



解 2：製作相等的夾角

1. 準備和 \overline{AB} 一樣長的扣條 \overline{DE} ，以及和 \overline{AC} 一樣長的扣條 \overline{DF}
2. 再控制扣條使得 $\angle A = \angle D$ ，得到 $\triangle DEF$ 。
3. 最後移動 $\triangle DEF$ ，發現 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 全等。

所以只要知道兩個三角形的二組對應邊等長及其所夾的對應角也相等，這兩個三角形就會全等。

我們用二組對應邊等長及其所夾的對應角也相等，判斷三角形全等的方法，稱為 SAS 全等。



為了方便表示三角形的邊與角，我們用記號 S 代表邊(Side)， A 代表角(Angle)。





教材內容說明：

1. 本教材第 2~3 頁的教學重點是幫助學生理解 SSS 全等性質和 SAS 全等性質。
 - 第 2 頁透過給定兩組對應邊等長，再透過增加哪一個條件幫助學生發現 SSS 全等性質和 SAS 全等性質。
 - 第 3 頁應用 SSS 全等性質和 SAS 全等性質解題。
2. 第(2)題給定一 $\triangle ABC$ 以及 $\overline{AB} = \overline{DE}$ 、 $\overline{AC} = \overline{DF}$ ，詢問學生要再增加哪一個條件，可以使 $\triangle ABC$ 全等 $\triangle DEF$ 。

本教材提供解法如下：

方法一，製作等長的第三邊

- 我們透過下列步驟幫助學生理解 SSS 全等性質。

步驟一：透過三邊等長製作 $\triangle DEF$ 。

步驟二：透過疊合知道 $\triangle DEF$ 和 $\triangle ABC$ 全等。

方法二，透過製作相等的夾角

- 我們透過下列步驟幫助學生理解 SAS 全等性質。

步驟一：透過兩邊等長及其夾角相等製作 $\triangle DEF$ 。

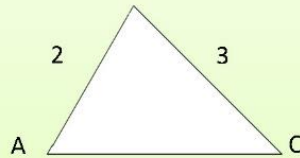
步驟二：透過疊合知道 $\triangle DEF$ 和 $\triangle ABC$ 全等。

- 若學生想透過增加條件 $\angle B = \angle E$ 製作三角形 $\triangle DEF$ ，教師可幫助學生發現 $\triangle DEF$ 可能有兩種情況，後續教材會進行說明。



基本學習內容：三角形的全等性質 SAS、SSS、ASA、AAS、RHS

(3)如下圖， $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB}=2$ ， $\overline{BC}=3$ ， $\angle A=60^\circ$ 、 $\angle B=75^\circ$ 、 $\angle C=45^\circ$ 。



- ① 今有另一三角形 $\triangle DEF$ ，已知 $\overline{DE}=2$ ， $\overline{EF}=3$ ，且 $\overline{DF}=\overline{AC}$ ，
請問 $\triangle ABC$ 是否全等 $\triangle DEF$ ？並說明是用何種性質判定？
- ② 今有另一三角形 $\triangle DEF$ ，已知 $\overline{DE}=2$ ， $\overline{EF}=3$ ，且 $\angle E=75^\circ$ ，
請問 $\triangle ABC$ 是否全等 $\triangle DEF$ ？並說明是用何種性質判定？

解：

- ① 選取 $\overline{AB}=2$ 和 $\overline{DE}=2$ 為對應邊， $\overline{BC}=3$ 和 $\overline{EF}=3$ 為對應邊，
且第三邊 $\overline{AC}=\overline{DF}$ 也等長，
所以三個對應邊都等長，由 SSS 全等性質判定 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$
- ② 選取 $\overline{AB}=2$ 和 $\overline{DE}=2$ 為對應邊， $\overline{BC}=3$ 和 $\overline{EF}=3$ 為對應邊，
 \overline{AB} 與 \overline{BC} 所夾的角為 $\angle B$ 、 \overline{DE} 與 \overline{EF} 所夾的角為 $\angle E$ ，
因為對應角 $\angle B=\angle E=75^\circ$ 也相等，
所以二組對應邊等長及其所夾的對應角也相等，
由 SAS 全等性質判定 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$



教材內容說明：

1. 本教材第 2~3 頁的教學重點是幫助學生理解 SSS 全等性質和 SAS 全等性質。
 - 第 2 頁透過給定兩組對應邊等長，再透過增加哪一個條件幫助學生發現 SSS 全等性質和 SAS 全等性質。
 - 第 3 頁應用 SSS 全等性質和 SAS 全等性質解題。
2. 第(3)題給定一 $\triangle ABC$ ，以及 $\overline{AB} = 2$ 、 $\overline{BC} = 3$ 、 $\angle A = 60^\circ$ 以及 $\angle B = 75^\circ$ ，子題①給定 $\overline{DE} = 2$ 、 $\overline{EF} = 3$ 且 $\overline{DF} = \overline{AC}$ ，問 $\triangle ABC$ 是否全等 $\triangle DEF$ 。

子題②給定 $\overline{DE} = 2$ 、 $\overline{EF} = 3$ 且 $\angle E = 75^\circ$ ，問 $\triangle ABC$ 是否全等 $\triangle DEF$ 。

本教材提供解法如下：

子題①應用對應邊等長，幫助學生發現 $\overline{AB} = 2$ 和 $\overline{DE} = 2$ 等長，所以 \overline{AB} 和 \overline{DE} 為對應邊。

同理可得， \overline{BC} 和 \overline{EF} 、 \overline{AC} 和 \overline{DF} 也為對應邊。由 SSS 全等判斷 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ 。

子題②應用對應邊等長，幫助學生發現 $\overline{AB} = 2$ 和 $\overline{DE} = 2$ 等長，所以 \overline{AB} 和 \overline{DE} 為對應邊。

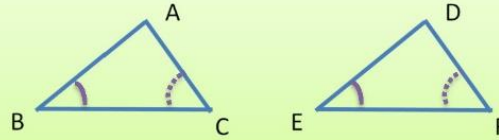
同理可得， \overline{BC} 和 \overline{EF} 也為對應邊。

其次再應用對應角相等，幫助學生發現 $\angle B = \angle E = 75^\circ$ ，所以 $\angle B$ 和 $\angle E$ 為對應角，由 SAS 全等判斷 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ 。

- 教師可透過等長(對應邊)和等角(對應角)的標記，幫助學生發現應用何種性質判定 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ 。

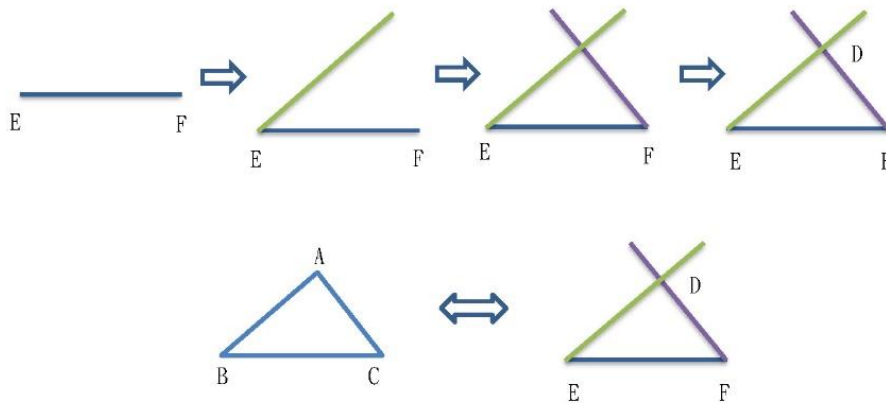
基本學習內容：三角形的全等性質 SAS、SSS、ASA、AAS、RHS

(4) 給定一個 $\triangle ABC$ ，已知 $\angle B = \angle E$ 、 $\angle C = \angle F$ 兩條件，試問再增加哪一個條件，可以使得 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 全等。



解 1：製作與 \overline{BC} 相等的邊

1. 準備一投影片畫出與 \overline{BC} 等長的邊 \overline{EF} 。
2. 使用量角器，畫出 $\angle E$ 的另一邊，使得 $\angle E = \angle B$ 。
同理，也畫出 $\angle F$ 的另一邊，使得 $\angle F = \angle C$ 。
3. $\angle E$ 與 $\angle F$ 所畫出的兩邊會交於 D 點。
4. 移動投影片，將 \overline{EF} 與 \overline{BC} 疊合，發現 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 全等。



所以只要知道兩個三角形的二組對應角相等及所夾的對應邊也等長，這兩個三角形就會全等。



我們用二組對應角相等及其所夾的對應邊也等長，判斷三角形全等的方法，稱為 ASA 全等



教材內容說明：

1. 本教材第 4~6 頁的教學重點是幫助學生理解 ASA 全等性質和 AAS 全等性質。
 - 第 4 頁透過給定兩組對應角相等，再透過增加哪一個條件幫助學生發現 ASA 全等性質。
 - 第 5 頁透過給定兩組對應角相等，再透過增加哪一個條件幫助學生發現 AAS 全等性質。
2. 第 6 頁應用 ASA 全等性質和 AAS 全等性質解題。
3. 第(4)題給定一 $\triangle ABC$ 以及 $\angle B = \angle E$ 、 $\angle C = \angle F$ ，詢問學生要再增加哪一個條件，可以使 $\triangle ABC$ 全等 $\triangle DEF$ 。

本教材提供解法如下：

方法一：製作與 \overline{BC} 等長的邊

我們透過下列步驟幫助學生理解 ASA 全等性質。

步驟一：透過第三邊 $\overline{BC} = \overline{EF}$ 等長與 $\angle B = \angle E$ 、 $\angle C = \angle F$ 製作 $\triangle DEF$ 。

步驟二：透過疊合知道 $\triangle DEF$ 和 $\triangle ABC$ 全等。

- 教師可透過等長(對應邊)和等角(對應角)的標記，幫助學生發現兩組對應角相等以及所夾的對應邊也等長，因此為 ASA 全等性質。

基本學習內容：三角形的全等性質 SAS、SSS、ASA、AAS、RHS

解 2：製作與 \overline{AB} (或 \overline{AC}) 相等的邊

當兩個三角形的兩個對應角相等， $\angle B = \angle E$ 、 $\angle C = \angle F$ ，

因三角形的內角和為 180° ，則另一角

$$\angle A = 180^\circ - (\angle B + \angle C)$$

$$\angle D = 180^\circ - (\angle E + \angle F)$$

得知 $\angle A = \angle D$ 。

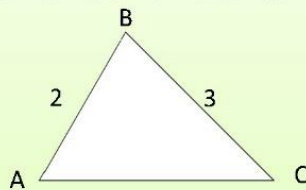
透過上解 ASA 過程，知道兩個三角形的二個對應角相等及其所夾的對應邊也等長，得知這兩個三角形也會全等。

所以只要知道兩個三角形的二組對應角相等及其一鄰邊的對應邊也等長，這兩個三角形也就會全等。



我們用二組對應角相等及一鄰邊的對應邊也等長，判斷三角形全等的方法，稱為 AAS 全等。

(5) 如下圖， $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = 2$ ， $\overline{BC} = 3$ 。 $\angle A = 60^\circ$ 、 $\angle B = 75^\circ$ 、 $\angle C = 45^\circ$ 。



① 今有另一三角形 $\triangle DEF$ ，已知 $\angle D = 60^\circ$ ， $\angle E = 75^\circ$ ，且 $\overline{DE} = \overline{AB}$ ，

請問 $\triangle ABC$ 是否全等 $\triangle DEF$ ？並說明是用何種性質判定？

② 今有另一三角形 $\triangle DEF$ ，已知 $\angle D = 60^\circ$ ， $\angle F = 45^\circ$ ，且 $\overline{DE} = 2$ ，

請問 $\triangle ABC$ 是否全等 $\triangle DEF$ ？並說明是用何種性質判定？



教材內容說明：

1. 本教材第 4~6 頁的教學重點是幫助學生理解 ASA 全等性質和 AAS 全等性質。
 - 第 4 頁透過給定兩組對應角相等，再透過增加哪一個條件幫助學生發現 ASA 全等性質。
 - 第 5 頁透過給定兩組對應角相等，再透過增加哪一個條件幫助學生發現 AAS 全等性質。
 - 第 6 頁應用 ASA 全等性質和 AAS 全等性質解題。
2. 第(4)題給定一 $\triangle ABC$ 以及 $\angle B = \angle E$ 、 $\angle C = \angle F$ ，詢問學生要再增加哪一個條件，可以使 $\triangle ABC$ 全等 $\triangle DEF$ 。

本教材提供解法如下：

方法二：製作與 \overline{AB} 等長的邊。

我們透過下列步驟幫助學生理解 AAS 全等性質。

步驟一：由內角和 180 度與 $\angle B = \angle E$ 、 $\angle C = \angle F$ 推得 $\angle A = \angle D$ ，

再利用 ASA 全等性質製作 $\triangle DEF$ 。

步驟二：透過疊合知道 $\triangle DEF$ 和 $\triangle ABC$ 全等。

- 教師可透過等長(對應邊)和等角(對應角)的標記，幫助學生發現兩組對應角相等以及所夾的對應邊也等長，為 AAS 全等性質。
 - 此階段的學生無法直接透過 AAS 製作三角形，即利用 $\angle B = \angle E$ 、 $\angle C = \angle F$ 及 $\overline{AB} = \overline{DE}$ 製作 $\triangle DEF$ ，所以本教材要求學生先推得 $\angle A = \angle D$ ，再利用 ASA 全等性質製作 $\triangle DEF$ 。
3. 第(5)題給定一 $\triangle ABC$ ，以及 $\overline{AB} = 2$ 、 $\overline{BC} = 3$ 、 $\angle A = 60^\circ$ 以及 $\angle B = 75^\circ$ ，
 - 子題①給定 $\angle D = 60^\circ$ 、 $\angle E = 75^\circ$ 且 $\overline{DE} = \overline{AB}$ ，問 $\triangle ABC$ 是否全等 $\triangle DEF$ 。
 - 子題②給定 $\angle D = 60^\circ$ 、 $\angle F = 45^\circ$ 且 $\overline{DE} = 2$ ，問 $\triangle ABC$ 是否全等 $\triangle DEF$ 。



基本學習內容：三角形的全等性質 SAS、SSS、ASA、AAS、RHS

解：

①選取 $\angle A = 60^\circ$ 和 $\angle D = 60^\circ$ 為對應角， $\angle A = 60^\circ$ 和 $\angle E = 75^\circ$ 為對應角，

A 點與 B 點所夾的邊為 \overline{AB} 、 D 點與 E 點所夾的邊為 \overline{DE}

因為對應邊 $\overline{AB} = \overline{DE}$ 等長

所以兩個三角形的二組對應角相等及所夾的對應邊也等長，由 ASA 全等性

質判定 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$

②選取 $\angle A = 60^\circ$ 和 $\angle D = 60^\circ$ 為對應角， $\angle C = 45^\circ$ 和 $\angle F = 45^\circ$ 為對應角，

A 點與 C 點所夾的邊為 \overline{AC} ， $\angle C$ 的另一個鄰邊為 \overline{AB}

D 點與 F 點所夾的邊為 \overline{DF} ， $\angle F$ 的另一個鄰邊為 \overline{DE}

因為對應邊 $\overline{AB} = \overline{DE}$ 等長

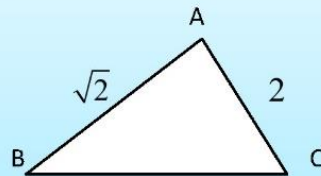
所以兩個三角形的二組對應角相等及其一鄰邊的對應邊也等長，由 AAS 全

等性質判定 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$



隨堂練習

如下圖， $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = \sqrt{2}$ ， $\overline{AC} = 2$ 。 $\angle A = 105^\circ$ 、 $\angle B = 45^\circ$ 、 $\angle C = 30^\circ$ 。



今有另一三角形 $\triangle DEF$ ，已知 $\angle D = 105^\circ$ ， $\angle E = 45^\circ$ ，且 $\overline{DE} = \overline{BC}$ ，

請問 $\triangle ABC$ 是否全等 $\triangle DEF$ ？並說明是用何種性質判定？是，AAS 性質



教材內容說明：

1. 本教材第 4~6 頁的教學重點是幫助學生理解 ASA 全等性質和 AAS 全等性質。

- 第 4 頁透過給定兩組對應角相等，再透過增加哪一個條件幫助學生發現 ASA 全等性質。
- 第 5 頁透過給定兩組對應角相等，再透過增加哪一個條件幫助學生發現 AAS 全等性質。
- 第 6 頁應用 ASA 全等性質和 AAS 全等性質解題

2. 第(5)題給定一 $\triangle ABC$ ，以及 $\overline{AB} = 2$ 、 $\overline{BC} = 3$ 、 $\angle A = 60^\circ$ 以及 $\angle B = 75^\circ$ ，

子題①給定 $\angle D = 60^\circ$ 、 $\angle E = 75^\circ$ 且 $\overline{DE} = \overline{AB}$ ，問 $\triangle ABC$ 是否全等 $\triangle DEF$ 。

子題②給定 $\angle D = 60^\circ$ 、 $\angle F = 45^\circ$ 且 $\overline{DE} = 2$ ，問 $\triangle ABC$ 是否全等 $\triangle DEF$ 。

本教材提供解法如下：

子題①應用對應角相等，幫助學生發現 $\angle A = 60^\circ$ 和 $\angle D = 60^\circ$ 相等，所以 $\angle A$ 和 $\angle D$ 為對應邊。同理可得， $\angle B$ 和 $\angle E$ 也為對應角。其次再應用對應邊相等，幫助學生發現 $\angle A$ 和 $\angle B$ 的夾邊為 \overline{AB} 、 $\angle D$ 和 $\angle E$ 的夾邊為 \overline{DE} ，由題目已知 $\overline{AB} = \overline{DE}$ 。由 ASA 全等性質判斷 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ 。

子題②應用對應角相等，幫助學生發現 $\angle A = 60^\circ$ 和 $\angle D = 60^\circ$ 相等，所以 $\angle A$ 和 $\angle D$ 為對應邊。同理可得， $\angle C$ 和 $\angle F$ 也為對應角。其次再應用對應邊相等，幫助學生發現 \overline{AB} 為 $\angle C$ 的鄰邊、 \overline{DE} 為 $\angle F$ 的鄰邊，由題目已知 $\overline{AB} = \overline{DE}$ 。由 AAS 全等判斷 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ 。

- 教師可透過等長(對應邊)和等角(對應角)的標記，幫助學生發現應用何種性質判定 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ 。

3. 本隨堂練習給定一 $\triangle ABC$ ，以及 $\overline{AB} = \sqrt{2}$ 、 $\overline{AC} = 2$ 、 $\angle A = 105^\circ$ 、 $\angle B = 75^\circ$ 及 $\angle C = 30^\circ$ ，有另一 $\triangle DEF$ ，給定 $\angle A = 105^\circ$ 、 $\angle E = 45^\circ$ 且 $\overline{DE} = \overline{AB}$ ，問 $\triangle ABC$ 是否全等 $\triangle DEF$ 。評量學生是否能理解 AAS 全等性質。

基本學習內容：三角形的全等性質 SAS、SSS、ASA、AAS、RHS

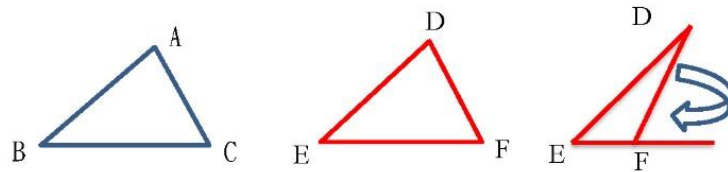
(6) 給定一個 $\triangle ABC$ ，已知 $\overline{AB} = \overline{DE}$ 、 $\overline{AC} = \overline{DF}$ 兩條件。

- ① 若 $\angle B = \angle E = 45^\circ$ ，可以使得 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 全等嗎？
- ② 若 $\angle B = \angle E = 60^\circ$ ，可以使得 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 全等嗎？
- ③ 若 $\angle B = \angle E = 90^\circ$ ，可以使得 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 全等嗎？

解

① $\triangle ABC$ 為銳角三角形，若其中 $\angle B = \angle E = 45^\circ$

1. 準備和 \overline{AB} 一樣長的扣條 \overline{DE} ，以及和 \overline{BC} 一樣長的扣條 \overline{EF}
2. 再控制扣條使得 $\angle B = \angle E = 45^\circ$ ，我們可以發現，可做出兩種 $\triangle DEF$ 。

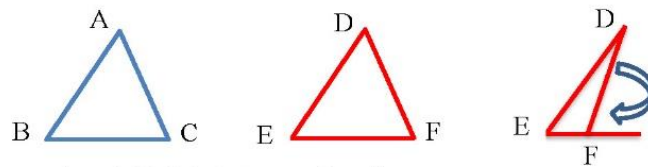


因此可以發現 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 不會全等。

所以只要知道兩個三角形的二個對應邊等長及其一邊的鄰角對應角相等（即 SSA 性質），這兩三角形不一定會全等。

② $\triangle ABC$ 為銳角三角形，若其中 $\angle B = \angle E = 60^\circ$

1. 準備和 \overline{AB} 一樣長的扣條 \overline{DE} ，以及和 \overline{BC} 一樣長的扣條 \overline{EF}
2. 再控制扣條使得 $\angle B = \angle E = 60^\circ$ ，我們可以發現，仍可做出兩種 $\triangle DEF$ 。



因此可以發現 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 不會全等。

所以只要知道兩個三角形的二個對應邊等長及其一邊的鄰角對應角相等（即 SSA 性質），這兩三角形不一定會全等。



教材內容說明：

1. 本教材第 7~8 頁的教學重點是先幫助學生發現 SSA 無法判定三角形全等，其次幫助學生理解 RHS 全等性質。

- 第 7 頁的教學重點是先幫助學生發現 SSA 無法判定三角形全等。

- 第 8 頁的教學重點是先幫助學生理解 RHS 三角形全等性質。

2. 第(6)題給定一 $\triangle ABC$ 及兩條件 $\overline{AB} = \overline{DE}$ 、 $\overline{AC} = \overline{DF}$ ，

子題①給定 $\angle B = \angle E = 45^\circ$ ，要求學生回答 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 是否全等。

子題②給定 $\angle B = \angle E = 60^\circ$ ，要求學生回答 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 是否全等。

子題③給定 $\angle B = \angle E = 90^\circ$ ，要求學生回答 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 是否全等。

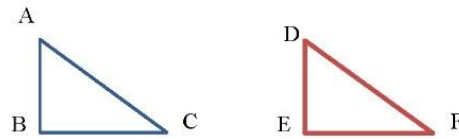
本教材提供子題①及子題②解法如下：

透過三角形製作活動，發現 $\angle B = \angle E$ 為銳角時，都可以製作出兩種 $\triangle DEF$ ，因此， $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 沒有全等。所以可以知道沒有 SSA 全等性質。

- 教師在操作活動時，應注意 \overline{AB} 邊長需大於 \overline{AC} ，才能得到兩種不同的 $\triangle DEF$ 。

基本學習內容：三角形的全等性質 SAS、SSS、ASA、AAS、RHS

③



如果有兩個直角三角形的斜邊和一股對應相等，

經由畢氏定理 $\overline{BC} = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2}$ ， $\overline{EF} = \sqrt{\overline{DF}^2 - \overline{DE}^2}$ ，

可以得知另一股 \overline{BC} 、 \overline{EF} 也必定相等。

透過例題 2，知道只要知道兩個三角形的三個對應邊等長，

這兩個三角形就會全等。

所以只要知道兩個直角三角形的斜邊等長，及任一股的對應邊也等長，

這兩個三角形也就會全等。

我們用兩個直角三角形的斜邊等長及其任一股的對應邊也等長，判斷三角形全等的方法，稱為 *RHS* 全等。



為了方便表示直角三角形的直角和斜邊，我們用記號 *R* 代表直角(Rightangle)，*H* 代表斜邊(Hypotenuse)。



教材內容說明：

1. 本教材第 7~8 頁的教學重點是先幫助學生發現 SSA 無法判定三角形全等，其次幫助學生理解 RHS 全等性質。

- 第 7 頁的教學重點是先幫助學生發現 SSA 無法判定三角形全等。

- 第 8 頁的教學重點是先幫助學生理解 RHS 三角形全等性質。

2. 第(6)題給定一 $\triangle ABC$ 及兩條件 $\overline{AB} = \overline{DE}$ 、 $\overline{AC} = \overline{DF}$ 。

子題③給定 $\angle B = \angle E = 90^\circ$ ，要求學生回答 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 是否全等。

本教材提供子題③解法如下：

由題目已知 $\overline{AB} = \overline{DE}$ 、 $\overline{AC} = \overline{DF}$ ，利用畢氏定理推得 $\overline{BC} = \overline{EF}$ 。

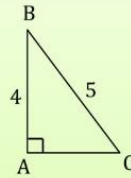
透過前頁的 SSS 全等性質，我們知道 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ 。因此，若知道兩個直角三角形的斜邊等長，及任一股對應邊也等長，就可以判斷此兩三角型全等，即 RHS 全等性質。

- 由子題①及子題②，我們發現角度為銳角時，SSA 全等性質不會成立。

由子題③，發現角度為直角時，SSA 全等性質會成立，且另外將此性質，命名為 RHS 性質。

基本學習內容：三角形的全等性質 SAS、SSS、ASA、AAS、RHS

(7) 如圖， $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 90^\circ$ ， $\overline{AB} = 4$ ， $\overline{BC} = 5$ 。

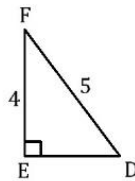


又另一 $\triangle DEF$ 中，已知 $\angle E = 90^\circ$ ， $\overline{EF} = 4$ ， $\overline{DF} = 5$ 。

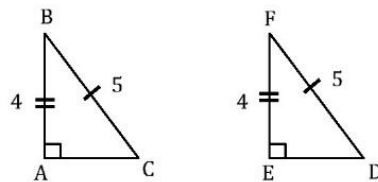
則這兩個三角形是否全等？你是以哪一個全等性質判定的？

解：

依題意繪出 $\triangle DEF$



因為 $\overline{AB} = \overline{EF}$ ， $\overline{BC} = \overline{FD}$ ， $\angle A = \angle E = 90^\circ$ ，此時我們可將一樣長的線段和一樣大的角畫上相等的記號，如下圖。



此時我們可利用 *RHS* 全等性質，判定 $\triangle ABC \cong \triangle EFD$



教材內容說明：

1. 本教材第 9 頁的教學重點是應用 RHS 全等性質進行解題。
2. 第(7)題給定一 $\triangle ABC$ 及 $\angle A = 90^\circ$ 、 $\overline{AB} = 4$ 、 $\overline{BC} = 5$ ，另一 $\triangle DEF$ 及 $\angle E = 90^\circ$ 、 $\overline{EF} = 4$ 、 $\overline{DF} = 5$ ，要求學生回答 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 是否全等，並說明以哪一種全等性質判定。

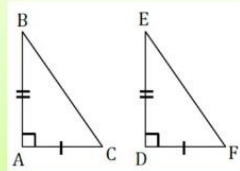
本教材提供解題方法如下：

依題意繪製 $\triangle DEF$ ，接著在 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 中，將一樣長的線段與一樣大的角標記上同樣的記號，再由圖上的標記，判斷為 RHS 全等性質。

- 教師可透過等長(對應邊)和等角(對應角)的標記，幫助學生發現應用何種性質判定 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ 。

基本學習內容：三角形的全等性質 SAS、SSS、ASA、AAS、RHS

(8) 下圖的兩個直角三角形中， $\overline{AB} = \overline{DE}$ 、 $\overline{AC} = \overline{DF}$ ，此時我們可以利用哪一個全等性質，判定這兩個三角形全等？



解：

$\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 中， $\overline{AB} = \overline{DE}$ 、 $\overline{AC} = \overline{DF}$ ， $\angle A = \angle D$

$\angle A$ 為 \overline{AB} 與 \overline{AC} 的夾角

故可利用 SAS 全等性質，判定 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$

(9) $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 60^\circ$ ， $\overline{AB} = 5$ ， $\overline{AC} = 4$ 。

① 已知在 $\triangle DEF$ 中， $\overline{AB} = \overline{DF}$ ， $\overline{BC} = \overline{DE}$ ， $\angle B = \angle D$ ，

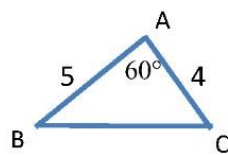
請問 $\triangle ABC$ 是否與 $\triangle DEF$ 全等，你是以哪一個全等性質判定的？

② 已知在 $\triangle PQR$ 中， $\overline{AB} = \overline{PQ}$ ， $\overline{AC} = \overline{PR}$ ， $\angle B = \angle Q$ ，

請問 $\triangle ABC$ 是否與 $\triangle PQR$ 全等，你是以哪一個全等性質判定的？

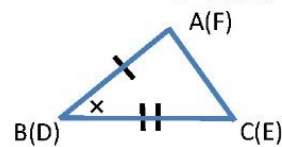
解：

① 依題意繪出 $\triangle ABC$



再依條件 $\overline{AB} = \overline{DF}$ 、 $\overline{BC} = \overline{DE}$ 、

$\angle B = \angle D$ 將記號劃記



故可利用 SAS 全等性質，判定 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$



教材內容說明：

1. 本教材第 11~13 頁的教學重點是在示意圖中使用劃記符號，幫助學生應用 SAS、AAS、ASA 全等性質進行解題。

- 第 11 頁的教學重點幫助學生應用 SAS 全等性質解題。
- 第 12 頁的教學重點幫助學生理解 SSA 無法判定全等及應用 AAS 全等性質解題。
- 第 13 頁的教學重點幫助學生應用 ASA 全等性質解題。

2. 第(8)題給定兩直角三角形，其中 $\overline{AB} = \overline{DE}$ 、 $\overline{AC} = \overline{DF}$ ，以及含有標記的示意圖 $\triangle ABC$ 及 $\triangle DEF$ 。

本教材提供解題方法如下：

如附圖所示的標記，可以看到 $\overline{AB} = \overline{DE}$ 、 $\overline{AC} = \overline{DF}$ 及 $\angle A = \angle D = 90^\circ$ ，其中 $\angle A$ 為 \overline{AB} 與 \overline{AC} 的夾角， $\angle D$ 為 \overline{DE} 與 \overline{DF} 的夾角，由 SAS 全等性質，判斷 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ 。

- 在判斷兩直角三角形全等時，若給定兩直角三角形的兩股等長，學生常直接以 RHS 全等性質判定，教師應幫助學生釐清 RHS 全等性質，為一個斜邊等長與一股等長的情況。

3. 第(9)題給定 $\triangle ABC$ ，及 $\angle A = 60^\circ$ 、 $\overline{AB} = 4$ 、 $\overline{AC} = 5$ 。

子題①給定 $\triangle DEF$ ，及 $\overline{AB} = \overline{DF}$ 、 $\overline{BC} = \overline{DE}$ 及 $\angle B = \angle D$ ，問 $\triangle ABC$ 是否與 $\triangle DEF$ 全等，是由哪一個全等性質判定。

子題②給定 $\triangle PQR$ ，及 $\overline{AB} = \overline{PQ}$ 、 $\overline{AC} = \overline{PR}$ 及 $\angle B = \angle Q$ ，問 $\triangle ABC$ 是否與 $\triangle PQR$ 全等，是由哪一個全等性質判定。

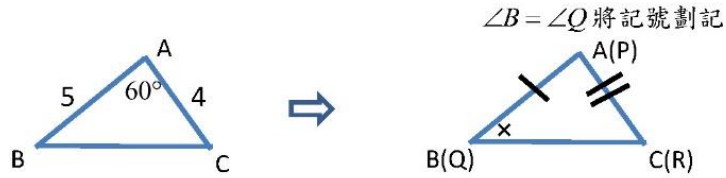
本教材提供子題①解題方法如下：

依題幹條件繪製 $\triangle ABC$ ，再依子題①條件將條件標記在 $\triangle ABC$ 上，最後由圖示的標記，判斷 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ ，由 SAS 全等性質判定。

基本學習內容：三角形的全等性質 SAS、SSS、ASA、AAS、RHS

② 方法一、依題意繪出 $\triangle ABC$

再依條件 $\overline{AB} = \overline{PQ}$ 、 $\overline{AC} = \overline{PR}$ 、



方法二、依題意繪出 $\triangle ABC$

再依條件 $\overline{AB} = \overline{PQ}$ 、 $\overline{AC} = \overline{PR}$ 、



SSA 無法判定 $\triangle ABC$ 和 $\triangle PQR$ 是否全等。

(10) ① 有 $\triangle ABC$ 及 $\triangle DEF$ ，已知 $\overline{AC} = \overline{FE}$ ， $\angle B = \angle D$ ， $\angle C = \angle E$ ，

請問 $\triangle ABC$ 是否與 $\triangle DEF$ 全等，你是以哪一個全等性質判定的？

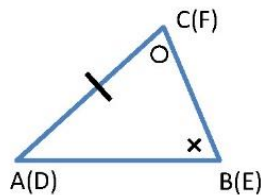
② 有 $\triangle ABC$ 及 $\triangle PQR$ ，已知 $\overline{AC} = \overline{PR}$ ， $\angle A = \angle P$ ， $\angle C = \angle R$ ，

請問 $\triangle ABC$ 是否與 $\triangle PQR$ 全等，你是以哪一個全等性質判定的？

解

① 繪出任一三邊不等長的 $\triangle ABC$ ，再依條件 $\overline{AC} = \overline{FE}$ 、 $\angle B = \angle D$ 、 $\angle C = \angle E$

將記號劃記



故可利用 AAS 全等性質，判定 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$



教材內容說明：

1. 本教材第 11~13 頁的教學重點是在示意圖中使用劃記符號，幫助學生應用 SAS、AAS、ASA 全等性質進行解題。

- 第 11 頁的教學重點幫助學生應用 SAS 全等性質解題。
- 第 12 頁的教學重點幫助學生理解 SSA 無法判定全等及應用 AAS 全等性質解題。
- 第 13 頁的教學重點幫助學生應用 ASA 全等性質解題。

2. 第(9)題給定 $\triangle ABC$ ，及 $\angle A = 60^\circ$ 、 $\overline{AB} = 4$ 、 $\overline{AC} = 5$ 。

子題②給定 $\triangle PQR$ ，及 $\overline{AB} = \overline{PQ}$ 、 $\overline{AC} = \overline{PR}$ 及 $\angle B = \angle Q$ ，請問 $\triangle ABC$ 是否與 $\triangle PQR$ 全等，是由哪一個全等性質判定。

本教材提供子題②解題方法如下：

依題幹條件繪製 $\triangle ABC$ ，再依子題②條件將條件標記在 $\triangle PQR$ 上，發現可能有兩種情況，最後由圖示的標記，判斷無法由 SSA 判斷 $\triangle ABC$ 全等 $\triangle PQR$ 。

- 教師在操作活動時，應注意 \overline{AB} 邊長需大於 \overline{AC} ，才能得到兩種不同的 $\triangle DEF$ 。

3. 第(10)題包含兩個子題，

子題①給定 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 中，已知 $\overline{AC} = \overline{FE}$ 、 $\angle B = \angle D$ 及 $\angle C = \angle E$ ，問 $\triangle ABC$ 是否與 $\triangle DEF$ 全等，是由哪一個全等性質判定。

子題②給定在 $\triangle ABC$ 與 $\triangle PQR$ 中，已知 $\overline{AC} = \overline{PR}$ 、 $\angle A = \angle P$ 及 $\angle C = \angle R$ ，問 $\triangle ABC$ 是否與 $\triangle PQR$ 全等，是由哪一個全等性質判定。

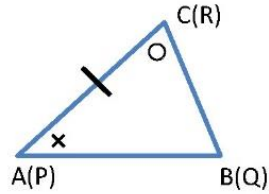
本教材提供子題①解題方法如下：

子題①繪製任一三邊不等長的 $\triangle ABC$ ，再依條件將條件劃記在 $\triangle ABC$ 上，最後由圖示的標記，判斷為 AAS 全等性質。

基本學習內容：三角形的全等性質 SAS、SSS、ASA、AAS、RHS

②繪出任一三邊不等長的 $\triangle ABC$ ，再依條件 $\overline{AC} = \overline{PR}$ 、 $\angle A = \angle P$ 、 $\angle C = \angle R$

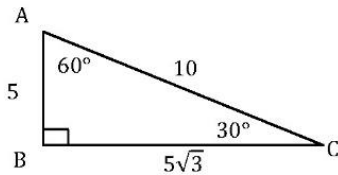
將記號劃記



故可利用 ASA 全等性質，判定 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$



小試身手



請判別下列三角形是否和 $\triangle ABC$ 全等，如果全等，請打「✓」，並註明所利用的全等性質，如果無法確定是否全等，請打「×」。

例：

(✓) RHS： $\triangle DEF$ 中， $\angle E = 90^\circ$ ， $\overline{DF} = 10$ ， $\overline{DE} = 5$ 。

(×) _____： 1. $\triangle GHI$ 中， $\overline{GI} = 10$ ， $\overline{GH} = 5$ 。

(×) _____： 2. $\triangle JKL$ 中， $\angle J = 60^\circ$ ， $\angle L = 30^\circ$

(✓) SSS： 3. $\triangle MNP$ 中， $\overline{MP} = 10$ ， $\overline{MN} = 5$ ， $\overline{NP} = 5\sqrt{3}$ 。

(✓) SAS： 4. $\triangle QRS$ 中， $\angle Q = 60^\circ$ ， $\overline{QS} = 10$ ， $\overline{QR} = 5$ 。



教材內容說明：

1. 本教材第 11~13 頁的教學重點是在示意圖中使用劃記符號，幫助學生應用 SAS、AAS、ASA 全等性質進行解題。
 - 第 11 頁的教學重點幫助學生應用 SAS 全等性質解題。
 - 第 12 頁的教學重點幫助學生理解 SSA 無法判定全等及應用 AAS 全等性質解題。
 - 第 13 頁的教學重點幫助學生應用 ASA 全等性質解題。
2. 第(10)題包含兩個子題，

子題②給定在 $\triangle ABC$ 與 $\triangle PQR$ 中，已知 $\overline{AC} = \overline{PR}$ 、 $\angle A = \angle P$ 及 $\angle C = \angle R$ ，問 $\triangle ABC$ 是否與 $\triangle PQR$ 全等，是由哪一個全等性質判定？

本教材提供子題②解題方法如下：

子題②繪製任一三邊不等長的 $\triangle ABC$ ，再依條件將條件劃記在 $\triangle ABC$ 上，最後由圖示的標記，判斷為 ASA 全等性質。

 - 第(9)題給定特定的 $\triangle ABC$ ，第(10)題給定任一 $\triangle ABC$ ，若學生無法作答第(10)題，教師應回到第(9)題再次說明。
3. 小試身手給定一直角三角形，以及其三個邊的長度與三個角的角度，檢查學生是否理解 SSS、SAS、AAS、ASA 及 RHS 三角形全等性質。



教育部國民及學前教育署 編

國民中學

學生學習扶助教材

8 年級數學

