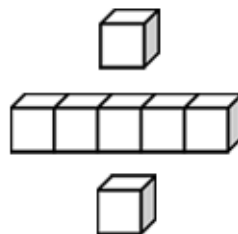


## 基本學習內容：SC-8-8-2

# 三角形外角等於其內對角和

## 【教師用】







基本學習內容：SC-8-8-2

學習內容：

**S-8-8 三角形的基本性質：**等腰三角形兩底角相等；非等腰三角形大角對大邊，大邊對大角；  
三角形兩邊和大於第三邊；外角等於其內對角和。

基本學習內容：

SC-8-8-2 三角形外角等於其內對角和。

基本學習表現：

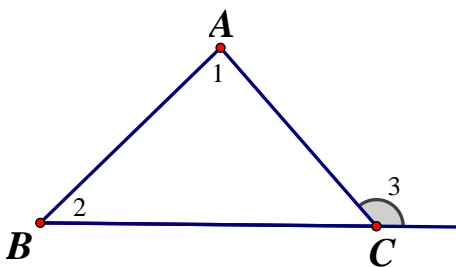
SCP-8-8-2-1 理解三角形任一外角等於其內對角和。

概要說明：

◎基本學習內容 SC- 8- 8- 2 為 S- 5- 1 之後續學習概念，學生已學過三角形三內角和為 180 度。本基本學習內容開始引入三角形任一外角等於其內對角和。

■教師可以透過讓學生直接利用量角器測量三角形的任意兩內角或剪下來與另一內角的外角拼成一個平角進行教學，讓學生藉由直觀觀察加以了解。

例如：如圖(六)所示， $\triangle ABC$  中， $\angle C$  的外角  $\angle 3$  等於其內對角  $\angle 1 + \angle 2$  之和，  
即  $\angle 3 = \angle 1 + \angle 2$ 。



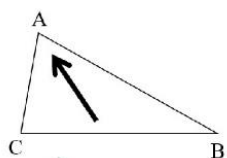
圖(六)



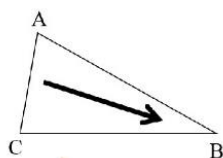
基本學習內容：SC-8-8-2 三角形外角等於其內對角和

## ◎ 認識三角形邊的對角與角的對邊

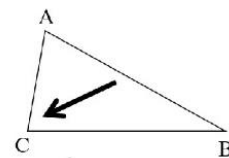
### 1. 三角形邊的對角：



$\overline{BC}$  邊的對角為  $\angle A$

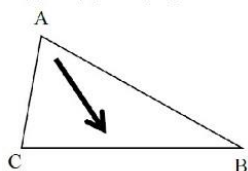


$\overline{AC}$  邊的對角為  $\angle B$

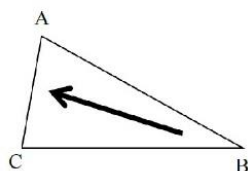


$\overline{AB}$  邊的對角為  $\angle C$

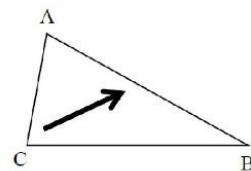
### 2. 三角形角的對邊：



$\angle A$  的對邊為  $\overline{BC}$  邊



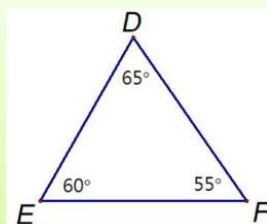
$\angle B$  的對邊為  $\overline{AC}$  邊



$\angle C$  的對邊為  $\overline{AB}$  邊

(1) 如右圖， $\triangle DEF$  中，請問

- ①  $\angle E$  的對邊為何？
- ②  $\angle F$  的對邊為何？
- ③  $\overline{DE}$  的對角是幾度？
- ④  $\overline{DF}$  的對角是幾度？



解：

- ①  $\angle E$  的對邊為  $\overline{DF}$ 。
- ②  $\angle F$  的對邊為  $\overline{DE}$ 。
- ③  $\overline{DE}$  的對角是  $\angle F=55$  度。
- ④  $\overline{DF}$  的對角是  $\angle E=60$  度。



**教材內容說明：**

1. 本教材第 1 頁的教學重點是介紹對角及對邊的定義。
2. 第(1)題給定已知三角的三角形，要求學生回答四個子問題：

子問題①： $\angle E$  的對邊為何？

- $\overline{DF}$

子問題②： $\angle F$  的對邊為何？

- $\overline{DE}$

子問題③： $\overline{DE}$  的對角是幾度？

- $\angle F = 55^\circ$

子問題④： $\overline{DF}$  的對角是幾度？

- $\angle E = 60^\circ$



基本學習內容：SC-8-8-2 三角形外角等於其內對角和

(2) 已知等腰 $\triangle PQR$ 中， $\overline{PQ} = \overline{QR}$ ， $\overline{PR}$ 的對角為80度，試求 $\overline{PQ}$ 的對角是幾度？

解：

如右圖，因為等腰 $\triangle PQR$ 的 $\overline{PQ} = \overline{QR}$

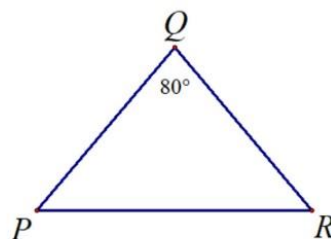
所以兩腰為 $\overline{PQ}$ 及 $\overline{QR}$ ，底邊為 $\overline{PR}$

底邊 $\overline{PR}$ 的對角即為頂角 $\angle Q = 80^\circ$ 度

故 $\overline{PQ}$ 的對角即為底角 $\angle R$

$$(180 - 80) \div 2 = 50$$

所以 $\angle R = 50^\circ$



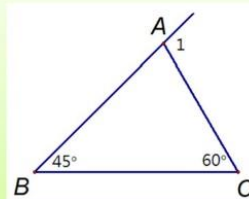
$\triangle ABC$  中 $\overline{AB}$ 的對角為 $\angle C$ （找頂點 $A$ 、 $B$ 以外的頂點 $C$ ）

$\triangle ABC$  中 $\angle C$ 的對邊為 $\overline{AB}$ （找頂點 $C$ 以外的頂點 $A$ 、 $B$ ）



### ◎三角形的任意外角等於不相鄰的兩個內角和

(3) 如右圖， $\triangle ABC$  中，已知 $\angle B = 45^\circ$ ， $\angle C = 60^\circ$ ，求 $\angle BAC$ 的外角 $\angle 1 = ?$

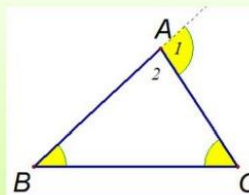


解：

$$\angle BAC = 180^\circ - \angle B - \angle C = 180^\circ - 45^\circ - 60^\circ = 75^\circ,$$

$$\angle 1 = 180^\circ - \angle BAC = 180^\circ - 75^\circ = 105^\circ.$$

(4) 如右圖， $\triangle ABC$  中， $\angle 1$  是 $\angle BAC$ 的外角。試說明： $\angle 1 = \angle B + \angle C$ 。



**教材內容說明：**

1. 本教材第 2～3 頁的教學重點有以下兩點：

(1) 關於對角的練習題。

(2) 關於三角形的任意外角等不相鄰的兩個內角和的證明。

2. 第(2)題給定等腰 $\triangle PQR$ ，其中 $\overline{PQ} = \overline{QR}$ ， $\overline{PR}$ 的對角為 80 度，要求學生計算 $\overline{PQ}$ 的對角=？

● 由於是文字題，建議教師引導學生畫出符合的等腰三角形幫助解題。

● 教師可以幫助學生複習等腰三角形底角與頂角度數的關係如下：底角 $= (180^\circ - \text{頂角}) \div 2$ 。

3. 本頁教師提示框說明在找「某邊的對角」或「某角的對邊」時，假設三角形沒有圖形輔助，學生可以用排除法（將三頂點扣除某些頂點）求得答案。例如： $\overline{AB}$ 的對角為 $\angle C$ 、 $\angle C$ 的對邊為 $\overline{AB}$ 。

4. 第(3)題給定已知兩內角度數的銳角三角形，要求學生計與此兩內角不相鄰的外角度數。

● 建議教師用二步驟幫助學生解題：

步驟一：利用三角形內角和  $180^\circ$  計算第三個內角的度數。

步驟二：利用外角相鄰內角的補角，計算此外角的度數。

5. 第(4)題給定三角形及某兩個內角代號（ $\angle B$ 、 $\angle C$ ），還有與此兩內角不相鄰的外角代號（ $\angle 1$ ），要求學生說明「 $\angle 1 = \angle B + \angle C$ 」。

基本學習內容：SC-8-8-2 三角形外角等於其內對角和



【方法一】

①  $\triangle ABC$  的內角和  $180^\circ$

$$\angle 2 + \angle B + \angle C = 180^\circ$$

將  $\angle B$ 、 $\angle C$  移項得

$$\angle 2 = 180^\circ - \angle B - \angle C$$

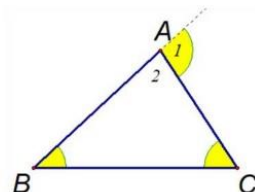
②  $\angle 1$  是  $\angle 2$  的外角

$$\angle 1 = 180^\circ - \angle 2$$

$$\angle 1 = 180^\circ - (180^\circ - \angle B - \angle C)$$

$$\angle 1 = 180^\circ - 180^\circ + \angle B + \angle C$$

$$\text{得 } \angle 1 = \angle B + \angle C$$



【方法二】

① 內角  $\angle 2$  的外角為  $\angle 1$ ，內、外角互補

$$\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ \dots\dots\dots ①$$

②  $\triangle ABC$  的內角和  $180^\circ$

$$\angle B + \angle C + \angle 2 = 180^\circ \dots\dots\dots ②$$

比較①②兩式之後得知  $\angle 1 = \angle B + \angle C$



三角形的任意外角等於不相鄰的兩個內角和

$\triangle ABC$  中， $\angle A$  的外角  $= \angle B + \angle C$

$\angle B$  的外角  $= \angle A + \angle C$

$\angle C$  的外角  $= \angle A + \angle B$



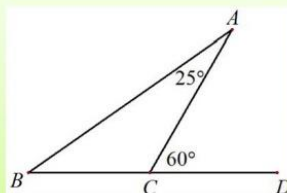


**教材內容說明：**

1. 本教材第 3 頁的教學重點是外角定理證明，利用兩種方法幫助學生理解外角定理。
2. 本頁第一個對話框為「三角形外角等於其內對角和」的說明方法一：  
步驟一：利用三角形內角和  $180^\circ$  將  $\angle 2$  改寫成  $180^\circ - \angle B - \angle C$ 。  
步驟二：利用外角是相鄰內角的補角得到  $\angle 1 = 180^\circ - \angle 2$ ，將步驟一的  $\angle 2$  關係式代入  
得到  $\angle 1 = \angle B + \angle C$
3. 本頁第二個對話框為「三角形外角等於其內對角和」的說明方法二：  
步驟一：利用相鄰的內外角互補得到  $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$   
步驟二：利用三角形內角和  $180^\circ$  得到  $\angle B + \angle C + \angle 2 = 180^\circ$   
步驟三：比較步驟一、二的等式可得  $\angle 1 = \angle B + \angle C$
4. 本頁教師指導框在示範三角形任一外角可等於不相鄰的內角和幫助學生理解外角定理。

基本學習內容：SC-8-8-2 三角形外角等於其內對角和

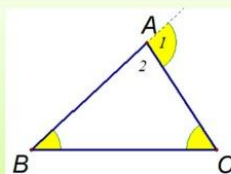
- (5) 如右圖， $\angle ACD = 60^\circ$ ， $\angle A = 25^\circ$ ，  
請問  $\angle B = ?$



解：

因為  $\angle ACD$  是  $\angle ACB$  的外角，由「外角等於不相鄰的兩個內角和」  
所以  $\angle ACD = \angle A + \angle B = \angle ACD$ ， $\angle B = \angle ACD - \angle A = 60^\circ - 25^\circ = 35^\circ$

- (6) 如右圖， $\triangle ABC$  中， $\angle 1 = 100^\circ$ ，  
請問  $\angle B + \angle C = ?$



方法一：

- ①  $\angle 1$  是  $\angle 2$  的外角  
 $\angle 2 = 180^\circ - \angle 1 = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$
- ②  $\triangle ABC$  的內角和  $180^\circ$   
 $\angle 2 + \angle B + \angle C = 180^\circ$   
 $\angle B + \angle C = 180^\circ - \angle 2 = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$

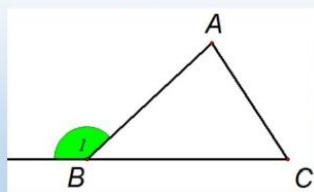
方法二：

- 因為  $\angle 1$  是  $\angle 2$  的外角  
由「外角等於不相鄰的兩個內角和」  
 $\angle 1 = \angle B + \angle C$   
 $\angle B + \angle C = 100^\circ$

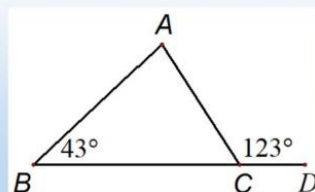


隨堂練習

- (1) 如下圖， $\angle A + \angle C = 130^\circ$ ，  
求  $\angle 1 = ?$  答： $130^\circ$



- (2) 如下圖， $\angle ACD = 123^\circ$ ，  
 $\angle B = 43^\circ$ ，求  $\angle A = ?$  答： $80^\circ$

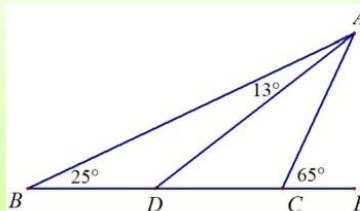


**教材內容說明：**

1. 本教材第 4～8 頁的教學重點是外角定理的基本概念及應用問題練習，幫助學生具備利用外角定理理解題的能力。
2. 第(5)題給定三角形一內角度數及不相鄰的外角的度數，要求學生算出第三個內角的度數。
  - 建議教師可以先讓同學發現圖形哪裡有外角，再引導學生利用外角定理得到  $\angle B + \angle A = \angle ACD$ ，故  $\angle B = \angle ACD - \angle A$ 。
  - 學生若無法利用外角定理，也可以利用外角計算出相鄰的內角度數，再利用三角形內角和算出第三個內角度數。
3. 第(6)題給定三角形一外角的度數，要求學生其餘不相鄰的內角度數和。
  - 本題提供兩個方法幫助學生解題：  
方法一：  
步驟一：先讓學生計算與給定外角相鄰的內角度數。  
步驟二：利用三角形的內角和得到另兩個內角和。  
方法二：利用外角定理得到  $\angle B + \angle C = \text{外角 } \angle 1$ 。
  - 教師不宜限制學生只能用外角定理理解題，學生剛接觸外角定理需要一段時間習慣，可以暫時先用相鄰內外角互補及三角形的內角和  $180^\circ$  解題。
4. 本頁隨堂練習有兩個子問題，評量重點在要求學生利用外角定理理解題。

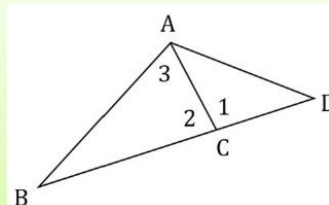
基本學習內容：SC-8-8-2 三角形外角等於其內對角和

- (7) 如右圖， $\triangle ABC$  中， $\angle B=25^\circ$ ，  
 $\angle BAD=13^\circ$ ， $\angle ACE=65^\circ$ ，  
 請問  $\angle DAC$  的度數為何？



解： $\angle ADC$  是  $\triangle ADB$  的外角， $\angle ADC = \angle BAD + \angle B = 13^\circ + 25^\circ = 38^\circ$   
 $\angle ACE$  是  $\triangle ACD$  的外角， $\angle ACE = \angle ADC + \angle DAC$   
 $\angle DAC = \angle ACE - \angle ADC = 65^\circ - 38^\circ = 27^\circ$

- (8) 如右圖， $\angle 1=100^\circ$ ， $\angle 3=70^\circ$ ，  
 試求  $\angle B$ ？



解：

**【方法一】**

$$\begin{aligned}\angle 2 &= 180^\circ - \angle 1 = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ \\ \angle B &= 180^\circ - \angle 3 - \angle 2 \\ \angle B &= 180^\circ - 70^\circ - 80^\circ \\ \angle B &= 30^\circ\end{aligned}$$



**【方法二】**

$\triangle ABC$  中， $\angle 1$  為  $\angle 2$  的外角，  
 所以  $\angle 1 = \angle 3 + \angle B$   
 得  $100^\circ = 70^\circ + \angle B$   
 故  $\angle B = 30^\circ$



**教材內容說明：**

1. 第(7)題給定兩個相鄰且具有共同邊的三角形，已知部份內角及一個外角的度數，要求學生利用外角求出未知內角的度數。

步驟一：由 $\triangle ABD$ 的兩個已知內角，得外角 $\angle ADC = \angle BAD + \angle B$ 。

步驟二：由 $\triangle ADC$ 的一個內角和一個外角，再利用外角定理：

$$\angle ACE = \angle ADC + \angle DAC \text{ 得 } \angle DAC = \angle ACE - \angle ADC$$

- 本題的關鍵是要先求出 $\angle ADC$ 的度數，建議教師可以提示學生先算出 $\angle ADC$ 的度數。

2. 第(8)題給定兩個相鄰且具有共同邊的三角形及部份內角的度數，要求學生計算未知內角的度數。

- 本題提供兩個方法幫助學生解題：

方法一：

步驟一：利用 $\angle 2$ 是 $\angle 1$ 的補角，算出 $\angle 2$ 的度數。

步驟二：利用三角形內角和 $180^\circ$ ，得到 $\angle B = 180^\circ - \angle 3 - \angle 2 = 30^\circ$

方法二：利用外角 $\angle 1 = \angle 3 + \angle B$ ，得到 $\angle B = \angle 1 - \angle 3 = 30^\circ$

- 建議教師提示學生解題不妨多多注意外角存在於哪裡？可以減少解題的步驟。



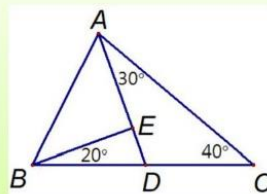
基本學習內容：SC-8-8-2 三角形外角等於其內對角和

(9) 如右圖， $\angle CAD = 30^\circ$ ， $\angle C = 40^\circ$ ，

$\angle DBE = 20^\circ$ ，請問：

①  $\angle BDE = ?$

②  $\angle AEB = ?$



解：

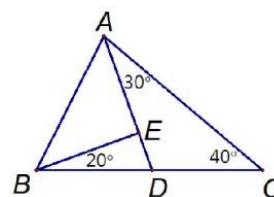
① 由「外角等於不相鄰的兩個內角和」：

$\triangle ACD$  中，外角  $\angle BDE = \angle C + \angle CAD$

$$\angle BDE = 40^\circ + 30^\circ = 70^\circ$$

②  $\triangle BDE$  中，外角  $\angle AEB = \angle DBE + \angle BDE$

$$\angle AEB = 20^\circ + 70^\circ = 90^\circ$$

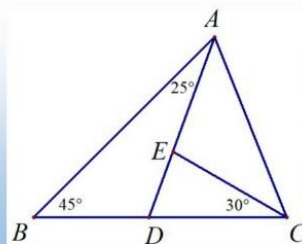


隨堂練習

(1) 如右圖， $\angle BAD = 25^\circ$ ， $\angle B = 45^\circ$ ，

$\angle DCE = 30^\circ$ ，請問  $\angle AEC$  為幾度？

答： $100^\circ$





### 教材內容說明：

1. 第(9)題給定三角形的複合圖形，要求學生回答兩個子問題：

子問題①：求  $\angle BDE = ?$

- 建議教師提示學生利用  $\angle BDE$  為  $\triangle ADC$  的外角，

得到：  $\angle BDE = \angle C + \angle CAD$ 。

子問題②：求  $\angle AEB = ?$  用外角求出未知內角的度數。

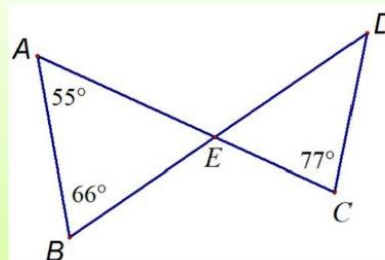
- 建議教師提示學生利用  $\angle AEB$  為  $\triangle BDE$  的外角，

得到：  $\angle AEB = \angle DBE + \angle BDE$ 。

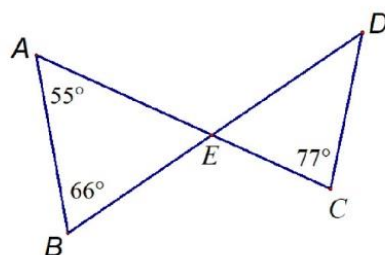
2. 本頁隨堂練習的評量重點在要求學生利用外角定理解題。

基本學習內容：SC-8-8-2 三角形外角等於其內對角和

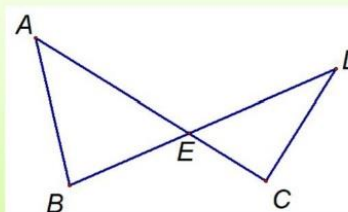
- (10) 如右圖，已知  $\angle A=55^\circ$ ， $\angle B=66^\circ$ ， $\angle C=77^\circ$ ，請問  $\angle D$  為幾度？



解：△ABE 中， $\angle AED$  為  $\angle AEB$  的外角  
 $\angle AED = \angle A + \angle B = 55^\circ + 66^\circ = 121^\circ$   
 同理， $\angle AED$  為  $\angle DEC$  的外角  
 $\angle AED = \angle C + \angle D$   
 $\angle D = \angle AED - \angle C$   
 $\angle D = 121^\circ - 77^\circ = 44^\circ$



- (11) 如右圖，已知  $\angle A=40^\circ$ ， $\angle B=80^\circ$ ，試求  $\angle C + \angle D = ?$



解：  
 根據「外角等於不相鄰的兩個內角和」  
 △ABE 中， $\angle AED = \angle A + \angle B \dots\dots ①$   
 △CDE 中， $\angle AED = \angle C + \angle D \dots\dots ②$   
 由①和②得到  $\angle C + \angle D = \angle A + \angle B$   
 $\angle C + \angle D = 40^\circ + 80^\circ = 120^\circ$



**教材內容說明：**

1. 第(10)題給定包含兩三角形所形成類似蝴蝶的複合圖形，要求學生回答其中一個內角度數為何？

步驟一：教師可以提示  $\angle AED$  為  $\triangle ABE$  的外角，

$$\angle AED = \angle A + \angle B, \angle AED = 55^\circ + 66^\circ = 121^\circ$$

步驟二：教師可以提示  $\angle AED$  為  $\triangle DEC$  的外角，

$$\angle AED = \angle C + \angle D, \angle D = \angle AED - \angle C = 121^\circ - 77^\circ = 44^\circ$$

2. 第(11)題給定如同第(10)題情境敘述的類題，要求學生回答某兩個內角度數和=？

步驟一：學生應可以發現  $\angle AED = \angle A + \angle B$

步驟二：學生應可以發現  $\angle AED = \angle C + \angle D$

步驟三：由兩個步驟得到  $\angle C + \angle D = \angle A + \angle B = 120^\circ$

- 建議教師在示範完此題後，引導學生發現利用  $\angle AED$  同時為左右兩個三角形的外角，因此得到  $\angle A + \angle B = \angle C + \angle D$ ，但不宜要求學生當成公式強記。

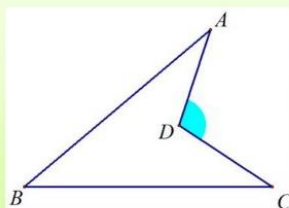


基本學習內容：SC-8-8-2 三角形外角等於其內對角和

(12) 右圖是一個像是箭頭的形狀

【提示】將四邊形ABCD分割成兩個三角形

- ① 已知  $\angle A=32^\circ$ ， $\angle B=40^\circ$ ， $\angle C=33^\circ$ ，  
請問  $\angle ADC=?$
- ② 找出  $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$  和  $\angle ADC$  的關係。

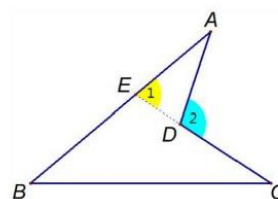


解：



① 【方法一】

延長  $\overline{CD}$  交  $\overline{AB}$  於  $E$  點， $\triangle EBC$  中  
由「外角等於不相鄰的兩個內角和」  
 $\angle 1 = \angle B + \angle C = 40^\circ + 33^\circ = 73^\circ$ 。  
同理可得  $\triangle AED$  中， $\angle 2 = \angle A + \angle 1$   
 $\angle 2 = 32^\circ + 73^\circ = 105^\circ$



① 【方法二】

過  $B$  點作射線  $\overline{BD}$ ，將  $\angle ADC$  分成  $\angle 3$  和  $\angle 4$ 。

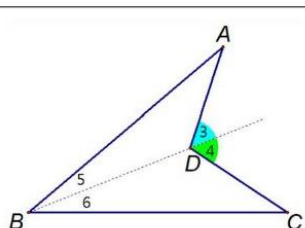
由「外角等於不相鄰的兩個內角和」

$\triangle ABD$  中， $\angle 3 = \angle A + \angle 5$ .....①

$\triangle CBD$  中， $\angle 4 = \angle C + \angle 6$ .....②

由①②兩式得到

$$\begin{aligned}\angle ADC &= \angle 3 + \angle 4 \\ &= (\angle A + \angle 5) + (\angle C + \angle 6) \\ &= \angle A + (\angle 5 + \angle 6) + \angle C \\ &= \angle A + \angle ABC + \angle C \\ &= 32^\circ + 40^\circ + 33^\circ = 105^\circ\end{aligned}$$



- ② 由上題的【方法一】，我們可以發現  $\angle 2 = \angle A + \angle 1$  以及  $\angle 1 = \angle B + \angle C$   
得到  $\angle 2 = \angle A + \angle B + \angle C$ ，亦即  $\angle ADC = \angle A + \angle B + \angle C$

**教材內容說明：**

1. 第(12)題給定仿箭頭形狀的凹四邊形及其三個內角，要求學生回答兩個子問題：

子問題①：求  $\angle ADC = ?$

● 方法一：(1) 教師可以提示作延長  $\overline{CD}$  的直線交  $\overline{AB}$  於  $E$

(2) 利用外角  $\angle 1 = \angle B + \angle C = 40^\circ + 33^\circ = 73^\circ$

(3) 利用外角  $\angle 2 = \angle A + \angle 1 = 32^\circ + 73^\circ = 105^\circ$

● 方法二：(1) 教師可以提示作  $\overline{BD}$

(2) 利用外角  $\angle 3 = \angle A + \angle 5 \dots \dots \textcircled{1}$

(3) 利用外角  $\angle 4 = \angle C + \angle 6 \dots \dots \textcircled{2}$

(4) 合併①②兩式，

得到  $\angle ADC = \angle A + \angle ABC + \angle C = 32^\circ + 40^\circ + 33^\circ = 105^\circ$

子問題②：找出  $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 、和  $\angle ADC$  的關係？

● 教師可以由方法一及方法二的解法歸納出下列關係式： $\angle ADC = \angle A + \angle ABC + \angle C$

建議教師不宜要求學生強記。



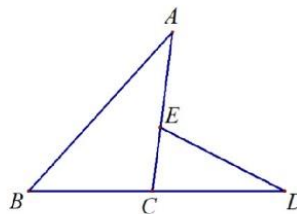
基本學習內容：SC-8-8-2 三角形外角等於其內對角和



小試身手

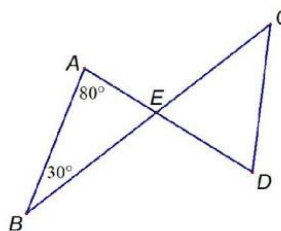
- (1) 如右圖， $C$  點在  $\overline{BD}$  上， $E$  點在  $\overline{AC}$  上。  
若  $\angle A = 30^\circ$ ， $\angle B = 50^\circ$ ， $\angle AED = 115^\circ$ ，  
請問：  
①  $\angle ACD = ?$   
②  $\angle D = ?$

答：①  $80^\circ$  ②  $35^\circ$



- (2) 如右圖， $\overline{BC}$  與  $\overline{AD}$  相交於  $E$  點， $\angle A = 80^\circ$ ，  
 $\angle B = 30^\circ$ ， $\angle D - \angle C = 20^\circ$ ，請問  $\angle D = ?$

答： $65^\circ$





**教材內容說明：**

1. 本教材第 9 頁為小試身手，提供兩個問題評量學生是否具備利用「外角定理」解題的能力。
2. 第(1)題給定包含兩個三角形的複合圖形要求學生回答兩個子問題：
  - 子問題①：給定圖形中的三個內角，要求學生算出某外角的度數。
  - 子問題②：要求學生計算某內角的度數。
3. 第(2)題給定包含兩三角形所形成類似蝴蝶的複合圖形，其中已知兩內角的度數及另兩個內角的度數差，要求學生計算某內角的度數。



教育部國民及學前教育署 編

國民中學

學生學習扶助教材

8 年級數學

