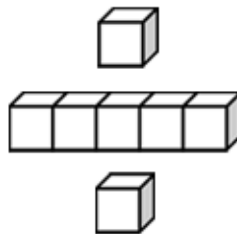


基本學習內容：SC-8-9-1

平行四邊形的內角、邊、對角線 的幾何性質 【教師用】



基本學習內容：SC-8-9-1

學習內容：

S-8-9 平行四邊形的基本性質：關於平行四邊形的內角、邊、對角線的幾何性質。

基本學習內容：

SC-8-9-1 平行四邊形的基本性質：平行四邊形的內角、邊、對角線的幾何性質。

基本學習表現：

SCP-8-9-1-1 理解平行四邊形兩組對角相等。

SCP-8-9-1-2 理解平行四邊形兩組對邊相等。

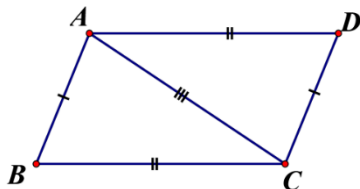
SCP-8-9-1-3 理解平行四邊形的一條對角線，將平行四邊形分割成兩個全等的三角形。

SCP-8-9-1-4 理解平行四邊形對角線互相平分。

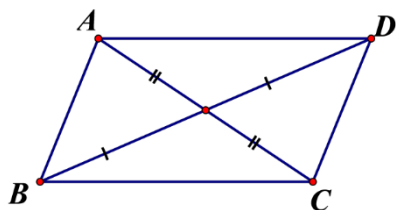
概要說明：

■ 國小學生應已認識平行四邊形兩組對邊平行、兩組對邊相等、對角相等。

■ 教師可以透過摺紙找出平行四邊形的其中一條對角線，再沿著對角線剪開，形成 2 個三角形，利用翻轉、疊合找出兩三角形全等，即可得知平行四邊形的任一條對角線，將平行四邊形分割成兩個全等的三角形。



■ 教師可以透過摺紙找出平行四邊形的對角線，再沿著對角線剪開，形成 4 個三角形，利用翻轉、疊合找出兩兩全等的三角形，即可得知平行四邊形對角線互相平分。

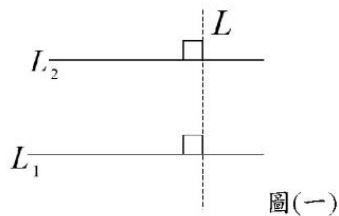




基本學習內容：SC-8-9-1 平行四邊形的內角、邊、對角線的幾何性質

複習活動：平行的意義

有一直線 L 同時垂直於 L_1 和 L_2 ，如圖(一)，則我們稱 L_1 和 L_2 互相平行，記作 $L_1 // L_2$ 。



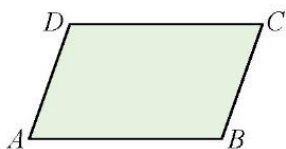
圖(一)

複習活動：平行四邊形的意義

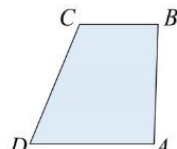
四邊形會有兩組對邊。

如果這兩組對邊都分別平行，則稱為**平行四邊形**(圖二)。

如果只有一組對邊平行，另一組對邊不平行，則稱為**梯形**(圖三)。



圖(二)



圖(三)

如圖(二)四邊形 $ABCD$ 中， $\overline{AB} // \overline{CD}$ 且 $\overline{AD} // \overline{BC}$ ，像這樣**兩組對邊分別平行的四邊形**，稱為**平行四邊形**，記作「 $\square ABCD$ 」，讀作「平行四邊形 $ABCD$ 」。

我們約定頂點標記時，必須以順時針或逆時針依序標記，例如 $\square ADCB$ 也可以使用。

**教材內容說明：**

1. 本教材第 1 頁的第一個教學重點是複習兩線平行的定義及其記法，為後續介紹「平行四邊形的基本性質」的概念鋪路。
2. 本教材第 1 頁的第二個教學重點是複習平行四邊形和梯形的定義，並引入平行四邊形：兩雙對邊相等、兩雙對角相等，為後續介紹「平行四邊形的鄰角互補、對角線互相平分」的概念鋪路。

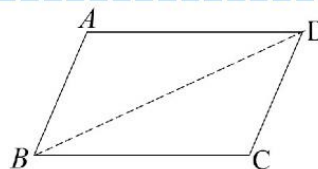
●我們約定頂點標記時，必須以順時針或逆時針依序標記，

例如 $\square ADCB$ 也可以使用。

基本學習內容：SC-8-9-1 平行四邊形的內角、邊、對角線的幾何性質

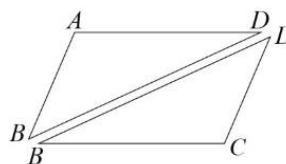
複習活動：對邊等長

將圖(四)平行四邊形 $\square ABCD$ ，沿 \overline{BD} 剪開，
再將 $\triangle ABD$ 與 $\triangle CDB$ 疊合在一起。
你有甚麼發現？

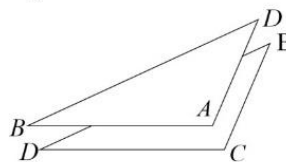


圖(四)

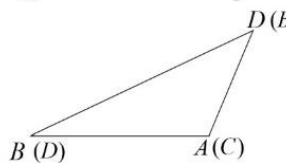
①沿 \overline{BD} 剪開，得到 $\triangle ABD$ 與 $\triangle CDB$ 。



②將 $\triangle ABD$ 旋轉 180° ，
得到兩個疊在一起的三角形。



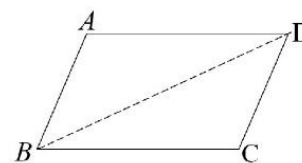
③得到 $\triangle ABD$ 和 $\triangle CDB$ 全等。



由 $\triangle ABD$ 與 $\triangle CDB$ 全等，可以發現

(1) \overline{AD} 和 \overline{BC} 等長。

(2) \overline{AB} 和 \overline{CD} 等長。



重點整理

平行四邊形 $\square ABCD$ 的兩組對邊等長。

即， $\overline{AB} = \overline{CD}$ ， $\overline{AD} = \overline{BC}$ 。



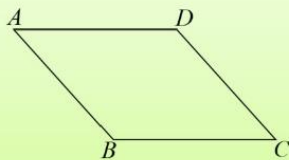


教材內容說明：

1. 本教材第 2~3 頁的教學重點是複習平行四邊形對邊等長的性質。
 - 本教材先幫助學生在實作的情境中，發現平行四邊形的對邊等長性質。
2. 本教材給定一個平行四邊形，要求學生將其中一條對角線 \overline{BD} 剪開，判斷剪開後的兩個三角形是否全等。
 - 教師可提供不同的平行四邊形，供學生操作。
3. 本教材建議教師透過下列步驟，幫助學生發現對邊等長，
 - 步驟一：將其中一條對角線 \overline{BD} 剪開。
 - 步驟二：將 $\triangle ABD$ 旋轉 180° 後，將 $\triangle ABD$ 和 $\triangle BCD$ 疊在一起。
 - 步驟三：發現 $\triangle ABD$ 和 $\triangle BCD$ 全等。
4. 重點整理框歸納結論：經由實作後，幫助學生發現平行四邊形兩雙對邊等長。
 - 教師可透過詢問 \overline{AD} 和哪一邊疊合、 \overline{AB} 和哪一邊疊合，幫助學生察覺 $\overline{AB} = \overline{CD}$ ，
 $\overline{AD} = \overline{BC}$ 。

基本學習內容：SC-8-9-1 平行四邊形的內角、邊、對角線的幾何性質

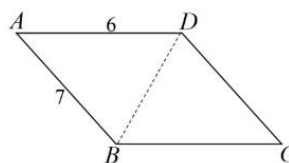
(1) 如圖，平行四邊形 $\square ABCD$ 中，已知 $\overline{AB} = 7$ ， $\overline{AD} = 6$ ，請問 \overline{CD} 、 \overline{BC} 分別為何？



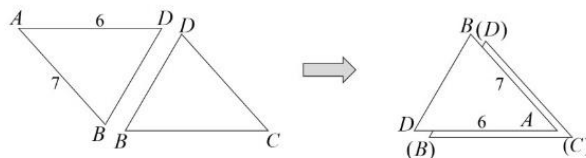
解：

(方法一)

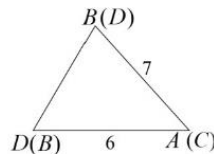
- ① 將平行四邊形 $ABCD$ 從 \overline{BD} 切開，
可以得到兩個三角形 $\triangle ABD$ 和 $\triangle CDB$ 。



- ② 將 $\triangle ABD$ 旋轉 180° ，得到兩個疊在一起的三角形。



- ③ 得到 $\triangle ABD$ 和 $\triangle CDB$ 全等，
所以 $\overline{AB} = \overline{CD} = 7$ ， $\overline{AD} = \overline{BC} = 6$ 。



(方法二)

因為平行四邊形 $ABCD$ 的兩組對邊等長，
所以 $\overline{AB} = \overline{CD} = 7$ ， $\overline{AD} = \overline{BC} = 6$ 。

答： $\overline{BC} = 6$ ， $\overline{CD} = 7$

**教材內容說明：**

1. 本教材第 2~3 頁的教學重點是複習平行四邊形對邊等長的性質。
 - 本教材先幫助學生在實作的情境中，發現平行四邊形的對邊等長性質。
2. 第(1)題給定一個平行四邊形 $ABCD$ ，其中 $\overline{AB}=7$ ， $\overline{AD}=6$ ，要求學生回答對邊 \overline{CD} 、 \overline{BC} 的長度。

本教材提供兩個方法，

方法一：將其中一條對角線 \overline{BD} 剪開，將 $\triangle ABD$ 和 $\triangle BCD$ 疊在一起，

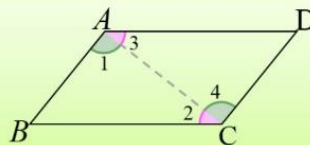
得到 $\overline{AB}=\overline{CD}=7$ ， $\overline{AD}=\overline{BC}=6$ 。

方法二：利用平行四邊形對邊等長性質作答。

- 如果學生用方法一解題，教師應先接受，再要求學生改用方法二來解題。

基本學習內容：SC-8-9-1 平行四邊形的內角、邊、對角線的幾何性質

- (2) 如圖， \overline{AC} 為平行四邊形 $\square ABCD$ 的對角線，
試說明 $\overline{AD} = \overline{BC}$ ， $\overline{AB} = \overline{DC}$ 。

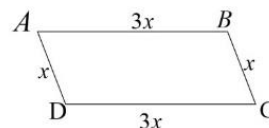


說明：在 $\triangle ABC$ 與 $\triangle CDA$ 中，
因為 $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ，所以 $\angle 1 = \angle 4$ (內錯角相等)，
因為 $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ，所以 $\angle 2 = \angle 3$ (內錯角相等)，
且 $\overline{AC} = \overline{AC}$ (公用邊)，故 $\triangle ABC \cong \triangle CDA$ (ASA 全等性質)。
所以 $\overline{AD} = \overline{BC}$ ， $\overline{AB} = \overline{DC}$ 。

- (3) 如圖，已知平行四邊形 $\square ABCD$
的周長為 24 公分， $\overline{CD} = 3\overline{AD}$ ，
則各邊的長度分別為多少公分？



解：由於平行四邊形的對邊等長，
設 $\overline{AD} = x$ 公分， $\therefore \overline{BC} = \overline{AD}$ ， $\therefore \overline{BC} = x$
 $\therefore \overline{CD} = 3\overline{AD} = 3x$ ，又 $\overline{CD} = \overline{AB}$ ，
 $\therefore \overline{CD} = \overline{AB} = 3x$ 公分
則周長 $x + 3x + x + 3x = 24$ ，得 $8x = 24$ ，故 $x = 3$ 。
故 $\overline{AD} = \overline{BC} = 3$ 公分， $\overline{CD} = \overline{AB} = 9$ 公分。

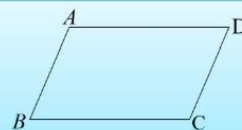


答： $\overline{AD} = \overline{BC} = 3$ 公分， $\overline{CD} = \overline{AB} = 9$ 公分。

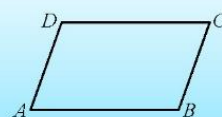


隨堂練習

- (1) $\square ABCD$ 中， \overline{BC} 比 \overline{AB} 的 2 倍多 5 公分，
 \overline{AD} 比 \overline{CD} 的 3 倍少 6 公分，
則 $\square ABCD$ 的周長為多少公分？ 答：周長=76



- (2) $\square ABCD$ 為平行四邊形， $\overline{BC} = 11$ ， $\overline{AB} = 16$ ，
請問 \overline{AD} 、 \overline{CD} 分別為何？ 答： $\overline{AD} = 11$ ， $\overline{CD} = 16$



**教材內容說明：**

1. 本教材第 4 頁的教學重點是幫助學生利用平行四邊形兩雙對邊等長的性質解題。
2. 第(2)題給定一個平行四邊形 $ABCD$ ，請學生試著利用 ASA 全等性質，說明平行四邊形的對邊等長。

● 本教材只提供一種證明給學生參考，但不要求學生過度論證或死背論證過程。

● 因為平行四邊形有兩組平行邊，利用內錯角相等性質，

得出 $\angle 1 = \angle 4$ ， $\angle 2 = \angle 3$ ， $\overline{AC} = \overline{AC}$ (公用邊)，故 $\triangle ABC \cong \triangle CDA$ (ASA 全等)。

3. 第(3)題給定平行四邊形的周長及相鄰邊長間的倍數關係，要求學生算出各邊的長度。

教師可依下列步驟幫助學生解題：

步驟一：由於平行四邊形的對邊等長，可以先假設 $\overline{AD} = x$ 公分後，得到根據題目的邊長關係，列出關係式。

步驟二：利用解一元一次方程式得出 $\overline{AD} = 3$ 。

步驟三：利用對邊等長求出 $BC = \overline{AD} = 3$ 。

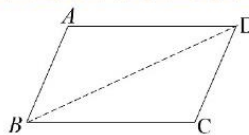
步驟四：代入關係式得出 $CD = AB = 9$ 。

4. 本頁隨堂練習的評量重點是利用平行四邊形對邊等長性質解題。

基本學習內容：SC-8-9-1 平行四邊形的內角、邊、對角線的幾何性質

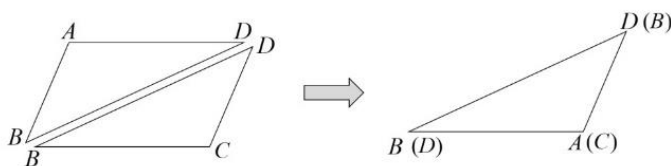
複習活動：對角相等

1. 將圖(五)平行四邊形 $\square ABCD$ ，沿 \overline{BD} 剪開，再將 $\triangle ABD$ 與 $\triangle BCD$ 疊合在一起。你有甚麼發現？



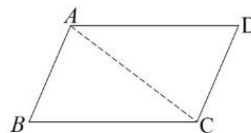
圖(五)

- ①沿 \overline{BD} 剪開，得到 $\triangle ABD$ 與 $\triangle BCD$ ，將 $\triangle ABD$ 旋轉 180° ，兩個三角形疊在一起，得到 $\angle A$ 與 $\angle C$ 完全疊合。



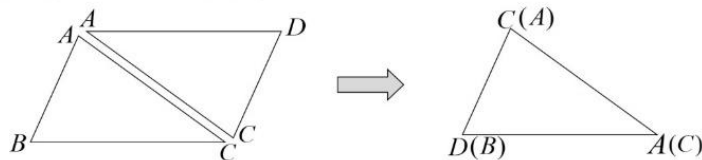
- ②由此我們可以發現， $\angle A = \angle C$ 。

2. 將圖(六)平行四邊形 $\square ABCD$ ，沿 \overline{AC} 剪開，再將 $\triangle ABC$ 與 $\triangle ADC$ 疊合在一起。你有甚麼發現？



圖(六)

- ①沿 \overline{AC} 剪開，得到 $\triangle ADC$ 與 $\triangle ABC$ ，將 $\triangle ADC$ 旋轉 180° ，兩個三角形疊在一起，得到 $\angle B$ 與 $\angle D$ 完全疊合。



- ②由此我們可以發現， $\angle B = \angle D$ 。

重點整理

平行四邊形 $ABCD$ 的兩組對角分別相等。即 $\angle A = \angle C$ ， $\angle B = \angle D$ 。



教材內容說明：

1. 本教材第 5 頁的教學重點是幫助學生複習平行四邊形兩組對角相等，為後續「平行四邊形鄰角互補」的概念鋪路。
 - 平行四邊形只需沿著某一條對角線剪一次即可檢驗兩組對邊等長，但是，必須沿著兩條對角線各剪一次，才可以檢驗出兩組對角相等。
2. 第 1 題沿著 \overline{BD} 剪開，幫助學生發現 $\angle A = \angle C$ 。

本教材建議教師透過下列步驟，幫助學生發現對角相等。

步驟一：沿著對角線 \overline{BD} 剪開。

步驟二：將 $\triangle ABD$ 旋轉 180° 後，發現 $\triangle ABD$ 和 $\triangle BCD$ 全等。

步驟三： $\angle A$ 和 $\angle C$ 完全疊合，故 $\angle A = \angle C$ 。

 - 教師可提供不同的平行四邊形，供學生操作。
3. 第 2 題沿著 \overline{AC} 剪開，幫助學生發現 $\angle B = \angle D$ 。

本教材建議教師透過下列步驟，幫助學生發現對邊等長，

步驟一：將另一條對角線 \overline{AC} 剪開。

步驟二：將 $\triangle ACD$ 旋轉 180° 後，發現 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ACD$ 全等。

步驟三： $\angle B$ 和 $\angle D$ 完全疊合，故 $\angle B = \angle D$ 。
4. 本頁重點整理框歸納結論：經由 2 次剪開對角線後，學生可以發現平行四邊形兩組對角相等， $\angle A = \angle C$ ， $\angle B = \angle D$ 。



基本學習內容：SC-8-9-1 平行四邊形的內角、邊、對角線的幾何性質

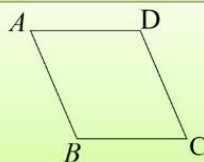
(4)如圖，已知 $\square ABCD$ 為平行四邊形， $\angle A = 72^\circ$ ， $\angle B = 108^\circ$ ，求 $\angle C$ 、 $\angle D$ 的度數分別為何？



解：因為 $\square ABCD$ 為平行四邊形，所以兩組對角分別相等。
 $\therefore \angle C = \angle A = 72^\circ$ ， $\angle D = \angle B = 108^\circ$

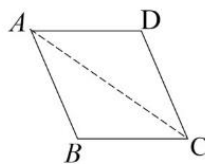
答： $\angle C = 72^\circ$ ， $\angle D = 108^\circ$

(5)如圖，已知 $\square ABCD$ 為平行四邊形，試說明 $\angle A = \angle C$ ， $\angle B = \angle D$ 。

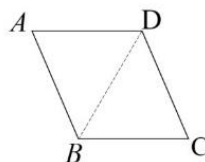


說明：

①因為 $\square ABCD$ 為平行四邊形，連 \overline{AC}
 在 $\triangle ABC$ 與 $\triangle CDA$ 中，
 因為 $\overline{AB} = \overline{CD}$ ， $\overline{AD} = \overline{BC}$ ， $\overline{AC} = \overline{AC}$ ，
 所以 $\triangle ABC \cong \triangle CDA$ (SSS)，
 得 $\angle B = \angle D$ 。

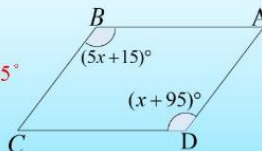


②同理，連 \overline{BD} ，
 因為 $\overline{AB} = \overline{CD}$ ， $\overline{AD} = \overline{BC}$ ， $\overline{BD} = \overline{BD}$ ，
 $\triangle ABD \cong \triangle CDB$ (SSS)，
 得 $\angle A = \angle C$ 。



隨堂練習

如圖， $\square ABCD$ 中， $\angle B = (5x + 10)^\circ$ ， $\angle D = (x + 95)^\circ$ ，請問 $\angle C$ 的度數為何？ 答： $\angle C = 65^\circ$





教材內容說明：

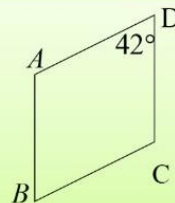
1. 本教材第 6 頁的教學重點是幫助學生利用平行四邊形兩雙對角相等的性質解題。
2. 第(4)題給定一個平行四邊形 $ABCD$ ，其中 $\angle A=72^\circ$ ， $\angle B=108^\circ$ ，要求學生算出 $\angle C$ 和 $\angle D$ 的角度。
 - 如果學生無法解題，教師可提示學生平行四邊形兩雙對角相等。
3. 第(5)題給定一個平行四邊形 $ABCD$ ，請學生試著利用 SSS 全等性質，說明平行四邊形的對角相等的性質。
 - 教師宜請學生試著說明，但不要求學生過度論證或死背論證過程。
 - 因為平行四邊形有兩組平行邊，利用內錯角相等性質，
 得出 $\angle 1=\angle 4$ ， $\angle 2=\angle 3$ ， $\overline{AC}=\overline{AC}$ (公用邊)，故 $\triangle ABC \cong \triangle CDA$ (ASA 全等)。
4. 本頁隨堂練習給定平行四邊形其中一組對角的度數，檢驗學生能利用「平行四邊形對角相等」的性質解題。



基本學習內容：SC-8-9-1 平行四邊形的內角、邊、對角線的幾何性質

活動一：鄰角互補

(6) 已知 $\square ABCD$ 為平行四邊形且 $\angle D = 42^\circ$ ，
求 $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 的度數分別為何？



解：因為 $\square ABCD$ 為平行四邊形，所以 $\angle A = \angle C$ ， $\angle B = \angle D$ (對角相等)。

$$\text{故 } \angle B = \angle D = 42^\circ$$

$$\text{且四邊形內角和為 } 360^\circ, \angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ$$

$$\angle A + 42^\circ + \angle C + 42^\circ = 360^\circ$$

$$\angle A + \angle C = 276^\circ$$

$$\text{因為 } \angle A = \angle C \quad \text{所以 } \angle A = \angle C = 276^\circ \div 2 = 138^\circ$$

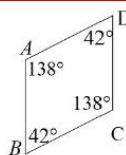
$$\text{答：} \angle A = 138^\circ, \angle C = 138^\circ, \angle B = 42^\circ。$$

結論：由第(6)題，我們發現

$$\angle A + \angle B = 180^\circ, \angle A + \angle D = 180^\circ,$$

$$\angle C + \angle D = 180^\circ, \angle C + \angle B = 180^\circ。$$

即 平行四邊形的每一個角和它的鄰角都互補，稱為「平行四邊形的鄰角互補」。

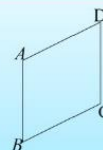


隨堂練習

$\square ABCD$ 為平行四邊形， $\angle C = 2\angle B$ ，

請問 $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 、 $\angle D$ 的度數分別為何？

$$\text{答：} \angle A = 120^\circ, \angle B = 60^\circ, \angle C = 120^\circ, \angle D = 60^\circ$$



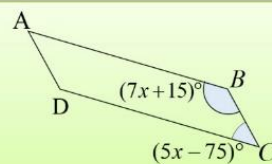
**教材內容說明：**

1. 本教材第 7~9 頁的教學重點是幫助學生從平行四邊形「對角角度相等」的性質關係，推論出平行四邊形「鄰角互補」的性質關係。
 - 本教材利用平行四邊形的對角相等的性質，經由計算發現鄰角互補的性質。
2. 第(6)題給定一個平行四邊形， $\angle D = 42^\circ$ ，要求學生算出其他三個角度的度數。
 - 教師可製作不同的平行四邊形，供學生操作。
 - 根據剪紙的操作，教師應強調平行四邊形的對角與對邊相等的性質。
3. 本教材建議教師透過下列步驟，幫助學生發現對角相等、鄰角互補的性質，
 - 步驟一：因為平行四邊形對角相等的性質，可知 $\angle A = \angle C$ ， $\angle B$ 和 $\angle D$ 。
 - 步驟二：利用四邊形內角和 $= 360^\circ$ ，可以分別算出各個角度。
 - 步驟三： $\angle A = \angle C = 138^\circ$ ， $\angle B = \angle D = 42^\circ$ 。
4. 歸納結論，將 $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 、 $\angle D$ 的度數都畫在平行四邊形裡，觀察出鄰角互補的性質。
5. 本頁隨堂練習的評量重點是給定平行四邊形其中一組鄰角度數的關係，檢驗學生能利用「平行四邊形鄰角互補」的性質解題。



基本學習內容：SC-8-9-1 平行四邊形的內角、邊、對角線的幾何性質

(7) 如圖， $\square ABCD$ 中，
 $\angle B = (7x+15)^\circ$ ， $\angle C = (5x-75)^\circ$ ，
 請問 $\angle C$ 的度數為何？



解：

- ① $\because ABCD$ 為平行四邊形
 \therefore 每一個角與它的鄰角都互補。
- ② $\therefore \angle B + \angle C = 180^\circ$
- ③ $(7x+15) + (5x-75) = 180$
 $12x = 240$
 $x = 20$
- ④ $\angle C = (5x-75)^\circ = 5 \times 20 - 75 = 25^\circ$

答： $\angle C = 25^\circ$



隨堂練習

如圖，平行四邊形 $ABCD$ 中，已知 $\angle A + \angle C = 100^\circ$ ，
 求 $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 、 $\angle D$ 的度數。

答： $\angle A = 50^\circ$ 、 $\angle B = 130^\circ$ 、 $\angle C = 50^\circ$ 、 $\angle D = 130^\circ$

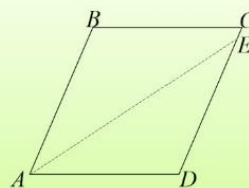


教材內容說明：

1. 本教材第 7~9 頁的教學重點是幫助學生從平行四邊形「對角角度相等」的性質關係，推論出平行四邊形「鄰角互補」的性質關係。
2. 第(7)題給定一個平行四邊形， $\angle B$ 和 $\angle C$ 均為未知數，要求學生利用鄰角互補性質，解出 x 後，再算出 $\angle C$ 的度數。
3. 本教材建議教師透過下列步驟解題，
 - 步驟一：因為 $ABCD$ 為平行四邊形，所以有鄰角相等的性質。
 - 步驟二： $\angle B + \angle C = 180^\circ$ ，解出未知數 x 。
 - 步驟三：將 x 值代回 $\angle C$ 得答案。
4. 本頁隨堂練習的評量重點是給定平行四邊形其中一組對角的角度關係，檢驗學生能利用「平行四邊形鄰角互補」的性質解題。

基本學習內容：SC-8-9-1 平行四邊形的內角、邊、對角線的幾何性質

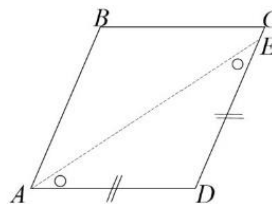
- (8) 如圖，平行四邊形 $ABCD$ 中，連接 \overline{AE} ，
已知 E 為 \overline{CD} 上的一點且 $\overline{AD} = \overline{DE}$ ，
若 $\angle C = 40^\circ$ ，求 $\angle AED$ 的度數？



解：

(方法一)

- ① \because 平行四邊形的鄰角互補
 $\therefore \angle C + \angle D = 180^\circ$
 $\angle D = 180^\circ - \angle C = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$
- ② $\because \overline{AD} = \overline{DE}$
 $\therefore \triangle ADE$ 為等腰三角形，兩底角相等
 $\therefore \angle AED = \angle DAE$
 $\therefore \angle AED = (180^\circ - 140^\circ) \div 2 = 40^\circ \div 2 = 20^\circ$



(方法二)

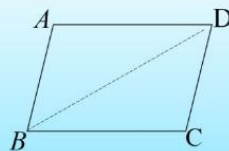
- ① \because 平行四邊形的對角相等
 $\angle BAD = \angle C = 40^\circ$
- ② $\because \overline{AD} = \overline{DE}$
 $\therefore \triangle ADE$ 為等腰三角形，兩底角相等
 $\therefore \angle AED = \angle DAE$
- ③ \because 平行四邊形的對邊平行
 $\therefore \overline{AB} \parallel \overline{CD} \quad \therefore \angle BAE = \angle AED$ (內錯角相等)
- ④ $\therefore \angle AED = \angle DAE = \angle BAE = \angle BAD \div 2 = 40^\circ \div 2 = 20^\circ$

答： $\angle AED = 20^\circ$



隨堂練習

如圖，平行四邊形 $ABCD$ 中，
 $\angle A = 100^\circ$ ，若 $\angle ABD : \angle DBC = 3 : 2$ ，
則 $\angle DBC$ 的度數為何？ 答： 32°



**教材內容說明：**

1. 本教材第 7~9 頁的教學重點是幫助學生從平行四邊形「對角角度相等」的性質關係，推論出平行四邊形「鄰角互補」的性質關係。
2. 第(8)題給定一個平行四邊形，平行四邊形 $ABCD$ 中，連接 \overline{AE} ，
已知 E 為 \overline{CD} 上的一點且 $\overline{AD} = \overline{DE}$ ，若 $\angle C = 40^\circ$ ，求 $\angle AED$ 的度數。
3. 本教材提供兩個方法解題，
方法一：利用鄰角互補的性質解題。
方法二：利用對角相等的性質解題。
4. 本頁隨堂練習的評量重點是給定平行四邊形其中一角角度與鄰角角度的比例關係，檢驗學生能利用「平行四邊形鄰角互補」的性質解題。

基本學習內容：SC-8-9-1 平行四邊形的內角、邊、對角線的幾何性質

活動二：對角線互相平分

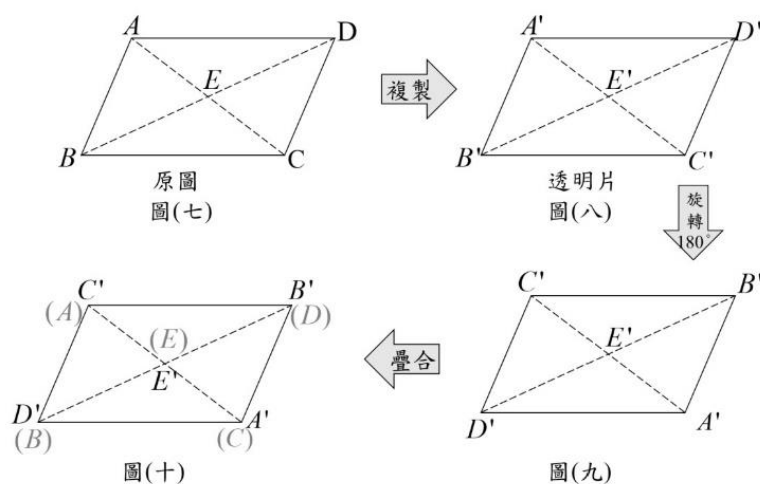
下圖(七)是一個平行四邊形 $\square ABCD$ ，且對角線 \overline{AC} 與 \overline{BD} 相交於 E 點。

用透明片複製一樣的圖形，並將對應點分別標示 $A'B'C'D'E'$ ，如圖(八)。

將透明片旋轉 180° ，如圖(九)。將投影片移動且疊放在圖七上方，如圖(十)。

使得 E' 和 E 、 A' 和 C 、 B' 和 D 、 C' 和 A 、 D' 和 B 疊在一起。

請問你有什麼發現？



①觀察圖十，發現 $\overline{E'A'}$ 與 \overline{EC} 疊合， $\overline{E'A'}$ 是從 \overline{EA} 複製過來的，
所以 $\overline{EA} = \overline{EC}$ 。

②也發現 $\overline{E'B'}$ 與 \overline{ED} 疊合， $\overline{E'B'}$ 是從 \overline{EB} 複製過來的，
所以 $\overline{EB} = \overline{ED}$ 。

同理可知 $\overline{EA} = \overline{EC} = \frac{1}{2}\overline{AC}$ 、 $\overline{EB} = \overline{ED} = \frac{1}{2}\overline{BD}$ 。

也就是兩條對角線的交點 E 會將對角線都平分成長度相等的兩段，
我們稱為「平行四邊形的對角線互相平分」。





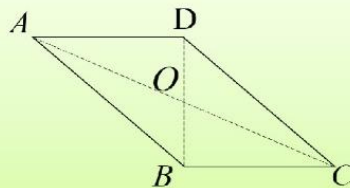
教材內容說明：

1. 本教材第 10~12 頁的教學重點是幫助學生了解平行四邊形「對角線互相平分」的性質關係。
2. 本教材給定一個平行四邊形，要求學生利用透明片複製出相同的平行四邊形，經由旋轉與疊合，發現平行四邊形的對角線互相平分。
 - 教師可提供不同的平行四邊形，供學生操作。
3. 本頁教師提示重點幫助學生理解平行四邊形的對角線互相平分。



基本學習內容：SC-8-9-1 平行四邊形的內角、邊、對角線的幾何性質

- (9) 如圖，平行四邊形 $\square ABCD$ 中，
 \overline{AC} 和 \overline{BD} 交於 O 點，
 已知 $\overline{AB}=16$ ， $\overline{AD}=18$ ， $\overline{BD}=22$ ，
 請問 \overline{CD} 、 \overline{BC} 、 \overline{OB} 、 \overline{OD} 分別為何？



解：

我先想像複製圖形，再旋轉 180 度後疊上去，並標示長度。如圖。



(方法一)

- ① 對準 O 點，得到 A 點與 C 點疊合， B 點與 D 點疊合，

C 點與 A 點疊合， D 點與 B 點疊合，

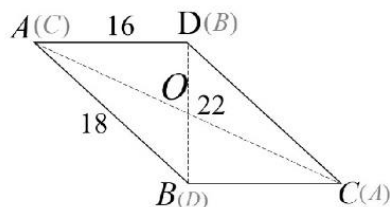
發現 \overline{BC} 與 \overline{AD} 疊合， \overline{AB} 與 \overline{CD} 疊合，

$$\therefore \overline{AD} = \overline{BC} = 18, \overline{AB} = \overline{CD} = 16。$$

- ② 對準 O 為對角線交點，

發現 \overline{OB} 與 \overline{OD} 疊合

$$\therefore \overline{OB} = \overline{OD} = \frac{1}{2} \overline{BD} = 22 \div 2 = 11$$



(方法二)

- ① \because 平行四邊形 $ABCD$ 的對邊等長，

$$\therefore \overline{AD} = \overline{BC} = 18, \overline{AB} = \overline{CD} = 16。$$

- ② \because 平行四邊形 $ABCD$ 的對角線互相平分， O 為對角線交點，

$$\therefore \overline{OB} = \overline{OD} = \frac{1}{2} \overline{BD} = 22 \div 2 = 11$$

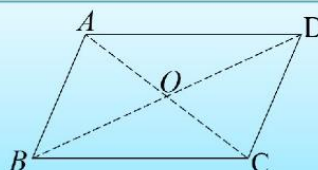
答： $\overline{CD}=16$ 、 $\overline{BC}=18$ 、 $\overline{OB}=11$ 、 $\overline{OD}=11$



隨堂練習

$\square ABCD$ 為平行四邊形， $\overline{BD}=18$ ， $\overline{AC}=16$ ，
 請問 \overline{AO} 、 \overline{BO} 、 \overline{CO} 、 \overline{DO} 分別為何？

答： $\overline{AO}=8$ 、 $\overline{BO}=9$ 、 $\overline{CO}=8$ 、 $\overline{DO}=9$





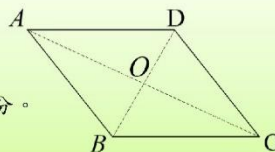
教材內容說明：

1. 本教材第 10~12 頁的教學重點是幫助學生了解平行四邊形「對角線互相平分」的性質關係。
 - 本教材利用平行四邊形的對邊等長及對角線互相平分的性質，計算各長度。
2. 第(9)題給定一個平行四邊形的邊長與對角線的長度，要求學生算出其他三個邊長與對角線中點到頂點的長度。
 - 教師可製作不同的平行四邊形，供學生操作。
3. 本頁隨堂練習的評量重點是給定平行四邊形對角線長度，檢驗學生能利用「平行四邊形的對角線互相平分」的性質解題。



基本學習內容：SC-8-9-1 平行四邊形的內角、邊、對角線的幾何性質

- (10) 如圖，平行四邊形 $\square ABCD$ 中，
對角線 \overline{AC} 和 \overline{BD} 相交於 O 點，
試說明兩條對角線將平行四邊形面積四等分。



說明：

① $\square ABCD$ 為平行四邊形，所以 $\triangle ABC \cong \triangle ACD$

表示 $\triangle ABC$ 的面積 $=\triangle ACD$ 的面積

②如圖， $\square ABCD$ 中，對角線 \overline{AC} 和 \overline{BD} 相交於 O 點。

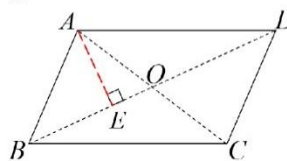
過 A 作 $\triangle AOB$ 與 $\triangle AOD$ 的高 \overline{AE} ，

$$\therefore \triangle AOB \text{ 的面積} = \frac{1}{2} \times \overline{AE} \times \overline{BO}$$

$$\triangle AOD \text{ 的面積} = \frac{1}{2} \times \overline{AE} \times \overline{DO}$$

$\therefore \square ABCD$ 對角線互相平分， $\overline{BO} = \overline{DO}$

$\therefore \triangle AOB$ 的面積 $=\triangle AOD$ 的面積



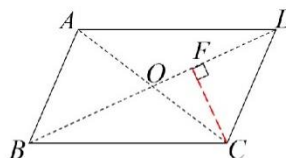
③過 C 作 $\triangle COB$ 與 $\triangle COD$ 的高 \overline{CF} ，

$$\therefore \triangle COB \text{ 的面積} = \frac{1}{2} \times \overline{CF} \times \overline{BO}$$

$$\triangle COD \text{ 的面積} = \frac{1}{2} \times \overline{CF} \times \overline{DO}$$

$\therefore \square ABCD$ 對角線互相平分， $\overline{BO} = \overline{DO}$

$\therefore \triangle COB$ 的面積 $=\triangle COD$ 的面積



④ $\therefore \triangle ABC$ 的面積 $=\triangle ACD$ 的面積

$\triangle AOB$ 的面積 $+\triangle COB$ 的面積 $=\triangle AOD$ 的面積 $+\triangle COD$ 的面積。

⑤我們發現 $\triangle AOB$ 的面積 $=\triangle AOD$ 的面積 $=\triangle BOC$ 的面積 $=\triangle COD$ 的面積。

重點整理

平行四邊形 $ABCD$ 中， O 為兩條對角線的交點，

則 $\triangle AOB$ 的面積 $=\triangle AOD$ 的面積 $=\triangle BOC$ 的面積 $=\triangle COD$ 的面積

即 「兩條對角線將平行四邊形分割成四塊等面積的三角形」。

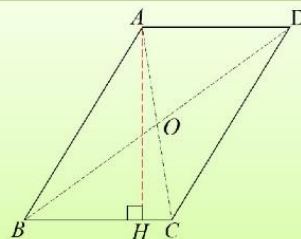
**教材內容說明：**

1. 本教材第 10~12 頁的教學重點是幫助學生了解平行四邊形「對角線互相平分」的性質關係。
 - 本教材利用平行四邊形的對邊等長及對角線互相平分的性質，計算各長度。
2. 第(10)題給定一個平行四邊形及其對角線相交情形，要求學生說明兩條對角線將平行四邊形面積四等分。
 - 步驟一：平行四邊形的對角線將平行四邊形分成兩個全等三角型。
 - 步驟二：由平行四邊形的對角線互相平分，故 $\triangle AOB$ 和 $\triangle AOD$ 的面積相等。
 - 步驟三：由平行四邊形的對角線互相平分，故 $\triangle COB$ 和 $\triangle COD$ 的面積相等。
 - 步驟四：由步驟一的面積相等關係，可以得到四個三角形面積也相等。
3. 本頁重點整理框強調兩條對角線將平行四邊形分割成四塊等面積的三角形。



基本學習內容：SC-8-9-1 平行四邊形的內角、邊、對角線的幾何性質

- (11) 如圖， $\square ABCD$ 中， $\overline{BC}=10$ ，
其對應的高 $\overline{DH}=16$ ，
其對角線 \overline{AB} 和 \overline{BD} 相交於 O 點，
請問 $\triangle BOC$ 的面積為何？



解：

$$\begin{aligned}\square ABCD \text{ 的面積} &= \frac{1}{2} \times \text{底} \times \text{高} \\ &= \frac{1}{2} \times 10 \times 16 \\ &= 80 \text{ (平方單位)}\end{aligned}$$

$\because O$ 點為 \overline{AB} 和 \overline{BD} 兩條對角線的交點

$$\begin{aligned}\therefore \triangle BOC \text{ 的面積} &= \frac{1}{4} \times \square ABCD \text{ 的面積} \\ &= \frac{1}{4} \times 80 \\ &= 20 \text{ (平方單位)}\end{aligned}$$

答：20 (平方單位)



教材內容說明：

1. 本教材第 13 頁的教學重點是幫助學生了解平行四邊形分割成四塊等面積的三角形的應用。

● 本教材利用平行四邊形的對角相等的性質，經由計算發現鄰角互補的性質。

2. 第(11)題給定一個平行四邊形的底邊與對應高的長度，求 $\triangle BOD$ 的面積。

本教材提供一個方法解題：

步驟一：先利用平行四邊形面積公式，求出平行四邊形的面積。

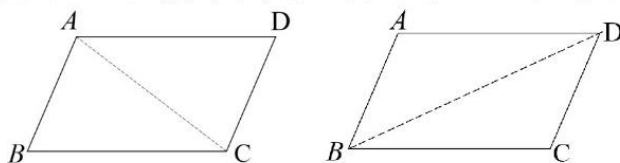
步驟二：再利用對角線將平行四邊形分割成四塊等面積的三角形性質，

將面積四等分得出 $\triangle BOD$ 。

基本學習內容：SC-8-9-1 平行四邊形的內角、邊、對角線的幾何性質

☆關於 平行四邊形 的性質

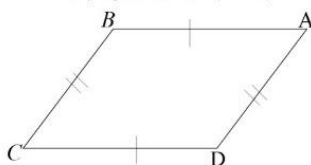
1. 平行四邊形的任一條對角線將平行四邊形分成兩個全等三角形。



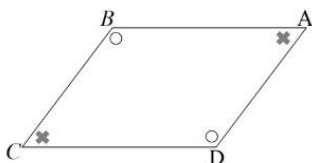
$\triangle ABC$ 與 $\triangle ACD$ 全等， $\triangle ABD$ 與 $\triangle CBD$ 全等



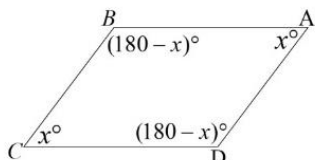
2. 平行四邊形的兩組對邊分別相等。 $(\overline{AD} = \overline{BC}, \overline{AB} = \overline{CD})$



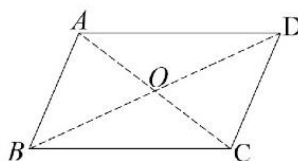
3. 平行四邊形的兩組對角分別相等。 $(\angle A = \angle C, \angle B = \angle D)$



4. 平行四邊形的兩組鄰角互補。 $(\angle A + \angle B = 180^\circ, \angle C + \angle B = 180^\circ, \angle C + \angle D = 180^\circ, \angle A + \angle D = 180^\circ)$



5. 對角線互相平分，即 $\overline{OA} = \overline{OC} = \frac{1}{2}\overline{AC}$ ， $\overline{OB} = \overline{OD} = \frac{1}{2}\overline{BD}$ ，且將平行四邊形面積四等分。





基本學習內容：SC-8-9-1

教材內容說明：

1. 本教材第 14 頁的教學重點是幫助學生整理出平行四邊形的性質。

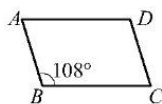


基本學習內容：SC-8-9-1 平行四邊形的內角、邊、對角線的幾何性質



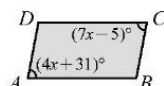
小試身手

(1)如圖，平行四邊形 $ABCD$ 中， $\angle B=108^\circ$ ，求其他三個內角的度數。



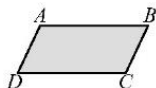
答： $\angle A=72^\circ$ 、 $\angle C=72^\circ$ 、 $\angle D=108^\circ$

(2)如圖，平行四邊形 $ABCD$ 中， $\angle A=(4x+31)^\circ$ 、 $\angle C=(7x-5)^\circ$ ，則 $\angle B=?$



答： $\angle B=101^\circ$

(3)如圖，已知平行四邊形 $ABCD$ 的周長為 24 公分， $\overline{CD}=2\overline{AD}$ ，則各邊的長度分別為多少公分？

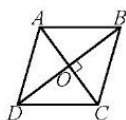


答： $\overline{CD}=16$ ， $\overline{AD}=8$ ， $\overline{AB}=16$ ， $\overline{BC}=8$

(4)平行四邊形 $ABCD$ 中， \overline{AB} 比 \overline{BC} 的 5 倍少 8 公分， \overline{CD} 比 \overline{AD} 的 2 倍多 4 公分，則平行四邊形 $ABCD$ 的周長為多少公分？

答：32

(5)如圖，平行四邊形 $ABCD$ 中， $\overline{AC} \perp \overline{BD}$ ， $\overline{AC}=18$ ， $\overline{BD}=24$ ，則：



① $\overline{AO}=?$

② $\overline{AB}=?$

③ $\triangle AOB$ 的面積 = ?

④ 平行四邊形 $ABCD$ 的面積 = ?

答：①9 ②15 ③67.5 ④216



基本學習內容：SC-8-9-1

教材內容說明：

1. 本頁小試身手共有五題，幫助學生熟練平行四邊形的性質。



教育部國民及學前教育署 編

國民中學

學生學習扶助教材

8 年級數學

